PROBLÈMES DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR AVEC DES CONDITIONS AUX LIMITES COMPOSÉES

par

PÁL KOSIK, MELANIE SALLAY et MAGDA ZIMÁNYI

Plaçons une barre ϱ de longueur l homogène conductrice de la chaleur le long de l'axe positif x du système de coordonnées, de telle façon, que l'extrémité $x = 0$ de la barre soit en contract thermique avec un corps β réduit à un point dans lequel la chaleur $Q(t)$ cal/sec se produit en fonction du temps t. Alors en désignant par $V(x, t)$ la distribution de la chaleur de ϱ et par $U(t)$ la température de β, $V(x, t)$ doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial V}{\partial t} \tag{1}$$

avec les conditions aux limites et initiales suivantes (voir [2]):

$$AU'(t) + B\,[U(t) - V(0, t)] = Q(t), \tag{2}$$

$$V_x(0, t) = -C\,[U(t) - V(0, t)], \tag{3}$$

$$U(0) = U_0, \quad V(x, 0) = f(x), \tag{4}$$

de plus, au cas où $l < \infty$, à l'extrémité $x = l$ de la barre doivent être satisfaites les conditions

$$V_x(l, t) = g(t) \tag{a}$$

ou

$$V(l, t) = h(t), \tag{b}$$

où $Q(t)$, $f(x)$, $g(t)$ et $h(t)$ sont des fonctions données continues. Dans le cas où $l = \infty$ nous supposons que pour un certain γ et pour $t \geqq 0$

$$\lim_{x \to \infty} e^{-\gamma x^2}\, V(x, t) = 0 \tag{c}$$

uniformément en t.

Nous pouvons résoudre le problème de la manière suivante:

Nous déterminons la fonction $V(x, t)$ sous la forme

$$V(x, t) = V^*(x, t) + \overline{V}(x, t),$$

où:

A) $V^*(x, t)$ est la solution de l'équation (1) et satisfait aux conditions (4) et (a) ou (b), de plus $V^*_x(0, t) = 0$. Alors, en définissant les fonctions $U^*(t)$

et $Q^*(t)$ de la manière suivante:

$$U^*(t) = V^*(0, t),$$

$$Q^*(t) = AV_t^*(0, t),$$

et les en substituant dans les expressions (2) et (3), les conditions (2) et (3) sont identiquement satisfaites.

B) $\overline{V}(x, t)$ est la solution de l'équation (1) pour laquelle $\overline{V}(x, o) = 0$, de plus au cas (a) $\overline{V}_x(l, t) = 0$ au cas (b) $\overline{V}(l, t) = 0$ sont vérifiées et qui satisfait aux conditions aux limites

$$(\overline{2}) \qquad A\overline{U}'(t) + B[\overline{U}(t) - \overline{V}(0, t)] = \overline{Q}(t),$$

$$(\overline{3}) \qquad \overline{V}_x(0, t) = -C[\overline{U}(t) - \overline{V}(0, t)],$$

où

$$\overline{Q}(t) = Q(t) - Q^*(t),$$

$$\overline{U}(t) = U(t) - U^*(t).$$

Dans le cas où $l = \infty$ nous devons exiger que toutes les deux fonctions $V^*(x, t)$ et $\overline{V}(x, t)$ vérifient la condition (c).

G. Freud dans son travail [2] a démontré que pour toutes les fonctions $\overline{Q}(t)$ continues quelconques la solution du problème B) existe et que nous pouvons obtenir cette solution à l'aide de la transformation de Laplace, en approchant la fonction $Q(t)$ par des polynomes exponentiels de forme

$$\overline{Q}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\gamma_k t} \quad (\gamma_k > 0).$$

En effet cherchons la fonction $\overline{V}(x, t)$ sous la forme

$$V(x, t) = \int_0^t F(x, t - \tau)\, W(\tau)\, d\tau,$$

où

$$\text{cas (a)} \qquad F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[e^{-\frac{a^2x^2}{4t}} + e^{-\frac{a^2(2l-x)^2}{4t}} \right],$$

$$\text{cas (b)} \qquad F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left[e^{-\frac{a^2x^2}{4t}} - e^{-\frac{a^2(2l-x)^2}{4t}} \right],$$

$$\text{cas (c)} \qquad F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{a^2x^2}{4t}}.$$

$W(t)$ étant choisie arbitrairement la fonction $\overline{V}(x, t)$ satisfait à l'équation (1) et aux conditions aux limites et initiales pour $x = l$ et $t = 0$. Les conditions $(\overline{2})$ et $(\overline{3})$ fournissent un système d'équations intégrodifférentielles de type convolutoire pour la détermination des fonctions $U(t)$ et $W(t)$, qui est résoluble à l'aide de la transformation de Laplace au cas où $\overline{U}(0) = \overline{U}_0$, $Q(t) \equiv 0$; $\overline{U}(0) = 0$, $\overline{Q}(t) \equiv 1$ et $\overline{U}(0) = 0$, $\overline{Q}(t) = e^{-\gamma t}$ (concernant la discussion détaillée voir [3]).

Au cas où $\overline{Q}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\gamma_k t}$, $\overline{U}(0) = U_0$, nous obtenons la solution par superposition des solutions précédentes.

Considérant que $\overline{Q}(t) = Q(t) - Q^*(t)$, la continuité de la fonction $\overline{Q}(t)$ est certainement assurée si $f(x)$ admet une seconde dérivée continue et $f'(0) = 0$.

Dans notre ouvrage nous démontrerons que le problème est aussi résoluble pour $f'(0) = a \neq 0$, c'est à dire pour une $\overline{Q}(t)$ ayant une certaine irregularité au point $t = 0$, en appliquant la méthode ci-dessus. Avant tout nous démontrerons que dans le cas où $f'(0) = a \neq 0$, $Q(t)$ a une singularit de formé $\frac{\varkappa}{\sqrt{t}}$ pour $t = 0$, d'abrord nous déterminerons la solution.

Théorème. *Soit $V^*(x, t)$ la solution de l'équation de la chaleur sur $0 \leq x \leq l$ pour laquelle $V^*(x, 0) = f(x)$, $V^*_x(0, t) = 0$, de plus au cas où $l \neq \infty$ qui satisfait aux conditions (a) ou (b), ou bien au cas où $l = \infty$ à la condition (c) et soit $f'(0) = a \neq 0$.*

Assertion. *Dans ce cas on peut écrire $V^*_t(0, t)$ sous la forme $V^*_t(0, t) = \frac{\varkappa}{\sqrt{t}} + \psi(t)$, où $\varkappa$ est une constante et $\psi(t)$ est une fonction continue pour $t \geq 0$.*

Démonstration. I. Cas d'un intervalle fini.

Soit $r(x, t)$ la solution de l'équation (1) sur l'intervalle $-l \leq x \leq l$, qui vérifie les conditions $r(x, 0) = l - |x|$ et $r(-l, t) = r(l, t) = 0$. En résolvant le problème à l'aide de la méthode de Fourier nous obtenons

$$r(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8l}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{(2al)^2} t}.$$

Il en résulte

$$r_t(0, t) = -\frac{2}{a^2 l} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{(2al)^2} t} = -\frac{2}{a^2 l} \vartheta_2 \left(0 \,\middle|\, \frac{i\pi}{a^2 l^2} t\right).$$

En appliquant la formule

$$\vartheta_2(z \,|\, \tau) = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}} e^{-\frac{iz^2}{\tau\pi}} \vartheta_4 \left(-\frac{z}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right)$$

nous obtenons

$$r_t(0, t) = -\frac{2}{a^2 l} \vartheta_2 \left(0 \,\middle|\, \frac{i\pi}{a^2 l^2} t\right) = -\frac{2}{a\sqrt{\pi t}} \vartheta_4 \left(0 \,\middle|\, i \frac{a^2 l^2}{\tau t}\right).$$

Étant donné que la fonction $\vartheta_4(0 \,|\, \tau)$ est analytique pour les valeurs $\operatorname{Im} \tau > 0$ (voir [5] p. 476) la fonction $r_t(0, t)$ se produit sous la forme $r_t(0, t) = \frac{\varkappa}{\sqrt{t}} A(t)$, où $A(t)$ est analytique. Vu, que le développement infini de la fonction

$\vartheta_4(z \mid \tau)$ est $\vartheta_4(z \mid \tau) = 1 - 2\,q \cos 2\,z + \ldots$, où $q = e^{i\pi\tau}$ nous pouvons écrire la fonction $r_t(0, t)$ sous la forme $r_t(0, t) = \frac{\varkappa}{\sqrt{t}} + R(t)$, où $R(t)$ est continue pour $t \geqq 0$.

Considérons maintenant la fonction $z(x, t) = V^*(x, t) + a\, r(x, t)$ sur l'intervalle $0 \leqq x \leqq l$. La fonction $z(x, t)$ est une solution de l'équation (1) et vérifie les conditions suivantes:

$$z(x, 0) = f(x) + a\,(l - |\,x\,|)$$

$$z_x(0, 0) = 0,$$

au cas (a)

$$z_x(l, t) = g(t) + G(t),$$

où

$$G(t) = 4\,a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}\, e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{(2al)^2}\,t}$$

et $G(t)$ est continue (voir [4] p. 645), au cas (b)

$$z(l, t) = h(t).$$

La fonction $z(x, t)$ satisfaisant à la condition $z_x(0, 0) = 0$, il découle que $z_t(0, t)$ est continue pour $t \geqq 0$. Il en résulte, que $V_t^*(0, t) = z_t(0, t) - a\, r_t(0, t) = = -\frac{a\varkappa}{\sqrt{t}} + \psi(t)$, où la fonction $\psi(t) = z_t(0, t) - a\, R(t)$ est continue pour $t \geqq 0$.

II. Cas d'un intervalle infini.

La marche de la démonstration est analogue à la démonstration appliquée dans le cas de l'intervalle fini. Nous devons seulement considérer au lieu de la fonction $r(x, t)$ la fonction $s(x, t)$ pour laquelle $s(x, 0) = e^{-x} (x \geqq 0)$, $s_x(0, t) = 0$ $(t > 0)$ et qui satisfait à l'équation (1) sur $0 \leqq x < \infty$.

La solution est

$$s(x, t) = \frac{1}{2}\left\{e^{\frac{(2t+a^2x)^2 - a^4x^2}{4a^2t}}\left[1 - \Phi\left(\frac{2\,t + a^2\,x}{2\,a\sqrt{t}}\right)\right] + e^{\frac{(2t-a^2x)^2 - a^4x^2}{4a^2t}}\left[1 - \Phi\left(\frac{2\,t - a^2x}{2\,a\sqrt{t}}\right)\right]\right\},$$

où

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2}\, dy\,.$$

De là

$$s_t(0, t) = -\frac{1}{a\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{a^2}\, e^{\frac{t}{a^2}}\left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{t}}{a}\right)\right].$$

Il est facile de voir que la fonction $\frac{1}{a^2}\, e^{\frac{t}{a^2}}\left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{t}}{a}\right)\right]$ est continue pour $t \geqq 0$.

Alors la fonction $s_t(0, t)$ s'écrit sous la forme $-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}} + S(t)$, où $S(t)$ est continue.

D'après le théorème il est évident qu'on peut écrire la fonction $\overline{Q}(t) = Q(t) - Q^*(t)$ sous la forme

$$\overline{Q}(t) = H(t) + \frac{c}{\sqrt{t}},$$

où $H(t)$ est continue. Vu, que $\overline{V}(x, t)$ vérifie les conditions homogènes nous obtenons la solution en superposant à la solution appartenant à $\overline{Q}_1(t) = H(t)$ la solution appartenant à $\overline{Q}_2(t) = \frac{c}{\sqrt{t}}$.

La solution du problème étant connue pour $\overline{U}(0) = 0$ et $H(t)$ continue et pour $\overline{U}(0) = U_0$ et $\overline{Q}(t) \equiv 0$, il est suffisant de calculer la fonction $\overline{V}(x, t)$ pour $\overline{U}(0) = 0$ et $\overline{Q}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Le système des fonctions $\overline{U}(t)$ et $\overline{V}(x, t)$ est univoquement déterminé par les conditions données d'après un corollaire direct du principe de monotonité démontré dans [2]. La démonstration publiée est sans doute appliquable dans le cas où $\overline{Q}(t) = ct^a$ $(a > -1)$.

En déterminant les fonctions $\overline{U}(t)$, et $\overline{V}(x, t)$ à l'aide de la méthode précédante nous obtenons:
cas (a)

$$\overline{U}(t) = \frac{A_1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} - 4\sum_{\varphi_k>0} r_k\, E(\varphi_k\sqrt{t})\, e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$\overline{V}(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{a^2x^2}{4(t-\tau)}} + e^{-\frac{a^2(2l-x)^2}{4(t-\tau)}}\right] W(\tau)\, d\tau,$$

où

$$W(t) = \frac{A_1}{2} + \sum_{\varphi_k>0}\left[p_k - \frac{2s_k}{\sqrt{\pi}} E(\varphi_k\sqrt{t})\right] e^{-\varphi_k^2 t},$$

cas (b)

$$\overline{U}(t) = 4\sum_{\varphi_k>0} r_k\, E(\varphi_k\sqrt{t})\, e^{-\varphi_k^2 t},$$

$$\overline{V}(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\left[e^{-\frac{a^2x^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{a^2(2l-x)^2}{4(t-\tau)}}\right] W(\tau)\, d\tau,$$

où

$$W(t) = \sum_{\varphi_k>0}\left[p_k - \frac{2s_k}{\sqrt{\pi}} E(\varphi_k\sqrt{t})\right] e^{-\varphi_k^2 t}.$$

de plus

$$r_k = \frac{\beta_1}{\alpha_1 \varphi_k^5 + \alpha_2 \varphi_k^3 + \alpha_3 \varphi_k} \qquad A_1 = \frac{C}{AC + Ba^2 l}$$

$$p_k = \frac{\beta_2 \varphi_k^2 + \beta_3}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3} \qquad \alpha_1 = - A^2 a^2 l$$

$$s_k = \frac{\beta_4}{\alpha_1 \varphi_k^4 + \alpha_2 \varphi_k^2 + \alpha_3} \qquad \alpha_2 = A[- AC^2 l - AC + 2 Ba^2 l]$$

$$\beta_1 = BC \qquad \beta_3 = - BCa \qquad \alpha_3 = - B(AC + Ba^2 l)$$

$$\beta_2 = ACa \qquad \beta_4 = AC^2 \qquad E(x) = \int_0^x e^{y^2} dy$$

Les valeurs φ_k sont les racines des équations suivantes:
au cas (a)

$$\operatorname{tg} al\varphi = \frac{AC\varphi}{a(A\varphi^2 - B)},$$

au cas (b)

$$\operatorname{tg} al\varphi = \frac{a(B - A\varphi^2)}{AC\varphi}.$$

cas (c) ($l = \infty$)

$$\overline{U}(t) = \frac{c\sqrt{\pi}}{Ba} + 2\gamma_1 e^{p_1^2 t} Erf(- p_1 \sqrt{t}) - 2\gamma_2 e^{p_2^2 t} Erf(- p_2 \sqrt{t}),$$

$$\overline{V}(x, t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} e^{-\frac{a^2 x^2}{4(t-\tau)}} W(\tau)\, d\tau,$$

où

$$W(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{C}{p_1 - p_2} [e^{p_1^2 t} Erf(- p_1 \sqrt{t}) - e^{p_2^2 t} Erf(- p_2 \sqrt{t})]$$

de plus

$$\gamma_1 = \frac{ap_1 + C}{p_1(p_2 - p_1)}$$

$$\gamma_2 = \frac{ap_2 + C}{p_2(p_2 - p_1)}$$

$$Erf(x) = \int_x^\infty e^{-y^2} dy.$$

Ici p_1 et p_2 sont les racines supposées différentes de l'équation $Aap^2 + ACp + Ba = 0$.

Considérant que

I. la fonction $V(x, t)$ admet une seconde dérivée continue pour $t > 0$ et satisfait à l'équation (1), de plus aux conditions prescrites pour $t = 0$ et $x = l$;

II. $W(t)$ est continue et $\lim_{x \to 0} \frac{\partial}{\partial x} \overline{V}(x, t)$ existe pour $t > 0$ (voir [1]);

III. $\overline{U}(t)$ est continue et dérivable et $\overline{U}'(t)$ prend la forme $\frac{\text{const}}{\sqrt{t}} + K(t)$ (où $K(t)$ est continue),

les fonctions obtenues sont les solutions du problème.

Enfin nous exprimons nos vifs remerciements à M. G. Freud pour l'aide précieuse apporté dans notre ouvrage.

(Reçu le 9 octobre 1959.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Adler Gy: „Hővezetési és diffuziós feladatok összetett peremfeltételekkel", II. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 167—183.
[2] Freud, G.: „Problèmes de la propagation de la chaleur avec les conditions aux limites composées". (Sous la presse.)
[3] Freud G.: „Hővezetési és diffuziós feladatok összetett peremfeltételekkel, I." *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1955) 369—394.
[4] Szász P.: *A differenciál- és integrálszámítás elemei. I.* 2. kiadás. Közoktatásügy Kiadóvállalat, Budapest, 1951.
[5] Whittaker, E. T.—Watson, G. N.: *A course of modern analysis.* 4. edition. University Press, Cambridge, 1952.

HŐVEZETÉSI PROBLÉMÁK ÖSSZETETT HATÁRFELTÉTELEK ESETÉN

KOSIK P., SALLAY M. és ZIMÁNYI M.

Kivonat

A szerzők az (1) egyenlet megoldásával foglalkoznak, a (2), (3) és (4), valamint az (a), (b) vagy (c) feltételek fennállása mellett. Freud G. [2] dolgozatában megadja a feladat megoldását az $f'(0) = 0$ feltétel mellett. A szerzők jelen dolgozatukban megadják a megoldást ezen korlátozó feltevés nélkül.

ПРОБЛЕМЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СЛУЧАЕ СЛОЖНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

P. KOSIK, M. SALLAY и M. ZIMÁNYI

Резюме

Авторы занимаются решением уравнения (1) в случае выполнения условий (2), (3) и (4), а также (a), (b) или (c). G. Freud в работе [2] решил задачу при условии $f'(0) = 0$. Авторы в настоящей работе дают решение без этого ограничивающего условия.