UNA APPLICAZIONE DEL CALCOLO DEGLI OPERATORI DI MIKUSIŃSKI PER LA RISOLUZIONE D'UNA EQUAZIONE ALLE DERIVATE PARZIALI

G. ADLER e G. FREUD

In questo articolo vorremmo indicare, in relazione ad un problema concreto, certi vantaggi del calcolo degli operatori di Mikusiński rispetto a quelli della trasformazione di Laplace. — Nel caso che vogliamo considerare la trasformazione di Laplace non è applicabile perchè una delle espressioni che si presentano nel corso del calcolo non è la trasformata di Laplace di nessuna funzione. Se si prescinde da questo fatto, considerato che le operazioni effettuate su questa espressione che non è una trasformata laplaciana, danno luogo soltanto a funzioni che sono trasformate laplaciane, anche con l'uso della trasformazione di Laplace riusciremmo ad ottenere un risultato giusto. Ma la giustezza di questro risultato può essere solamente verificato con l'aiuto del calcolo degli operatori di Mikusiński [3].

Il problema consiste nel cercare la soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{1}{x^2} Z = 0 \tag{1}$$

con la condizione iniziale e condizione al contorno seguenti:

$$Z(x, 0) = 0 \qquad (x > 1), \tag{2}$$

$$Z(1, t) = g(t) \qquad (t > 0), \tag{3}$$

dove $g(t)$ è una funzione con una derivata continua per intervalli.

Prima trattiamo il caso speciale

$$g(t) \equiv 1 \qquad (t > 0),$$

e la soluzione corrispondente sarà indicata con $z(x, t)$.

Si può verificare che la funzione

$$z_p = \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

è una soluzione particolare dell'equazione (1). Per questo cerchiamo la soluzione del nostro problema nella forma

$$\{z\} = \{f\} * \left\{\frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right\} = \frac{1}{x}\{f\} * \left\{e^{-\frac{x^2}{4t}}\right\}^{1} \tag{4}$$

[1] Qui { } significa un operatore. Se $f(t)$ è una funzione, allora $\{f\}$ indica la operatore corrispondente secondo Mikusiński [3]. L'asterisco $*$ è il segno della moltiplicazione di operatori.

Se sappiamo che l'operatore $\{f\}$ in (4) corrisponde ad una funzione $f(t)$, allora l'espressione (4) identica col prodotto di convoluzione

$$(5) \qquad z = \frac{1}{x} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}\, d\tau\,,$$

e così potremmo applicare la trasformazione di Laplace. Ma poichè l'operatore $\{f\}$, come vedremo, non corrisponde a nessuna funzione, la trasformazione di Laplace non è applicabile. Malgrado questo l'operatore $\{z\}$ stesso corrisponderà ad una funzione.

Per poter costruire la soluzione dell'equazione (1) nella forma (4), dobbiamo verificare che

1° l'operatore (4) possiede una seconda derivata continua secondo il parametro x,

2° l'equazione (1) è soddisfatta da (4).

Considerato che la funzione z_p soddisfa all'equazione (1), la dimostrazione di 2° si riduce alla dimostrazione del fatto che la condizione (2) è verificato dal (4).

L'asserzione 1° è una conseguenza immediata della definizione della derivata continua secondo un parametro; infatti, sotto (4) l'operatore $\{z\}$ è prodotto in forma d'un prodotto di operatori d'un operatore è d'una funzione di operatori che possiede una seconda derivata continua.

L'asserzione 2° non è una conseguenza a priori della forma (4), per questo deve essere dimostrata a posteriori. La dimostrazione sarà effettuata alla fine dell'articolo.

Sostituiamo (4) nella condizione (3):

$$\{f\} * \left\{e^{-\frac{1}{4t}}\right\} = \{1\}\,.$$

Quindi

$$\{f\} = \frac{1}{\left\{e^{-\frac{1}{4t}}\right\}}\,.$$

(Da qui si può vedere che l'operatore $\{f\}$ infatti non è una funzione; la divisione significa la divisione di operatori e non la divisione dei valori di funzione.) Sostituendo questa forma di $\{f\}$ in (4), otteniamo la soluzione del nostro problema nella forma di operatore

$$\{z\} = \frac{1}{x} \frac{\{1\}}{\left\{e^{-\frac{1}{4t}}\right\}} * \left\{e^{-\frac{x^2}{4t}}\right\},$$

o riordinato:

$$\{z\} = \frac{1}{x} \{1\} * \frac{\left\{e^{-\frac{x^2}{4t}}\right\}}{\left\{e^{-\frac{1}{4t}}\right\}}\,.$$

Poichè

$$\{1\} = \frac{1}{s},$$

$$\left\{e^{-\frac{x^2}{4t}}\right\} = \frac{x}{\sqrt{s}} K_1(x\sqrt{s}),$$

dove K_n è la funzione modificata di Bessel ([2] p. 29), allora $\{z\}$ può essere scritta nella forma

$$\{z\} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{s}\,\frac{\frac{x}{\sqrt{s}} K_1(x\sqrt{s})}{\frac{1}{\sqrt{s}} K_1(\sqrt{s})} = \frac{1}{s}\,\frac{K_1(x\sqrt{s})}{K_1(s)}.$$

Se verifichiamo che nella precedente espressione di $\{z\}$

$$F(s) = \frac{1}{x}\,\frac{K_1(x\sqrt{s})}{K_1(s)} \tag{6}$$

esiste come una trasformata di Laplace, allora risulta ([3] p. 322) che $\{z\}$ corrisponde ad una funzione $z(t)$ che può essere scritta nella forma

$$z(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\,\frac{K_1(x\sqrt{s})}{K_1\sqrt{s}}\right], \tag{7}$$

dove $\mathscr{L}$ significa la trasformazione di Laplace.

Essendo

$$K_1(y) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2y}}\, e^{-y}$$

uniformamente per

$$|\arg y| < \frac{\pi}{2}$$

([4] p. 202), l'assintotica della funzione $F(s)$ è:

$$F(s) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{s}\, e^{-\sqrt{s}(x-1)} \qquad (x > 1)$$

Da qui si può facilmente verificare che si realizza per un valore qualunque $\sigma \geqq 0$ che $F(s) \to 0$ nel semi-piano $Re\, s \geqq \sigma$ in senso due-dimensionale se $s \to \infty$, di più, che l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\xi + i\eta)|\, d\eta \qquad (\xi \geqq 0)$$

è convergente. Così si può applicare il teorema 3 che si trova al p. 263 del [1], in virtù di cui $F(s)$ è infatti la trasformata di Laplace d'una funzione.

Così risulta che la produzione sotto (7) di z è possibile.

L'inversione della trasformazione di Laplace sarà eseguita con l'aiuto della formola di Riemann—Mellin. Secondo questo

$$z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{1}{s} \frac{K_1(x\sqrt{s})}{K_1(\sqrt{s})} e^{st} ds, \tag{8}$$

dove σ è un valore reale tale che l'integrando non possiede singolarità nel semipiano $Re\, s \geqq \sigma$ (fig. 1).

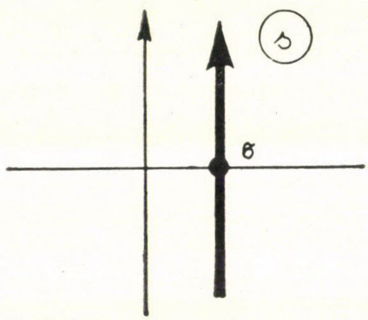

Figura 1

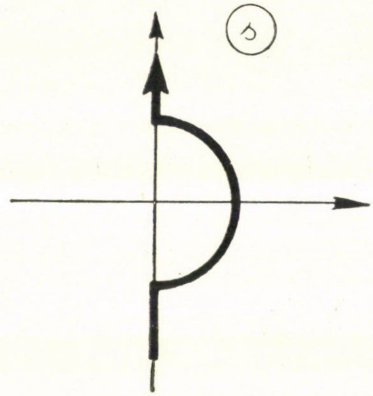

Figura 2

Poichè la funzione $K_1(s)$ non ha ne radice ne singolarità nel dominio $-\pi \leqq \arg s \leqq \pi$, per questo la sola singolarità dell'integrando si trova nel punto $s = 0$, e così il cammino d'integrazione può essere deformato nella forma data in fig. 2. Siano R_1 ed R_2 gli archi

$$R_1: \quad |s| = R, \quad \frac{\pi}{2} \leqq \arg s \leqq \pi,$$

$$R_2: \quad |s| = R, \quad \pi \leqq \arg s \leqq \frac{3\pi}{2}.$$

Si può dimostrare che

$$\lim_{R \to \infty} \int_{R_i} \frac{1}{s} \frac{K_1(x\sqrt{s})}{K_1(\sqrt{s})} e^{st} ds = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

e così il cammino d'integrazione in fig. 2 può essere deformato di nuovo ad un circolo col centro nell'origine ed al margine superiore ed inferiore dell'asse reale negativo (fig. 3).

Applicando la sostituzione $s = p^2$ si ottiene per la funzione z la forma seguente:

$$z = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{1}{p} \frac{K_1(xp)}{K_1(p)} e^{p^2 t} dp,$$

dove L è il nuovo cammino d'integrazione nel piano della variable p (fig. 4). Sia δ il raggio della semi-circonferenza (col centro nell'origine), allora questo ultimo integrale può essere scritto più dettagliatamente così:

$$z = \frac{1}{\pi i}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{K_1(x\delta e^{i\varphi})}{K_1(\delta e^{i\varphi})} e^{\delta^2 e^{2i\varphi} t}\, i\, d\varphi + \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{1}{r}\, \frac{K_1(x i r)}{K_1(i r)} e^{-r^2 t}\, dr + \int_{+\delta}^{+\infty} \frac{1}{r}\, \frac{K_1(x i r)}{K_1(i r)} e^{-r^2 t}\, dr\right].$$

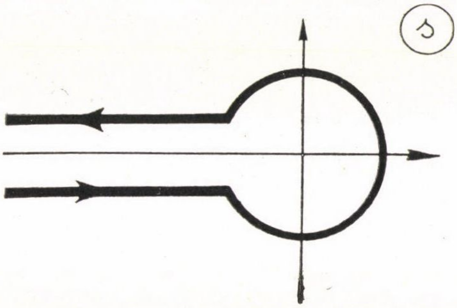

Figura 3

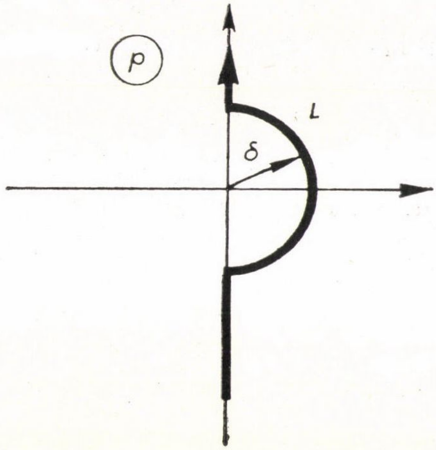

Figura 4

Poichè δ può essere arbitrariamente piccolo e come vedremo il limite del secondo membro dell'equazione esiste per $\delta \to 0$, possiamo formare il limite per $\delta \to 0$:

$$z = \frac{1}{\pi i}\left[\lim_{\delta\to 0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{K_1(x\,\delta\, e^{i\varphi})}{K_1(\delta\, e^{i\varphi})} e^{\delta^2 e^{2i\varphi} t}\, i\, d\varphi + \right.$$

$$\left. + \lim_{\delta\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{1}{r}\, \frac{K_1(x\, i\, r)}{K_1(i\, r)} e^{-r^2 t}\, dr + \int_{+\delta}^{+\infty} \frac{1}{r}\, \frac{K_1(x\, i\, r)}{K_1(i\, r)} e^{-r^2 t}\, dr\right)\right].$$

Giacchè nel caso $y \to 0$

$$K_1(y) \sim \frac{1}{y},$$

il primo limite può essere calcolato immediatamente:

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{K_1(x\,\delta\, e^{i\varphi})}{K_1(\delta\, e^{i\varphi})} e^{\delta^2 e^{2i\varphi} t}\, i\, d\varphi = \frac{\pi i}{x}.$$

I due integrali del secondo limite, sostituendo $(-r)$ in luogo di r nel primo integrale, possono essere scritti come un singolo integrale:

$$\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{+\delta}^{+\infty} = \int_{+\delta}^{+\infty} \frac{1}{r} \left[\frac{K_1(xir)}{K_1(ir)} - \frac{K_1(-xir)}{K_1(-ir)} \right] e^{-r^2 t} \, dr .$$

Formato il limite per $\delta \to 0$ e considerata la relazione

$$K_1(-x) = -K_1(x) + i\pi I_1(x)$$

([2] p. 29), z può essere scritto nella forma seguente:

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \left[\frac{K_1(xir)}{K_1(ir)} - \frac{-K_1(xir) + i\pi I_1(xir)}{-K_1(ir) + i\pi I_1(ir)} \right] e^{-r^2 t} \, dr .$$

Utilizzando le relazioni

$$K_1(iy) = \frac{\pi}{2} [-J_1(y) + i N_1(y)] ,$$

$$I_1(iy) = i J_1(y) ,$$

([2]) pp. 26, 28), z ottiene finalmente la forma definitiva:

$$z = \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} \frac{N_1(r) J_1(xr) - N_1(xr) J_1(r)}{J_1^2(r) + N_1^2(r)} e^{-r^2 t} \, dr .$$

(Si può verificare immediatamente che questa funzione soddisfa all'equazione (1) perchè anche le funzioni

$$J_1(xr) e^{-r^2 t}, \quad N_1(xr) e^{-r^2 t}$$

soddisfanno a quella. Inoltre si vede colla sostituzione $x = 1$, quando il numeratore dell'integrando sarà identicamente zero, che la funzione soddisfa anche alla condizione (3).)

Finalmente abbiamo ancora a dimostrare che la soluzione ottenuta verifica la condizione (2). Lo dimostreremo in base alla forma (8) della funzione z.

In virtù dell'assintotica della funzione $F(s)$, l'integrale sotto (8) è uniformamente convergente in t $(0 \leq t \leq \mu)$ per $x > 1$ e per un μ qualunque positivo; così la transizione alla limite $t \to 0$ può essere effettuata dietro il segno dell'integrale:

$$z(x, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s) \, ds .$$

Servendoci dell'uniformità dell'assintotica di $F(s)$ per $x > 1$, inoltre della disuguaglianza relativa a $s = \sigma + i\tau$:

$$Re \sqrt{s} \geq \frac{1}{4} (\sqrt{|\sigma|} + \sqrt{|\tau|}) \qquad (\sigma > 0),$$

si ottiene per $\sigma \to +\infty$:

$$|z(x, 0)| < c \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left| \frac{1}{s} e^{-\sqrt{s}(x-1)} \right| |ds| \leq c \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \right| e^{-\frac{\sqrt{\sigma}+\sqrt{\tau}}{4}(x-1)} d\tau =$$

$$= c \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{\sqrt{\sigma}}{4}(x-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} e^{-\frac{\sqrt{\tau}}{4}(x-1)} d\tau = 0,$$

dove c è una costante. Dunque la condizione (2) è soddisfatta da z:

$$z(x, 0) = 0.$$

Avendo costruita la soluzione per il caso speciale $g(t) \equiv 1$, la soluzione del problema generale è fornita dal principio di Duhamel:

$$Z(x, t) = g(0)\, z(x, t) + g' * z(x, t).$$

La soluzione può essere costruita anche nel caso quando g è un operatore che non corrisponde necessariamente ad una funzione. In questo caso la soluzione può essere scritta nella forma

$$Z(x, t) = s * g * z.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Doetsch, G.: *Handbuch der Laplace-transformation, I.* Verlag Birkhäuser, Basel, 1950.

[2] Magnus, W.—Oberhettinger, F.: *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik.* Springer-Verlag, Berlin, 1948.

[3] Mikusiński, J.: *Operatorenrechnung.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.

[4] Watson, G. N.: *Theory of Bessel Functions.* University Press, Cambridge, 1952.

A MIKUSIŃSKI-FÉLE OPERÁTORSZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSA EGY PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLET MEGOLDÁSÁRA

ADLER Gy. és FREUD G.

Kivonat

A szerzők az

(1) $$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{1}{x^2} Z = 0$$

parciális differenciálegyenlet

(2) $$Z(x, 0) = 0 \qquad (x > 1)$$

és

(3) $$Z(1, t) = g(t) \qquad (t > 0)$$

kezdeti-, illetve peremfeltételeket kielégítő megoldását (ahol $g(t)$ szakaszonként folytonosan differenciálható függvény) állítják elő a Mikusiński-féle operátorszámítás segítségével. Először a $g(t) \equiv 1$ esethez tartozó $z(x, t)$ megoldást

$$z(x,t) = \frac{1}{x} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} d\tau$$

alakban határozzák meg. Ez a feladat egy, az $f(t)$ ismeretlenre vonatkozó konvolució-típusú integrálegyenletre vezet, melynek a függvények körében nincs megoldása. Ezzel szemben ez az integrálegyenlet a Mikusiński-féle operátorok körében megoldható, és az így nyert f operátort $z(x, t)$ fenti kifejezésébe helyettesítve $z(x, t)$ már függvénynek adódik.

Az általános probléma megoldása $z(x, t)$ segítségével a következőképp írható fel:

$$Z(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t g(\tau)\, z(x, t-\tau)\, d\tau\,.$$

Abban az esetben, midőn g olyan operátor, amely nem függvénynek felel meg, a megoldás a következő alakban írható fel:

$$Z(x,t) = s * g * z\,.$$

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ОТ MIKUSIŃSKI К РЕШЕНИЮ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Gy. ADLER и G. FREUD

Резюме

Авторы представляют решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial t} - \frac{1}{x^2} Z = 0\,, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$Z(x, 0) = 0 \qquad (x > 1) \tag{2}$$

и граничному условию

$$Z(1, t) = g(t) \qquad (t > 0) \tag{3}$$

(где $g(t)$ — кусочно непрерывно — дифференцируемая функция) с помощью операционного исчисления от Mikusiński. Сначала они определяют решение $z(x, t)$, относящееся к случаю $g(t) \equiv 1$, в виде

$$z(x,t) = \frac{1}{x} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} d\tau\,.$$

Эта задача приводит к интегральному уравнению типа свертки относительно неизвестного $f(t)$, неимеющему решения в круге функций. Но это интегральное разрешимо в круге операторов от Mikusiński. Подставив это решение f в приведённое выше выражение для $z(x, t)$, получаем последнее уже в виде функции.

Решение общей проблемы с помощью $z(x, t)$ может быть записано в следующем виде:

$$Z(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t g(\tau)\, z(x, t-\tau)\, d\tau\,.$$

В том случае, когда g оператор, не соответствующий функции, решение может быть занисано в виде

$$Z(x,t) = s * g * z\,.$$