

REMARQUE SUR LA SOMMABILITÉ DES SÉRIES DE TAYLOR SUR LEURS CERCLES DE CONVERGENCE, III.

par

LÁSZLÓ ALPÁR

*Dédié au professeur Paul Turán
à l'occasion de son 50-ième anniversaire.*

§ 1. Introduction

Cette troisième partie du présent ouvrage expose une généralisation des résultats obtenus par M. P. TURÁN [1] et par l'auteur [2], [3]. Les deux théorèmes que nous allons démontrer contiennent, comme leurs cas particuliers, les propositions développées dans les travaux cités, sauf celui dû à M. TURÁN concernant la sommabilité Abel des séries envisagées. Rappelons brièvement les problèmes en question et les résultats déjà établis.

Soient $f_1(z)$ et $f_2(z)$ deux fonctions régulières dans le cercle $|z| < 1$ liées par la relation

$$(1.1) \quad f_2(z) = f_1 \left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} \right)$$

où $\zeta_0 = re^{i\alpha}$ est un point fixe ($0 < r < 1$, $0 \leq \alpha < 2\pi$). La relation (1.1) fait correspondre à la série de Taylor

$$(1.2) \quad f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$$

la série de Taylor

$$(1.3) \quad f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(\zeta_0) z^{\nu}.$$

Désignons de plus par z_1 et z_2 deux points homologues dans la transformation homographique

$$(1.4) \quad z_1 = \frac{z_2 - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z_2}.$$

Si $|z_1| < 1$, on a aussi $|z_2| < 1$, et selon l'hypothèse formulée sur $f_1(z)$ et $f_2(z)$

$$(1.5) \quad f_1(z_1) = f_2(z_2),$$

$$(1.6) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z_1^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(\zeta_0) z_2^{\nu}.$$

Par contre, si $|z_1| = 1$, et par suite $|z_2| = 1$, on ne peut rien affirmer sur les expressions (1.5) et (1.6) sans faire des hypothèses supplémentaires sur

$f_1(z)$. Supposons donc que $f_1(z)$ est définie en ce point z_1 ($|z_1| = 1$) et que la série (1.2) y est convergente, ce qui revient à dire que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = 0$. La relation

(1.5) ne cesse pas de subsister et l'on est porté à croire que la série (1.3) est également convergente au point correspondant z_2 et que l'égalité (1.6) reste valable. Cette impression est encore confirmée par les faits suivants: a) Dans la plupart des cas où $f_1(z)$ est une des fonctions élémentaires habituellement considérées, la convergence de la série (1.2) au point z_1 ($|z_1| = 1$) entraîne en effet celle de la série (1.3) au point z_2 , et les deux séries ont la même somme.

b) Si $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_\nu = 0$, la convergence de la série $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ sur la frontière de son cercle de convergence est une propriété locale et l'on attendrait que cette convergence soit conservée après une transformation analytique de la variable z , comme dans notre cas où l'on substitue z par une fonction régulière dans le cercle fermé $|z| \leq 1$ [cf. (1.1)].

Or, une étude approfondie ne vérifie pas cette présomption. En effet, en posant $z_1 = 1$, et selon (1.4) $z_2 = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$, ce qui n'affecte pas la généralité de ces recherches, M. P. TURÁN a démontré [1] que pour chaque ζ_0 donné on peut trouver des fonctions $f_1(z)$ régulières dans le cercle $|z| < 1$ telles que, malgré la convergence de la série

$$(1.7) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu,$$

la série

$$(1.8) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0} \right)^\nu$$

soit divergente. M. TURÁN a encore prouvé que si la série (1.2) est sommable Abel au point $z = 1$, la série (1.3) possède cette même propriété au point $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$ pour toutes les fonctions $f_1(z)$ régulières dans le cercle $|z| < 1$.

Ces deux théorèmes de M. TURÁN de caractères opposés amènent à poser la question naturelle : quelle conclusion pourrait-on tirer dans le même problème en utilisant un procédé de sommation plus puissant que la sommation des séries au sens élémentaire, mais moins puissant que celui d'Abel? Le procédé de sommation (C, k) , avec $0 < k < \infty$, possède cette propriété et est en même temps le plus couramment utilisé. C'est cette circonstance qui suggère l'idée de comparer les séries (1.7) et (1.8) du point de vue de leur sommabilité (C, k) . Ainsi, en généralisant le théorème de M. TURÁN, nous avons démontré [2] que pour chaque k entier positif et ζ_0 donnés on peut trouver des fonctions $f_1(z)$ régulières dans le cercle $|z| < 1$ telles que, malgré la sommabilité (C, k) de la série (1.7), la série (1.8) ne soit pas sommable (C, k) .

Nous avons démontré ensuite [3] un théorème de sens inverse, notamment si k est un entier non négatif, la sommabilité (C, k) de la série (1.7) assure toujours la sommabilité $(C, k + 1)$ de la série (1.8). Ce dernier résultat permet de prévoir d'une manière heuristique le théorème de M. TURÁN concernant la sommabilité Abel des séries en question, à savoir le procédé de som-

mation d'Abel peut souvent être considéré comme le cas limite du procédé de sommation (C, k) quand $k \rightarrow \infty$, mais «alors on ne fait pas de distinction entre k et $k + 1$ ».

Au cours des recherches que nous venons d'esquisser nous avons supposé que l'ordre k de la sommation est un entier non négatif, bien que cette condition ne s'impose pas d'elle même; et il semble comme une suite logique de ce qui précède d'étendre nos investigations aux cas où k n'est pas un entier, mais réel et non négatif. On se demande également si l'ordre $k + 1$ de la sommabilité de la série (1.8) est le plus petit possible, ou bien s'il existe un nombre $\delta, 0 < \delta < 1$, tel que la sommabilité (C, k) de la série (1.7) entraîne la sommabilité $(C, k + \delta)$ de la série (1.8). M. M. RIESZ, en généralisant le théorème de FEJÉR, avait établi [4] que les séries de Fourier sont déjà sommables (C, δ) , si petit que soit le nombre positif δ . En évoquant ce résultat de M. RIESZ, nous nous attendions à trouver un phénomène analogue dans le problème qui nous occupe. Plus précisément nous avons cru que pour un $k \geq 0$ quelconque, la sommabilité (C, k) de la série (1.7) implique toujours la sommabilité $(C, k + \delta)$ de la série (1.8) pour chaque $\delta > 0$. Or, nous allons démontrer d'une part que lorsque la série (1.7) est sommable (C, k) , la série (1.8) est certainement sommable $(C, k + \delta)$ si $\delta \geq \frac{1}{2}$; d'autre part que l'on peut trouver des fonctions $f_1(z)$ régulières dans le cercle $|z| < 1$ telles que, malgré la sommabilité (C, k) de la série (1.7), la série (1.8) ne soit pas sommable $(C, k + \delta)$ si $\delta < \frac{1}{2}$.

Avant d'énoncer ces résultats sous forme de théorèmes précis, nous y ajouterons quelques remarques. Désignons comme dans les parties I et II ([2], [3]) par $\alpha_n^{(k)}$ la n -ième moyenne (C, k) de la série (1.7) et par $\beta_n^{(k)}$ celle de la série (1.8). $\alpha_n^{(k)}$ et $\beta_n^{(k)}$ sont aussi définies pour k non entiers positifs ou négatifs ([5], pp. 95—96) et en particulier pour $k \geq 0$. Les relations que nous avons établies entre les $\alpha_n^{(k)}$ et les a_ν respectivement entre les $\beta_n^{(k)}$ et les $b_\nu(\zeta_0) \left(\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}\right)^\nu$ ([2], (2.6), (2.8)) ne sont pas non plus altérées si $k \geq 0$ n'est pas un entier. La formule ([2], (2.16)) qui exprime $\beta_n^{(k)}$ à l'aide des $\alpha_\nu^{(k)}$

$$(1.9) \quad \beta_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu + k}{n + k} \binom{\nu}{k} p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) \alpha_\nu^{(k)}$$

reste également valable, les coefficients binomiaux étant aussi définis pour les $k \geq 0$; enfin $p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ donné par la formule ([2], (2.15)):

$$(1.10) \quad p_{n\nu}^{(k)}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \frac{(1 + \zeta_0)^{k+1}}{(1 - |\zeta_0|^2)^k} \frac{(1 + \zeta_0)^n}{(1 + \bar{\zeta}_0)} \int_{|\omega|=\varrho} \left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0\omega}{\omega + \zeta_0}\right)^{n+1} (1 + \bar{\zeta}_0\omega)^{k-1} d\omega$$

ne perd pas son sens si ϱ est une constante et $r < \varrho < \frac{1}{r}$ ($r = |\zeta_0|$) pour des $k \geq 0$ quelconques. Cependant la démonstration que nous avons dévelop-

pée dans la partie I ([2]) ne s'applique plus, car nous y avons fait usage des dérivées d'ordre k entier. Afin d'arriver à notre but, nous devons choisir maintenant une voie différente.

Ces remarques faites, nous pouvons énoncer les théorèmes suivants:

Théorème 1. Soient $k \geq 0$, $\delta \geq \frac{1}{2}$ deux nombres donnés, $\zeta_0 \neq 0$ un point fixe dans le cercle $|z| < 1$, et $f_1(z)$ une fonction régulière dans le même cercle, dont la série de Taylor est sommable (C, k) au point $z = 1$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(k)}$ existe. Alors la série déterminée par la relation

$$(1.11) \quad f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(\zeta_0) z^{\nu}$$

est sommable $(C, k + \delta)$ au point $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(k+\delta)}$ existe aussi, et

$$(1.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(k+\delta)}.$$

À vrai dire il suffirait de démontrer le théorème 1 pour $\delta = \frac{1}{2}$, lequel serait déjà une conséquence du théorème d'inclusion pour $\delta > \frac{1}{2}$. Mais des raisons diverses nous ont amenées à garder dans l'énoncé du théorème 1 la notation $\delta \geq \frac{1}{2}$. Tout d'abord la démonstration du théorème 1 pour $\delta > \frac{1}{2}$ s'effectue à l'aide d'une méthode analogue à celle que nous avons appliquée dans la partie II ([3], § 4, où k est un entier non négatif et $\delta = 1$), tandis que pour $\delta = \frac{1}{2}$ la démonstration du théorème 1 exige des considérations nouvelles et plus délicates. En outre la démonstration du théorème 1 pour $\delta > \frac{1}{2}$ nous fournira certains lemmes nécessaires pour mener à bien la démonstration dans le cas de $\delta = \frac{1}{2}$. Au cours de la démonstration, nous supposerons de plus que $\delta \leq 1$, ce qui simplifie nos raisonnements, mais n'introduit aucune restriction vu le théorème d'inclusion.

On obtient un cas particulier important du théorème 1 pour $k = 0$:

Corollaire. La convergence de la série (1.7) implique toujours la sommabilité $\left(C, \frac{1}{2}\right)$ de la série (1.8) et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(1/2)}.$$

Au cas où $\delta < \frac{1}{2}$ nous obtenons un résultat de sens inverse.

Théorème 2. Soient $k \geq 0$, $\delta < \frac{1}{2}$ deux nombres donnés, $\zeta_0 \neq 0$ un point fixe dans le cercle $|z| < 1$. Alors on peut trouver des fonctions $f_1(z)$

régulières dans le cercle-unité, dont la série de Taylor est sommable (C, k) au point $z = 1$, autrement dit $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(k)}$ existe, mais la série déterminée par la relation

(1.11) *n'est pas sommable $(C, k + \delta)$ au point $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(k+\delta)}$ n'existe pas.*

La démonstration se simplifie en supposant $\delta > 0$ mais en raison du théorème d'inclusion ce n'est qu'une restriction apparente.

Pour $k = 0$ le théorème 2 représente une amélioration du théorème de M. TURÁN. En effet, le théorème 2 exprime que ce n'est pas seulement la convergence de la série (1.8) qui n'est pas assurée par la convergence de la série (1.7), mais celle-ci n'implique même pas la sommabilité $(C, k + \delta)$ de la première série si $\delta < \frac{1}{2}$.

L'idée de la démonstration est d'établir entre les $\alpha_n^{(k)}$ et les $\beta_n^{(k+\delta)}$ une relation de la forme

$$(1.13) \quad \beta_n^{(k+\delta)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0) \alpha_\nu^{(k)}$$

où les $\gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$ sont indépendants du choix particulier de $f_1(z)$ et ne dépendent que de ζ_0 , k , δ , n et ν . La relation (1.13) définit un procédé de sommation linéaire, et son examen est l'objet essentiel de nos investigations. Il sera établi que ce procédé n'est pas régulier pour $\delta < \frac{1}{2}$, tandis que pour $\delta \geq \frac{1}{2}$ les conditions de la régularité de Toeplitz—Schur sont réalisées:

I. $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 0$ pour chaque ν fixé;

II. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 1$;

III. il existe une constante $K^{(k,\delta)} > 0$ telle que l'inégalité

$$(1.14) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0)| < K^{(k,\delta)}$$

est vérifiée indépendamment de n .

On verra que les conditions I et II sont remplies pour tous les $\delta \geq 0$. C'est l'examen de la condition III, donc l'évaluation de la série (1.14), qui offre les difficultés principales. Pour $\delta > \frac{1}{2}$ l'existence de la constante $K^{(k,\delta)}$ sera démontrée en suivant une voie analogue à celle de la partie II ([3], § 4). Mais cette méthode devient inefficace pour $\delta = \frac{1}{2}$ ou $\delta < \frac{1}{2}$. On étudiera dans ces cas la condition III en utilisant un autre procédé. Notamment l'expression asymptotique de $\gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$ sera représentée par une intégrale de la forme

$$\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) \approx g_{nv} = \frac{c_n^{(k+\delta)}}{2\pi i} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \int_{L_{nv}} \frac{(1+\bar{\zeta}_0\omega)^{k+\delta} \omega^\nu}{(1-\omega)^\delta (\omega+\zeta_0)} \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0\omega}{\omega+\zeta_0}\right)^n d\omega$$

où $c_n^{(k+\delta)}$ est une constante et le contour d'intégration L_{nv} une courbe fermée entourant le pôle $\omega = -\zeta_0$. Nous devons déterminer la valeur de g_{nv} pour un n assez grand, mais fixé et pour chaque ν . La structure de cette intégrale suggère l'idée de recourir à la méthode du col. Toutefois l'emploi direct de cette méthode se heurte actuellement à certains obstacles que nous voudrions brièvement décrire.

Les oeuvres traitant des expressions asymptotiques des intégrales dépendant de deux ou plusieurs paramètres n'embrassent pas des problèmes très variés. Elles se rapportent essentiellement aux recherches des fonctions de Bessel, lorsque l'argument et l'ordre de ces fonctions tendent simultanément vers l'infini ([6], pp. 225—270). Le procédé consiste à tenir constant le quotient de ces deux paramètres (tout en discutant les trois cas où ce rapport est supérieur, égal ou inférieur à 1) et à obtenir par là un col et un contour d'intégration invariable dans chaque cas donné. Le problème à deux paramètres se réduit ainsi à un problème à un paramètre.

MM. W. FULKS [7] et D. L. THOMSEN JR. [8] ont élaboré certaines généralisations de la méthode de Laplace pour déterminer les valeurs asymptotiques d'intégrales réelles dépendant de deux resp. de trois paramètres. M. FULKS considère les intégrales de la forme

$$J_{h,k} = \int_0^b f(t) e^{-h\Phi(t)+k\Psi(t)} dt$$

où b est une constante, $h, k \rightarrow \infty$ sont des paramètres. M. THOMSEN envisage les intégrales du type

$$J_{h,k,a} = \int_0^a f(t) e^{-h\Phi(t)+k\Psi(t)} dt$$

qui diffèrent des précédentes par le fait que $a \rightarrow 0$ est aussi un paramètre. Les hypothèses communes qu'ils adoptent tous les deux sont les suivantes: le rapport h/k n'est pas constant, mais $h \gg k$; $\Phi(t), \Psi(t), f(t)$ sont indépendantes des paramètres et ainsi, en supposant de plus que $\Phi(0) = 0, \Phi'(0) = 0, \Phi''(0) > 0, \Psi(0) = 0$, les valeurs asymptotiques des $J_{h,k}$ et $J_{h,k,a}$ sont toujours fournies par les contributions des intégrales prises dans le voisinage de l'origine.

Il convient de signaler encore l'ouvrage intéressant de M. A. BÉKÉSSY [9] qui étudie, à l'aide de la méthode de Laplace, le comportement asymptotique de l'intégrale suivante:

$$p_n(k|j) = \binom{k-2}{j-2} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty u^{n-1} e^{-ju} (1-e^{-u})^{k-j} du$$

où $j, k, n \rightarrow \infty$ sont des paramètres ($p_n(k|j)$ signifie une probabilité conditionnelle). Pour pouvoir appliquer la méthode de Laplace, l'auteur distingue quatre éventualités possibles dont chacune s'exprime par une relation entre les para-

mètres, et en conséquence il remplace la fonction à intégrer par une expression nouvelle où les paramètres ne figurent pas seulement comme exposants. C'est ainsi que la valeur asymptotique de $p_n(k|j)$ est donnée par une intégrale prise dans le voisinage d'un point qui varie avec les paramètres et de même l'intervalle de l'intégration change aussi bien sa place que sa longueur.

Cependant dans les cas énumérés il s'agissait toujours de la valeur asymptotique d'intégrales considérées en elles-mêmes sans tenir compte de leurs relations avec d'autres expressions analogues. C'est pourquoi une relation entre les paramètres une fois adoptée, qui introduit certaines complications dans les calculs, le col et la voie d'intégration ou bien sont restés invariables, ou bien leur changement avec les paramètres n'a pas eu une importance particulière, malgré la discussion inévitable de certaines possibilités. Par contre nous envisageons une somme dont chaque terme est représenté par une intégrale et la détermination de la valeur asymptotique de chacune de ces intégrales s'effectue au moyen des cols et d'un contour d'intégration qui varient d'une intégrale à l'autre. Cette circonstance est la conséquence de la structure particulière de la fonction à intégrer qui figure dans l'expression de g_{nv} . On sait que les cols doivent être cherchés parmi les racines de l'équation

$\left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0}\right)' = 0$, mais cette équation n'a pas de racines finies. Cet obstacle

s'élimine en introduisant le paramètre $\lambda = \frac{\nu}{n}$, et en envisageant par la suite

la fonction $\left(\omega^\lambda \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0}\right)^n$ au lieu de $\left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0}\right)^n$. L'équation $\left(\omega^\lambda \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0}\right)' = 0$

a déjà deux racines finies, mais qui dépendent de λ et par suite les cols et les contours d'intégration varient avec λ . Dans notre cas, le contour d'intégration doit passer par tous les deux cols correspondants et de cette façon on obtient $|g_{nv}|$, pour chaque ν , comme la somme de deux expressions asymptotiques qui est suffisamment petite pour que $\sum_{\nu=0}^{\infty} |g_{nv}|$ soit uniformément bornée

en n si $\delta = \frac{1}{2}$; et cette somme est assez grande pour que $\sum_{\nu=0}^{\infty} |g_{nv}|$ dépasse

toute limite avec n si $\delta < \frac{1}{2}$. Pour certaines valeurs de λ les deux cols se

rapprochent arbitrairement l'un de l'autre, tandis que pour d'autres valeurs de λ un des cols au moins se trouve dans le voisinage du point $\omega = 1$ et la fonction à intégrer ne reste pas bornée. Nous avons à discuter à plusieurs reprises séparément les cas où ζ_0 est réel et ceux où ζ_0 est complexe. Enfin puisque nous examinons la somme des valeurs asymptotiques, il ne suffit pas de déterminer la partie principale du développement asymptotique de chaque intégrale, mais il faut aussi évaluer la somme des restes.

La régularité du procédé de sommation (1.13) et la formule (1.12) seront ainsi vérifiées pour $\delta \geq \frac{1}{2}$ et le théorème 1 sera démontré.

On trouvera de cette manière pour $\delta < \frac{1}{2}$ que la condition III de la régularité n'est pas réalisée pour le procédé de sommation (1.13). Par conséquent

il existe des suites convergentes qui se transforment en suites divergentes par la matrice $[\gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0)]$. Soit $\{\alpha_n^*\}$ une de ces suites convergentes et $\{\beta_n^*\}$ sa transformée divergente. Alors la fonction

$$\begin{aligned} f_1^*(z) &= (1-z)^{k+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} \alpha_\nu^* z^\nu = \\ (1.15) \quad &= \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \binom{k+1}{\mu} z^\mu \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} \alpha_\nu^* z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu^* z^\nu \end{aligned}$$

est régulière pour $|z| < 1$, où $(1-z)^{k+1}$ est définie par sa détermination principale. Or, la formule (1.15) n'est autre que la relation classique entre les α_ν et les $\alpha_\nu^{(k)}$. Posons donc $\alpha_\nu^* = \alpha_\nu^{(k)}$, $\alpha_\nu^* = \alpha_\nu$, alors $f_1^*(z)$ est la fonction $f_1(z)$ qui vérifie les conditions du théorème 2 et $\beta_n^* = \beta_n^{(k+\delta)}$. Ce qui complète la démonstration du théorème 2.

*

Nous tenons particulièrement à exprimer nos remerciements les plus vifs à M. J. CZIPSZER pour ses précieuses remarques qu'il a apportées en lisant le manuscrit de ce présent ouvrage.

§ 2. Le procédé de sommation

On démontre dans la théorie du procédé de sommation de Cesàro que $\beta_n^{(k+\delta)}$ s'exprime par les $\beta_m^{(k)}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) ([5] p. 101):

$$\begin{aligned} \beta_n^{(k+\delta)} &= \frac{1}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \sum_{m=0}^n \binom{n-m+\delta-1}{\delta-1} \binom{m+k}{k} \beta_m^{(k)} = \\ (2.1) \quad &= \frac{1}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \sum_{m=0}^n \binom{m+\delta-1}{\delta-1} \binom{n-m+k}{k} \beta_{n-m}^{(k)}. \end{aligned}$$

En tenant compte de la formule (1.9)

$$(2.2) \quad \beta_{n-m}^{(k)} = \frac{1}{\binom{n-m+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} p_{n-m,\nu}^{(k)}(\zeta_0) \alpha_\nu^{(k)}.$$

Ainsi il découle des relations (2.1) et (2.2)

$$\begin{aligned} \beta_n^{(k+\delta)} &= \frac{1}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \sum_{m=0}^n \binom{m+\delta-1}{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} p_{n-m,\nu}^{(k)}(\zeta_0) \alpha_\nu^{(k)} = \\ (2.3) \quad &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\binom{m+\delta-1}{m}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \binom{\nu+k}{k} p_{n-m,\nu}^{(k)}(\zeta_0) \alpha_\nu^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0) \alpha_\nu^{(k)} \end{aligned}$$

où $p_{n-m,\nu}^{(k)}(\zeta_0)$ est donné par l'expression (1.10),

et par suite

$$(2.4) \quad \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{\nu+k+\delta}{k+\delta}} \int_{|\omega|=e} \frac{(1+\bar{\zeta}_0\omega)^k}{\omega+\zeta_0} \omega^\nu \sum_{m=0}^n \binom{m+\delta-1}{m} \left| \frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} \frac{1+\bar{\zeta}_0\omega}{\omega+\zeta_0} \right|^{n-m} d\omega.$$

La formule (2.3) représente le procédé de sommation cherché. Nous pouvons constater dans l'expression (2.4) que $\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$ ne dépend pas du choix particulier de $f_1(z)$. La relation (2.4) sera remplacée plus tard par des expressions asymptotiques.

§ 3. Les deux premières conditions de la régularité

La démonstration du théorème I s'effectue en vérifiant que les éléments de la matrice $[\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)]$ donnés par la relation (2.4) remplissent les trois conditions de la régularité de Toeplitz—Schur. En ce qui concerne les conditions I et II nous avons déjà observé dans le § 1 qu'elles sont réalisées non seulement pour $\delta \geq \frac{1}{2}$, mais même pour $\delta \geq 0$. Nous admettrons donc dans ce § que $k \geq 0, \delta \geq 0$.

La vérification des conditions I et II se base sur des choix particuliers de $f_1(z)$, ce qui est permis, puisque d'après (2.4) les $\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$ sont les mêmes quelle que soit $f_1(z)$ régulière dans le cercle $|z| < 1$.

I. $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 0$ pour chaque ν fixé.

Démonstration. Soit

$$(3.1) \quad f_1(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu z^\mu$$

une fonction régulière dans le cercle-unité telle que $\alpha_\lambda^{(k)} = 0$ si $\lambda \neq \nu$, et $\alpha_\nu^{(k)} = 1$. Selon cette hypothèse et la relation (1.15), on a

$$(3.2) \quad f_1(z) = (1-z)^{k+1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \binom{\lambda+k}{k} \alpha_\lambda^{(k)} z^\lambda = \binom{\nu+k}{k} z^\nu (1-z)^{k+1}.$$

On lira de (3.2) que $a_\mu = 0$ si $\mu < \nu$ et

$$(3.3) \quad f_1(1) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha_\lambda^{(k)} = 0.$$

D'autre part en vertu de la définition (1.1) de $f_2(z)$ on peut écrire

$$(3.4) \quad \begin{aligned} f_2(z) &= \binom{\nu+k}{k} \frac{(z-\zeta_0)^p}{(1-\bar{\zeta}_0 z)} \left[\frac{1+\zeta_0-(1+\bar{\zeta}_0)z}{1-\bar{\zeta}_0 z} \right]^{k+1} = \\ &= (1+\zeta_0)^{k+1} \frac{(z-\zeta_0)^p}{(1-\bar{\zeta}_0 z)^{p+k+1}} \binom{\nu+k}{k} \left(1 - \frac{1+\bar{\zeta}_0}{1+\zeta_0} z \right)^{k+1} \end{aligned}$$

et par suite

$$(3.5) \quad f_2 \left(\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0} \right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\mu}(\zeta_0) \left(\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0} \right)^{\mu} = 0.$$

Or, $k + \delta \geq 0$, on tire donc de la relation (3.5) que

$$(3.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(k+\delta)} = 0.$$

Exprimons maintenant $\beta_n^{(k+\delta)}$ au moyen de la formule (2.3), en tenant compte du choix particulier des $\alpha_{\lambda}^{(k)}$

$$(3.7) \quad \beta_n^{(k+\delta)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \gamma_{n\lambda}^{(k,\delta)}(\zeta_0) \alpha_{\lambda}^{(k)} = \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0),$$

et ainsi de (3.6) et (3.7)

$$(3.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 0.$$

v étant arbitraire, la relation (3.8) est valable pour tous les $v \geq 0$ entiers. La condition I est donc réalisée.

$$\text{II. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 1.$$

Démonstration. Soit maintenant $f_1(z) = 1$. Alors

$$\alpha_v^{(k)} = 1 \quad (v = 0, 1, 2, \dots); \quad f_2(z) \equiv 1, \quad \beta_n^{(k+\delta)} = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

et par l'expression (2.3)

$$(3.9) \quad \beta_n^{(k+\delta)} = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) \alpha_v^{(k)} = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 1.$$

Par conséquent la condition II est réalisée.

§ 4. Expression asymptotique de $\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$

L'expression (2.4) de $\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$ n'est pas appropriée aux calculs. Pour cette raison nous cherchons à la remplacer par une formule asymptotique plus adéquate. Soit à nouveau $r < |\omega| = \varrho < 1$ et

$$\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0} \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} = \frac{1}{y},$$

donc $\max_{|\omega|=\varrho} |y| = y_0 < 1$. On écrira ainsi

$$(4.1) \quad \sum_{m=0}^n \binom{m + \delta - 1}{m} \frac{1}{y^{n-m}} = \frac{1}{y^n} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m + \delta - 1}{\delta - 1} y^m - \sum_{m=n+1}^{\infty} \binom{m + \delta - 1}{\delta - 1} y^m \right] = \\ = \frac{1}{y^n (1 - y)^{\delta}} - y \sum_{m=n+1}^{\infty} \binom{m + \delta - 1}{\delta - 1} y^{m-(n+1)} = A_n - B_n,$$

d'où en vertu de (2.4)

$$(4.2) \quad \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = \frac{c^{(k)}}{2\pi i} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \left[\int_{|\omega|=\rho} \frac{(1+\bar{\zeta}_0\omega)^k \omega^\nu}{\omega+\zeta_0} A_n d\omega - \int_{|\omega|=\rho} \frac{(1+\bar{\zeta}_0\omega)^k \omega^\nu}{\omega+\zeta_0} B_n d\omega \right] = g_{nv} - g'_{nv}$$

où

$$(4.3) \quad c^{(k)} = \frac{(1+\zeta_0)^{k+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^k}$$

Nous allons vérifier que

$$(4.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |g'_{nv}| = 0.$$

g_{nv} peut donc être considéré comme l'expression asymptotique de $\gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$ dans l'évaluation de la série (1.14).

D'après les formules (4.1) et (4.2):

$$(4.5) \quad |g'_{nv}| \leq |c^{(k)}| \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \frac{\rho^{\nu+1}}{\rho-r} (1+r\rho)^k \sum_{m=n+1}^{\infty} \binom{m+\delta-1}{\delta-1} y_0^{m-(n+1)}.$$

Or, les relations suivantes sont valables pour les grandes valeurs de n , en supposant de plus que $m \geq n+1$ et $0 < \delta \leq 1$:

$$(4.6) \quad \binom{n+k+\delta}{k+\delta} = O(n^{k+\delta}), \quad \binom{m+\delta-1}{\delta-1} = O(m^{\delta-1}) = O(n^{\delta-1}).$$

Il s'ensuit par (4.5) que

$$(4.7) \quad |g'_{nv}| = O(n^{-k-\delta}) \binom{\nu+k}{k} \rho^{\nu+1} O(n^{\delta-1}) \sum_{m=n+1}^{\infty} y_0^{m-(n+1)} = O(n^{-k-1}) \binom{\nu+k}{k} \rho^{\nu+1}.$$

Par conséquent

$$(4.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g'_{nv} = 0,$$

et en vertu de (4.2) et (4.8)

$$(4.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{nv}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{nv}.$$

Mais l'expression (4.7) permet d'en tirer de plus que

$$(4.10) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |g'_{nv}| = O(n^{-k-1}) \frac{\rho}{(1-\rho)^{k+1}}$$

et il en découle déjà (4.4). Il résulte de (4.2) et (4.10) que

$$(4.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |g_{n\nu}|.$$

Il suffira donc d'examiner le membre droit de l'égalité (4.11).

Pour terminer ce §, écrivons encore $g_{n\nu}$ dans sa forme explicite:

$$(4.12) \quad g_{n\nu} = \frac{c_n^{(k+\delta)} \binom{\nu+k}{k}}{2\pi i \binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \int_{|\omega|=e} \frac{(1+\bar{\zeta}_0\omega)^{k+\delta-1} \omega^\nu}{(1-\omega)^\delta} \left(\frac{1+\bar{\zeta}_0\omega}{\omega+\zeta_0} \right)^{n+1} d\omega,$$

où

$$c_n^{(k+\delta)} = \frac{(1+\zeta_0)^{k+\delta+1}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+\delta}} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} \right)^n.$$

L'expression (4.12) peut prendre aussi la forme

$$(4.13) \quad g_{n\nu} = \frac{C_\delta \binom{\nu+k}{k}}{2\pi i \binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \int_{|\omega|=e} \frac{(1+\bar{\zeta}_0\omega)^{k+\delta-1} \omega^\nu}{(1-\omega)^\delta} \left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0} \frac{1+\bar{\zeta}_0\omega}{\omega+\zeta_0} \right)^{n+1} d\omega,$$

avec

$$C_\delta = \frac{(1+\zeta_0)^{k+\delta}}{(1-|\zeta_0|^2)^{k+\delta}} (1+\bar{\zeta}_0)$$

Nous aurons besoin de toutes les deux expressions de $g_{n\nu}$.

§ 5. Cas de $\delta > \frac{1}{2}$

Nous avons déjà remarqué que pour $\delta > \frac{1}{2}$ la démonstration du théorème 1 peut se faire d'une manière analogue à celle donnée dans la partie II ([3], § 4). Pour cette fin il nous faut démontrer le lemme suivant:

Lemme 1. Soient n un entier positif et $0 \leq \delta \leq 1$ un nombre donné. Alors

$$(5.1) \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin^{2\delta} t} dt = \begin{cases} O(n^{2\delta-1}) & \text{si } \delta > \frac{1}{2} \\ O(\log n) & \text{si } \delta = \frac{1}{2} \\ O(1) & \text{si } \delta < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Démonstration. Pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, on a $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ et par suite

$$(5.2) \quad J \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\delta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{t^{2\delta}} dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\delta} I,$$

autrement dit $J = O(I)$. Il est évident que pour $\delta \neq \frac{1}{2}$

$$(5.3) \quad I \leq n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} t^{2-2\delta} dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^{2\delta}} = O(n^{2\delta-1}) + O(1).$$

Ce qui revient à dire que $I = O(n^{2\delta-1})$ pour $\delta > \frac{1}{2}$, et $I = O(1)$ pour $\delta < \frac{1}{2}$.

Si $\delta = \frac{1}{2}$ la relation (5.3) doit être remplacée par la suivante

$$I \leq O(1) + \log n.$$

Les relations (5.1) sont ainsi démontrées.

Démonstration du théorème 1 pour $\delta > \frac{1}{2}$. Il faut encore prouver que la condition III de la régularité est réalisée, c'est-à-dire que la constante $K^{(k,\delta)}$ qui figure dans l'inégalité (1.14) existe, mais cette dernière relation doit être remplacée par

$$(5.4) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |g_{n\nu}| < K^{(k,\delta)}.$$

Décomposons en deux parties la série qui intervient dans (5.4):

$$(5.5) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |g_{n\nu}| = \sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |g_{n\nu}| + \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |g_{n\nu}|,$$

où

$$(5.6) \quad \nu_0 = \lambda_0 n$$

et λ_0 est une quantité positive qui sera fixée avec n par la suite. On démontrera l'existence de deux constantes $K_1^{(k,\delta)}$ et $K_2^{(k,\delta)}$ indépendantes de n pour lesquelles les inégalités

$$(5.7) \quad S_1 \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |g_{n\nu}| < K_1^{(k,\delta)}, \quad S_2 \equiv \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |g_{n\nu}| < K_2^{(k,\delta)}$$

sont vérifiées quel que soit n .

On discutera d'abord la seconde inégalité (5.7) qui est réalisée pour chaque $\delta > 0$ intervenant. C'est seulement après que nous pourrons limiter S_1 .

1° *Évaluation de S_2* . En tenant compte de l'expression (4.12) de g_m et du fait que

$$\max_{|\omega|=\varrho} |1 + \bar{\zeta}_0 \omega| = 1 + r\varrho, \quad \max_{|\omega|=\varrho} |1 - \omega|^{-\delta} = (1 - \varrho)^{-\delta},$$

$$\max_{|\omega|=\varrho} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right| = \frac{1 - r\varrho}{\varrho - r} > 1,$$

on a

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \frac{|c_n^{(k+\delta)}|}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \frac{(1+r\varrho)^{k+\delta-1} (1-r\varrho)^{n+1}}{(1-\varrho)^\delta (\varrho-r)^{n+1}} \varrho \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \binom{\nu+k}{k} \varrho^\nu = \\ (5.8) \quad &= O(1) \frac{\binom{\nu_0+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \frac{\varrho^{\nu_0}}{(1-\varrho)^\delta} \left(\frac{1-r\varrho}{\varrho-r} \right)^{n+1} \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \binom{\nu-\nu_0+k}{k} \varrho^{\nu-\nu_0} = \\ &= O(1) \frac{\binom{\nu_0+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \frac{1}{(1-\varrho)^{k+\delta+1}} \left(\varrho^{\lambda_0} \frac{1-r\varrho}{\varrho-r} \right)^n \end{aligned}$$

où l'on a pris en considération la relation (5.6) et l'inégalité évidente

$$(5.9) \quad \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \leq \binom{\nu-\nu_0+k}{k} \quad (\nu \geq \nu_0, k \geq 0).$$

Si λ_0 est choisi de telle façon qu'il puisse être enfermé dans un intervalle de longueur finie et dont les extrémités sont indépendantes de n , il vient

$$(5.10) \quad \binom{\nu_0+k}{k} \binom{n+k+\delta}{k+\delta}^{-1} = O(n^{-\delta}).$$

Il suffirait donc de prendre

$$(5.11) \quad \lambda_0 = 1 + \left[\frac{\log \frac{\varrho-r}{1-r\varrho}}{\log \varrho} \right] \geq 2,$$

comme nous l'avons fait dans la partie II ([3], (4.13)) ($[x]$ désigne la partie entière de x), pour que l'inégalité

$$(5.12) \quad \varrho^{\lambda_0} \frac{1-r\varrho}{\varrho-r} \leq 1$$

soit vérifiée, et l'existence de $K_2^{(k,\delta)}$ serait ainsi prouvée. Mais ayant en vue des considérations ultérieures nous cherchons à trouver pour λ_0 une valeur inférieure à celle fournie par la formule (5.11). Pour cette raison on choisit ϱ d'une manière particulière et l'on pose pour n suffisamment élevé $\varrho = 1 - n^{-\varepsilon}$, avec

$$(5.13) \quad \varepsilon = \frac{\delta}{k + \delta + 1}.$$

Ainsi, de la formule (5.10) on tire

$$(5.14) \quad \frac{\binom{\nu_0 + k}{k}}{\binom{n + k + \delta}{k + \delta} (1 - \varrho)^{k + \delta + 1}} = O(1).$$

D'autre part si la relation (5.12) est vérifiée on peut écrire

$$(5.15) \quad \lambda_0 \geq \frac{\log \frac{1 - r \varrho}{\varrho - r}}{-\log \varrho}.$$

Posons $\varrho = 1 - h$, où $0 < h < 1 - r$. Alors $-\log \varrho < h$ et

$$(5.16) \quad \begin{aligned} \frac{\log \frac{1 - r \varrho}{\varrho - r}}{-\log \varrho} &< \frac{1 + r}{1 - r} + h \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1 - (-r)^m}{(1 - r)^m} h^{m-2} < \\ &< \frac{1 + r}{1 - r} + \frac{1 + r}{(1 - r)^2} h \left\{ 1 - \log \left(1 - \frac{h}{1 - r} \right) \right\}. \end{aligned}$$

$-\log \left(1 - \frac{h}{1 - r} \right)$ croît avec h ; si $h = n^{-\varepsilon} < \frac{1}{2} (1 - r)$, on a

$-\log \left(1 - \frac{h}{1 - r} \right) < \log 2$. En prenant

$$(5.17) \quad \lambda_0 > \frac{1 + r}{1 - r} + \frac{1 + r}{(1 - r)^2} (1 + \log 2) n^{-\varepsilon} = \frac{1 + r}{1 - r} + H n^{-\varepsilon},$$

les inégalités (5.12) et (5.15) seront satisfaites. Soit donc λ_0 le plus petit des nombres de la forme $\frac{\nu}{n}$ vérifiant la relation (5.17) (n étant supposé fixé),

à savoir

$$(5.18) \quad \lambda_0 = \frac{1}{n} \left[n \left(\frac{1 + r}{1 - r} + H n^{-\varepsilon} \right) \right] + \frac{1}{n},$$

et ainsi selon (5.6)

$$(5.19) \quad \nu_0 = \left[n \left(\frac{1 + r}{1 - r} + H n^{-\varepsilon} \right) \right] + 1.$$

Considérant les relations (5.8), (5.12) et (5.14) on peut constater que

$$(5.20) \quad S_2 = O(1)$$

et la seconde inégalité (5.7) est vérifiée.

2° *Évaluation de S_1* . La fonction $(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k+\delta-1} \omega^\nu (1 - \omega)^{-\delta}$ étant régulière dans le cercle $|\omega| = \varrho < 1$, l'expression (4.13) de g_{nv} peut être remplacée par la suivante:

$$(5.21) \quad g_{nv} = \frac{C_\delta}{2\pi i} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \int_{|\omega|=\varrho} \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k+\delta-1} \omega^\nu}{(1 - \omega)^\delta} \left[\frac{1 + \bar{\zeta}_0}{1 + \bar{\zeta}_0} \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right]^{n+1} - 1 \Big] d\omega.$$

L'intégrale (5.21) garde évidemment son sens même pour $\varrho = 1$, c'est-à-dire pour $\omega = e^{i\varphi}$, en conséquence

$$(5.22) \quad |g_{nv}| = |C_\delta| \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} \omega^\nu h_{\delta n}(\omega) d\omega \right| \stackrel{\text{def}}{=} |C_\delta| \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} |g_v^{(n)}|$$

où

$$(5.23) \quad h_{\delta n}(\omega) = \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k+\delta-1}}{(1 - \omega)^\delta} \left[\frac{1 + \bar{\zeta}_0}{1 + \bar{\zeta}_0} \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right]^{n+1} - 1 \Big].$$

On remarque que les $g_v^{(n)}$ définis par la relation (5.22) sont les coefficients de Fourier de $h_{\delta n}(\omega)$.

L'inégalité de Cauchy appliquée à la somme $\sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |g_{nv}|$, de plus vu que $\binom{\nu+k}{k} < \binom{\nu_0+k}{k}$ pour $\nu < \nu_0$, on obtient

$$(5.24) \quad \left(\sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |g_{nv}| \right)^2 \leq \nu_0 \sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |g_{nv}|^2 \leq |C_\delta|^2 \lambda_0 n \frac{\binom{\nu_0+k}{k}^2}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}^2} \sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |g_v^{(n)}|^2.$$

En vertu de l'inégalité de Bessel

$$(5.25) \quad \sum_{\nu=0}^{\nu_0-1} |g_v^{(n)}|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_{\delta n}(e^{i\varphi})|^2 d\varphi.$$

Introduisons ensuite la notation employée dans la partie II ([3], (4.22)):

$$\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0} = e^{-i\theta_0}, \quad \frac{1 + \bar{\zeta}_0 e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} + \zeta_0} = e^{i\theta},$$

donc

$$e^{i\varphi} = \frac{1 - \zeta_0 e^{i\theta}}{e^{i\theta} - \bar{\zeta}_0}, \quad \frac{1}{1 - e^{i\varphi}} = \frac{1}{1 + \bar{\zeta}_0} \frac{e^{i\theta} \bar{\zeta}_0}{e^{i(\theta-\theta_0)} - 1}, \quad d\varphi = -\frac{(1-r^2) d\theta}{|e^{i\theta} - \zeta_0|^2}.$$

On en conclut que

$$\begin{aligned} |h_{\delta n}(e^{i\varphi})|^2 &\leq \frac{(1+r)^{2(k+\delta-1)}}{|1 + \zeta_0|^{2\delta}} |e^{i\theta} - \bar{\zeta}_0|^{2\delta} \frac{|e^{i(n+1)(\theta-\theta_0)} - 1|^2}{|e^{i(\theta-\theta_0)} - 1|^{2\delta}} = \\ (5.26) \quad &= \frac{(1+r)^{2(k+\delta-1)}}{|1 + \zeta_0|^{2\delta}} |e^{i\theta} - \bar{\zeta}_0|^{2\delta} \frac{\sin^2(n+1) \frac{\theta - \theta_0}{2}}{\sin^{2\delta} \frac{\theta - \theta_0}{2}}. \end{aligned}$$

De plus $1+r \geq |e^{i\theta} - \bar{\zeta}_0| \geq 1-r$, et ainsi en vertu de la relation (5.26)

$$(5.27) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_{\delta n}(e^{i\varphi})|^2 d\varphi = O(1) \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{\sin^2(n+1) \frac{\theta - \theta_0}{2}}{\sin^{2\delta} \frac{\theta - \theta_0}{2}} d\theta,$$

ou en posant $\theta - \theta_0 = 2t$, on tire de (5.27)

$$(5.28) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_{\delta n}(e^{i\varphi})|^2 d\varphi = O(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+1)t}{\sin^{2\delta} t} dt.$$

Par conséquent, d'après le lemme 1

$$(5.29) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h_{\delta n}(e^{i\varphi})|^2 d\varphi = \begin{cases} O(n^{2\delta-1}) & \text{si } \delta > \frac{1}{2} \\ O(\log n) & \text{si } \delta = \frac{1}{2} \\ O(1) & \text{si } \delta < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Par ailleurs selon la formule (5.10)

$$(5.30) \quad n \binom{v_0 + k}{k}^2 \binom{n + k + \delta}{k + \delta}^{-2} = O(n^{1-2\delta}).$$

Ainsi il découle de (5.29) et de (5.30)

$$(5.31) \quad \frac{n}{2\pi} \frac{\binom{v_0 + k}{k}^2}{\binom{n + k + \delta}{k + \delta}^2} \int_0^{2\pi} |h_{\delta n}(e^{i\varphi})|^2 d\varphi = \begin{cases} O(1) & \text{si } \delta > \frac{1}{2} \\ O(\log n) & \text{si } \delta = \frac{1}{2} \\ O(n^{1-2\delta}) & \text{si } \delta < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

La formule (5.31) de même que les inégalités (5.24) et (5.25) fournissent la preuve que $S_1 = O(1)$ si $\delta > \frac{1}{2}$, et la première inégalité (5.7) est aussi vérifiée. Le théorème 1 est ainsi démontré pour $\delta > \frac{1}{2}$.

En même temps la relation (5.31) met en évidence que cette méthode est inefficace pour évaluer S_1 si $\delta = \frac{1}{2}$ ou $\delta < \frac{1}{2}$. Cependant le lemme 1, aussi bien que l'expression (5.31) éveillent l'idée que le comportement de la somme partielle S_1 varie avec δ et que pour $\delta = \frac{1}{2}$ ou $\delta < \frac{1}{2}$ elle a une allure différente de celle que nous venons de constater dans le cas de $\delta > \frac{1}{2}$. Cette présomption a été vérifiée pour $\delta < \frac{1}{2}$, mais non pour $\delta = \frac{1}{2}$.

On supposera d'ailleurs dans ce qui suit que $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$.

§ 6. Lemmes complémentaires

L'intégrale qui intervient dans l'expression (4.12) de g_{nv} appartient au type dont la valeur asymptotique peut être déterminée pour chaque ν par la méthode du col, n étant supposé fixé et suffisamment élevé. Cette méthode est assez puissante pour dominer le problème en question quelles que soient les valeurs de δ , de n et de ν , mais on rencontre de sérieuses difficultés quant au choix du contour d'intégration adéquat, lequel joue un rôle particulier dans l'application de la méthode. La forme et l'emplacement de ce contour dépend notamment de la quantité $\frac{\nu}{n}$ et les espèces très variées de courbes d'intégration qu'il faudrait considérer quand $\frac{\nu}{n}$ varie exigeraient une discussion géométrique très longue et détaillée. Pour éviter cette complication nous

renoncerons à l'homogénéité de l'exposé et n'aurons recours à la méthode du col que pour des ν satisfaisant à la double inégalité :

$$(6.1) \quad \lambda'_1 = \frac{1-r}{1+r} + \frac{1}{\log n} + \frac{v'_n + 1}{n} \leq \frac{\nu}{n} \leq \frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{\log n} - \frac{v_n + 1}{n} = \lambda_1$$

où v_n et v'_n sont des nombres fixés avec n tels que, λ_1 est le nombre le plus grand de la forme $\frac{\nu}{n}$ et inférieur à $\frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{\log n}$, tandis que λ'_1 est le plus petit des nombres de la même forme et supérieur à $\frac{1-r}{1+r} + \frac{1}{\log n}$. On a donc

$$(6.2) \quad v_n = n \frac{1+r}{1-r} - \frac{n}{\log n} - \left[n \frac{1-r}{1+r} \frac{n}{\log n} \right] \quad (0 \leq v_n < 1),$$

$$v'_n = \left[n \frac{1-r}{1+r} + \frac{n}{\log n} \right] + 1 - \left(n \frac{1-r}{1+r} + \frac{n}{\log n} \right) \quad (0 < v'_n \leq 1).$$

Des relations (6.1) et (6.2) on déduit deux valeurs particulières de ν

$$(6.3) \quad \nu_1 = \lambda_1 n = \left[n \frac{1+r}{1-r} - \frac{n}{\log n} \right] - 1; \quad \nu'_1 = \lambda'_1 n = \left[n \frac{1-r}{1+r} + \frac{n}{\log n} \right] + 2.$$

On démontrera par la méthode du col que $\sum_{\nu=\nu'_1}^{\nu_1} |g_{n\nu}|$ dépasse toute limite si $0 < \delta < \frac{1}{2}$, et qu'elle est bornée si $\delta = \frac{1}{2}$, mais on vérifiera d'abord que les sommes $\sum_{\nu=0}^{\nu'_1-1} |g_{n\nu}|$ et $\sum_{\nu=\nu_1+1}^{\infty} |g_{n\nu}|$ sont bornées pour $\delta = \frac{1}{2}$.

Nous venons de voir que $S_2 = O(1)$ [cf. (5.7) et (5.20)] pour tous les $\delta > 0$. Notre second lemme exprime un résultat analogue.

Lemme 2. Soit $\delta = \frac{1}{2}$. Alors il existe un entier positif $\nu'_0 = \lambda'_0 n < \nu_0$ tel que

$$(6.4) \quad S_3 \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu'_0} |g_{n\nu}| = O(1),$$

où λ'_0 est le plus grand des nombres de la forme $\frac{\nu}{n}$ inférieur ou égal à $\frac{1-r}{1+r}$.

Démonstration. On évaluera $g_{n\nu}$ au moyen de son expression (4.12) en modifiant convenablement la voie d'intégration $|\omega| = \rho$. En raison de la symétrie nous admettons une fois pour toute que $0 \leq \alpha \leq \pi$ (où $\zeta_0 = re^{i\alpha}$). Sous cette réserve, d'après le théorème de Cauchy, le contour d'intégration peut être composé de l'arc a' du cercle c' de centre $\omega = 0$ et de rayon R $\left(1 < R < \frac{1}{r}\right)$, de l'arc a'' du cercle c'' de centre $\omega = 1$ et de rayon n^{-1}

et de deux segments de droites s' et s'' parallèles à l'axe réel (Fig. 1). Le nouveau contour ne contient pas le pôle $\omega = 1$, mais il entoure le pôle $\omega = -\zeta_0$ de la fonction à intégrer. La valeur de R sera précisée sous peu. L'expression de g_{nv} se décompose ainsi en quatre intégrales qu'on désignera par

$$(6.5) \quad g_{nv} = \int_{a'} + \int_{a''} + \int_{s'} + \int_{s''}.$$

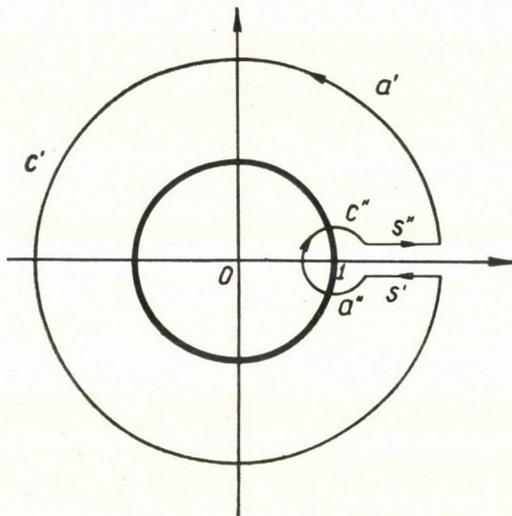


Figure 1

Il est aisé de voir que pour $\nu \leq \nu'_0$ on a

$$(6.6) \quad \left| \int_{a'} \right| \leq |c_n^{(k+\frac{1}{2})}| \frac{\binom{\nu'_0+k}{k}}{\binom{n+k+\frac{1}{2}}{k+\frac{1}{2}}} \frac{(1+rR)^{k+\frac{1}{2}}}{(R-1)^{1/2}(R+r)} R^{\nu+1} \left(\frac{1+rR}{R+r} \right)^n = I_{nv}^{(1)}$$

et

$$(6.7) \quad \sum_{\nu=0}^{\nu'_0} I_{nv}^{(1)} \leq O(1) \frac{\binom{\nu'_0+k}{k}}{\binom{n+k+\frac{1}{2}}{k+\frac{1}{2}}} \frac{1}{(R-1)^{3/2}} \left(R^{\nu'_0} \frac{1+rR}{R+r} \right)^n.$$

Posons actuellement $R = 1 + n^{-\frac{1}{3}}$. Nous obtenons

$$(6.8) \quad \frac{\binom{\nu'_0 + k}{k}}{\binom{n + k + \frac{1}{2}}{k + \frac{1}{2}} (R - 1)^{3/2}} = O(1).$$

Choisissons λ'_0 de façon que la condition

$$(6.9) \quad \left(R^{\lambda'_0} \frac{1 + rR}{R + r} \right)^n = O(1)$$

soit vérifiée. Cela se réalise, avec la valeur adoptée pour R , si $\lambda'_0 \leq \frac{1-r}{1+r}$, vu que

$$(6.10) \quad R^{\frac{1-r}{1+r}} \frac{1 + rR}{R + r} = 1 + A(R - 1)^3 + \dots = 1 + O(n^{-1}) \quad (A > 0)$$

d'où résulte (6.9). λ'_0 est de la forme $\frac{\nu}{n}$, il peut donc être le plus grand nombre de cette forme inférieur ou égal à $\frac{1-r}{1+r}$, à savoir

$$(6.11) \quad \lambda'_0 = \frac{1}{n} \left[n \frac{1-r}{1+r} \right] \text{ et } \nu'_0 = \lambda'_0 n = \left[n \frac{1-r}{1+r} \right].$$

Avec ν'_0 ainsi défini on obtient

$$(6.12) \quad \sum_{\nu=0}^{\nu'_0} I_{n\nu}^{(1)} = O(1)$$

à partir des relations (6.7) (6.8) et (6.9).

Considérons en second lieu l'intégrale prise sur c'' défini par l'expression $\omega = 1 + n^{-1} e^{i\sigma}$ ($0 \leq \sigma \leq 2\pi$). Alors pour des n suffisamment grands on a

$$(6.13) \quad \begin{aligned} \max_{0 \leq \sigma \leq 2\pi} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right| &= 1 + \frac{1 - r^2}{1 + 2r \cos \alpha + r^2} n^{-1} + o(n^{-1}) \leq \\ &\leq 1 + \frac{1+r}{1-r} n^{-1} + o(n^{-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent pour $\nu \leq \nu'_0$

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \left| \int_{a''} \right| &\leq n^{-1} O(n^{-1/2}) (1 + n^{-1})^{\nu'_0 + k + \frac{1}{2}} \frac{n^{1/2}}{1 - n^{-1} - r} \left(1 + \frac{1+r}{1-r} n^{-1} + o(n^{-1}) \right)^n = \\ &= O(n^{-1}) = I_{n\nu}^{(2)} \end{aligned}$$

et

$$(6.15) \quad \sum_{\nu=0}^{\nu'_0} I_{n\nu}^{(2)} = O(1).$$

Il reste à évaluer les intégrales prises sur les segments s' et s'' . Les fonctions

$$\omega^\nu, \quad \left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^{n+1}, \quad (1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k - \frac{1}{2}}$$

prennent sensiblement les mêmes valeurs aux points d'abscisses égales de s' et s'' . Par contre $(1 - \omega)^{1/2}$ admet des valeurs différentes en ces points. En adoptant la détermination principale de $(1 - \omega)^{1/2}$ quand $\omega \in s''$, on aura $e^{i\pi} (1 - \omega)^{1/2}$ le long de s' . Ainsi, puisque $R = 1 + n^{-\frac{1}{3}}$, il vient

$$(6.16) \quad \left| \int_{s'} + \int_{s''} \right| \leq O(n^{-\frac{1}{2}}) \left| \int_{1+n^{-1}}^{1+n^{-\frac{1}{3}}} \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k + \frac{1}{2}} \omega^\nu (1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^n}{(\omega - 1)^{1/2} (\omega + \zeta_0)} d\omega \right| \leq$$

$$\leq O(n^{-\frac{1}{2}}) \frac{[1 + r(1 + n^{-\frac{1}{3}})]^{k + \frac{1}{2}}}{1 - n^{-1} - r} \int_{1+n^{-1}}^{1+n^{-\frac{1}{3}}} \omega^\nu \left(\frac{1 + r\omega}{\omega + r} \right)^n \frac{d\omega}{(\omega - 1)^{1/2}} = I_{n\nu}^{(3)}$$

et

$$(6.17) \quad \sum_{\nu=0}^{\nu'_0} I_{n\nu}^{(3)} = O(n^{-\frac{1}{2}}) \int_{1+n^{-1}}^{1+n^{-\frac{1}{3}}} \frac{\omega^{\nu'_0+1} - 1}{(\omega - 1)^{3/2}} \left(\frac{1 + r\omega}{\omega + r} \right)^n d\omega.$$

La relation (6.9) reste valable pour chaque R de l'intervalle $(1 + n^{-1}, 1 + n^{-\frac{1}{3}})$. Par suite, d'après le choix (6.11) de ν'_0 , on a pour $1 + n^{-1} \leq \omega \leq 1 + n^{-\frac{1}{3}}$

$$(6.18) \quad (\omega^{\nu'_0+1} - 1) \left(\frac{1 + r\omega}{\omega + r} \right)^n = O(1),$$

et l'expression (6.17) peut s'écrire sous la forme

$$(6.19) \quad \sum_{\nu=0}^{\nu'_0} I_{n\nu}^{(3)} = O(n^{-\frac{1}{2}}) \int_{1+n^{-1}}^{1+n^{-\frac{1}{3}}} \frac{d\omega}{(\omega - 1)^{3/2}} = O(n^{-\frac{1}{2}}) \frac{1}{2} (n^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{6}}) = O(1).$$

En vertu des relations (6.5), (6.12), (6.15) et (6.19) la formule (6.4) est vérifiée et le lemme 2 est démontré.

Nous soulignons que le lemme 2 est valable même si $0 < \delta < \frac{1}{2}$. La démonstration subit dans ce cas une légère modification en remplaçant la

définition de λ'_0 par celle de $\lambda'_0 = \frac{1-r}{1+r} - H' n^{-\frac{1}{3}}$, où H' est une constante indépendante de ν et de n , analogue à H de la formule (5.17) et l'on raisonne de la même manière que dans le § 5. La relation (6.9) reste vérifiée, mais il n'existe pas d'expression analogue à (6.10).

Lemme 3. Soient $\delta = \frac{1}{2}$, ν_1 et ν'_1 les entiers définis par les expressions

(6.3). Alors

$$(6.20) \quad S_4 \equiv \sum_{\nu=0}^{\nu'_1-1} |g_{n\nu}| = O(1), \quad S_5 \equiv \sum_{\nu=\nu_1+1}^{\infty} |g_{n\nu}| = O(1).$$

Démonstration. Désignons par ν' et ν'' deux entiers positifs remplissant les conditions suivantes: $\nu' < \nu'' \leq \nu_0$ et $\nu'' - \nu' = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$. Un raisonnement semblable à celui que nous a fourni la formule (5.24) conduit à la relation

$$(6.21) \quad \left(\sum_{\nu=\nu'}^{\nu''} |g_{n\nu}| \right)^2 \leq O\left(\frac{1}{\log n}\right) \sum_{\nu=0}^{\infty} |g_{\nu}^{(n)}|^2,$$

d'où selon les expressions (5.25) et (5.29) on a

$$(6.22) \quad \sum_{\nu=\nu'}^{\nu''} |g_{n\nu}| = O(1).$$

Les entiers $\nu_0, \nu'_0, \nu_1, \nu'_1$ sont définis de manière [cf. (5.19), (6.11), (6.3)] qu'on ait

$$(6.23) \quad \nu_0 - \nu_1 = O\left(\frac{n}{\log n}\right), \quad \nu'_1 - \nu'_0 = O\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

Par conséquent d'après (6.22)

$$(6.24) \quad \sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_0} |g_{n\nu}| = O(1), \quad \sum_{\nu=\nu'_0}^{\nu'_1} |g_{n\nu}| = O(1).$$

En tenant compte de plus que $S_2 = \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} |g_{n\nu}| = O(1)$ pour tous les $\delta > 0$ [cf. (5.20)] et que $S_3 = \sum_{\nu=0}^{\nu'_0} |g_{n\nu}| = O(1)$ pour $\delta = \frac{1}{2}$ [cf. (6.4)], le lemme 3 est démontré.

Lemme 4. Les $|g_{n\nu}|$ sont uniformément bornés en n et ν .

Démonstration. Pour $\delta > \frac{1}{2}$ le lemme est démontré par le théorème 1.

Pour $\delta = \frac{1}{2}$ les relations (5.20) et (6.22) constituent la vérification du lemme.

Il reste le cas où $\delta < \frac{1}{2}$. Si $\nu \geq \nu_0$, la formule (5.20) est valable et pour ces ν le lemme est prouvé. Soient ensuite ν^{III} et ν^{IV} deux entiers positifs tels que

$\nu^{\text{III}} < \nu^{\text{IV}} \leq \nu_0$ et $\nu^{\text{IV}} - \nu^{\text{III}} = O(n^{2\delta})$ et l'on obtient facilement la formule analogue à (6.22):

$$(6.25) \quad \sum_{\nu^{\text{III}}}^{\nu^{\text{IV}}} |g_{n\nu}| = O(1).$$

§ 7. Détermination des cols

Les recherches que nous avons encore à faire se réduisent dès maintenant à l'étude de la somme $\sum_{\nu=\nu'_1}^{\nu_1} |g_{n\nu}|$, quand $\delta = \frac{1}{2}$ et $\delta < \frac{1}{2}$, pour un n fixe et assez grand. Nous cherchons à trouver une expression asymptotique de $g_{n\nu}$ pour chaque ν vérifiant l'inégalité $\nu'_1 \leq \nu \leq \nu_1$. L'intégrale qui figure dans l'expression (4.12) de $g_{n\nu}$ est du type

$$(7.1) \quad J_n = \int_L h(\omega) [F(\omega)]^n d\omega = \int_L h(\omega) e^{nf(\omega)} d\omega,$$

dont la valeur asymptotique peut être déterminée par la méthode du col ([10], pp. 77—93). Les fonctions $F(\omega)$, $f(\omega)$ et $h(\omega)$ sont supposées régulières dans un domaine D du plan complexe ω , où la courbe L est aussi tracée. D'après le théorème de Cauchy L peut être modifiée en D et précisément c'est le choix d'une voie d'intégration convenable qui constitue l'élément essentiel de cette méthode.

La méthode du col consiste à trouver une courbe d'intégration L passant par un point particulier $\omega_1 \in D$ appelé col et jouissant des propriétés suivantes: $|F(\omega)|$ resp. $\text{Re} f(\omega)$ prend son maximum absolu sur L en ω_1 , la contribution de l'intégrale prise sur un arc infiniment petit de L au voisinage de ω_1 fournit la valeur asymptotique de l'intégrale (7.1), tandis que l'intégrale prise sur le reste de L tend vers zéro quand $n \rightarrow \infty$. Il arrive (et c'est notre cas) que L doit passer simultanément par plusieurs cols, soient $\omega_j \in D$ ($j = 1, 2, \dots, p$). La méthode du col reste applicable même dans ces cas, si L peut être partagée en arcs A_j dont chacun ne contient qu'un seul col correspondant ω_j et ω_j a les mêmes propriétés sur A_j que ω_1 sur L dans le cas d'un col unique. La valeur asymptotique de J_n s'exprime alors par la somme des intégrales prises sur les arcs infiniment petits des A_j dans les voisinages des cols ω_j .

Les cols se trouvent parmi les racines de l'équation $f'(\omega) = 0$ (dans le cas que nous traitons les équations $f'(\omega) = 0$ et $f''(\omega) = 0$ n'ont pas de racines communes). Soit ω_1 un col, donc une de ces racines remplissant les conditions mentionnées ci-dessus; alors $\omega_1 \in D$ et $f(\omega)$ est développable en série de Taylor autour de ω_1 :

$$f(\omega) = f(\omega_1) + \frac{1}{2} f''(\omega_1) (\omega - \omega_1)^2 + \dots$$

Considérons ensuite la droite t_1 (appelée aussi l'axe du col ω_1) définie comme le lieu des points ω pour lesquels $f''(\omega_1) (\omega - \omega_1)^2 \leq 0$. t_1 forme l'angle τ_1 avec l'axe réel. La courbe L , si elle existe, fait avec t_1 un angle inférieur en valeur absolue à $\frac{\pi}{4}$. Si cela est possible il est avantageux de choisir L tangente à t_1 ([10], pp. 87—88). Supposons que L existe, qu'elle satisfasse à toutes les

conditions énumérées, même à la dernière, en outre qu'elle ne passe que par le seul col ω_1 et enfin que $f(\omega)$ et $h(\omega)$ soient indépendantes de n . Alors la valeur asymptotique de l'intégrale (7.1) est donnée par la formule

$$(7.2) \quad J_n = h(\omega_1) e^{nf(\omega_1) + i\tau_1} \left(\frac{2\pi}{n|f''(\omega_1)|} \right)^{\frac{1}{2}} \{1 + O(n^{-1})\}$$

([10], p. 88 (5.7.2)).

Cependant des circonstances particulières peuvent se présenter qui exigent de faire passer L simultanément par plusieurs cols ω_j . Désignons par t_j l'axe du col ω_j faisant l'angle τ_j avec l'axe réel, alors la relation (7.2) se substitue par la suivante

$$(7.3) \quad J_n = \sum_{j=1}^p h(\omega_j) e^{nf(\omega_j) + i\tau_j} \left(\frac{2\pi}{n|f''(\omega_j)|} \right)^{\frac{1}{2}} \{1 + O(n^{-1})\}.$$

Il faut souligner que les formules (7.2) et (7.3) doivent être éventuellement modifiées si l'une des quantités $h(\omega_j)$, $f(\omega_j)$ ou $|f''(\omega_j)|$ dépend elle-même de n . Nous aurons l'occasion de tenir compte de cette remarque.

Dans le cas concret c'est l'intégrale

$$(7.4) \quad J_{nv} = \int_L \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k+\delta}}{(1 - \omega)^\delta (\omega + \zeta_0)} \omega^v \left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^n d\omega$$

qui nous intéresse, car pour les ν que nous considérons maintenant: $\nu'_1 \leq \nu \leq \nu_1$ [cf. (6.3)], nous pouvons écrire

$$(7.5) \quad |g_{nv}| = \frac{|c_n^{(k+\delta)}|}{2\pi} \binom{\nu+k}{k} \binom{\nu+k+\delta}{k+\delta} |J_{nv}| = d_{nv} n^{-\delta} |J_{nv}| = O(n^{-\delta}) |J_{nv}|$$

où les d_{nv} sont des nombres positifs ayant des bornes supérieures et inférieures indépendantes de n et de ν . En effet, si $\nu'_1 \leq \nu \leq \nu_1$, il vient

$$\binom{\nu+k}{k} \geq \binom{\nu'_1+k}{k} \approx \frac{\nu_1'^k}{\Gamma(k)} = \frac{\lambda_1'^k n^k}{\Gamma(k)},$$

$$\binom{\nu+k}{k} \leq \binom{\nu_1+k}{k} \approx \frac{\nu_1^k}{\Gamma(k)} = \frac{\lambda_1^k n^k}{\Gamma(k)},$$

$$\binom{n+k+\delta}{k+\delta} \approx \frac{n^{k+\delta}}{\Gamma(k+\delta)}$$

et par suite

$$\frac{\Gamma(k+\delta)}{\Gamma(k)} \lambda_1^k n^{-\delta} \leq \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \leq \frac{\Gamma(k+\delta)}{\Gamma(k)} \lambda_1^k n^{-\delta}.$$

Or, d'après leurs définitions données sous (6.3)

$$(7.6) \quad \frac{1-r}{1+r} < \lambda'_1 < \lambda_1 < \frac{1+r}{1-r}$$

et ainsi

$$(7.7) \quad d = \frac{|c_n^{(k+\delta)}|}{2\pi} \frac{\Gamma(k+\delta)}{\Gamma(k)} \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^k < d_{nv} < \frac{|c_n^{(k+\delta)}|}{2\pi} \frac{\Gamma(k+\delta)}{\Gamma(k)} \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^k.$$

Pour pouvoir appliquer la formule (7.2) ou (7.3) à l'intégrale (7.4) il incombe trois tâches préalables: 1° faire le choix d'une fonction $f(\omega)$ convenable (où $F(\omega) = e^{f(\omega)}$); 2° déterminer et examiner les cols, c'est-à-dire les racines de l'équation $f'(\omega) = 0$; 3° démontrer l'existence de la courbe L réalisant les conditions établies et construire cette courbe. Nous consacrons ce § aux problèmes 1° et 2°.

À première vue on pourrait prendre pour $F(\omega)$ respectivement $f(\omega)$ les fonctions

$$F(\omega) = \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0}, \quad f(\omega) = \log \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0},$$

mais alors l'équation

$$f'(\omega) = \frac{r^2 - 1}{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)(\omega + \zeta_0)} = 0$$

n'aurait pas de racines finies. Il faut donc choisir pour $f(\omega)$ une autre fonction;

À cet effet introduisons la notation $\lambda = \frac{\nu}{n}$ et soit

$$(7.8) \quad f(\omega) = \log \left(\omega^\lambda \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right) = \lambda \log \omega + \log(1 + \bar{\zeta}_0 \omega) - \log(\omega + \zeta_0).$$

$f(\omega)$ est définie en un point initial quelconque par sa détermination principale et suivie par continuité. On a ainsi

$$(7.9) \quad f'(\omega) = \frac{\lambda}{\omega} + \frac{\bar{\zeta}_0}{1 + \bar{\zeta}_0 \omega} - \frac{1}{\omega + \zeta_0} = \frac{\bar{\zeta}_0 \lambda \omega^2 + [(1+r^2)\lambda - (1-r^2)]\omega + \zeta_0 \lambda}{\omega(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)(\omega + \zeta_0)}.$$

L'équation $f'(\omega) = 0$ a déjà des racines finies:

$$(7.10) \quad \omega_{1,2} = \frac{e^{i\alpha}}{2r\lambda} \left\{ -[(1+r^2)\lambda - (1-r^2)] \pm \left[[(1+r^2)\lambda - (1-r^2)]^2 - 4r^2\lambda^2 \right]^{1/2} \right\} = \\ = \frac{e^{i(\alpha+\pi)}}{2r\lambda} \left\{ (1+r^2)\lambda - (1-r^2) \mp i(1-r^2) \left[\left(\frac{1+r}{1-r} - \lambda \right) \left(\lambda - \frac{1-r}{1+r} \right) \right]^{1/2} \right\}.$$

Selon les hypothèses on a $\nu'_1 \leq \nu \leq \nu_1$, donc $\lambda'_1 \leq \lambda \leq \lambda_1$ et d'après l'inégalité (7.6)

$$(7.11) \quad \frac{1-r}{1+r} < \lambda < \frac{1+r}{1-r}.$$

On en conclut par un calcul simple que $|\omega_{1,2}| = 1$ et il est justifié d'écrire

$$(7.12) \quad \frac{1+r^2}{2r} - \frac{1-r^2}{2r\lambda} = \cos \vartheta,$$

$$\frac{1-r^2}{2r\lambda} \left[\left(\frac{1+r}{1-r} - \lambda \right) \left(\lambda - \frac{1-r}{1+r} \right) \right]^{1/2} = \sin \vartheta,$$

où

$$(7.13) \quad \omega_1 = e^{i(\alpha+\pi-\vartheta)}, \quad \omega_2 = e^{i(\alpha+\pi+\vartheta)}.$$

Cette circonstance est très importante, car pour $|\omega| = 1$

$$(7.14) \quad |F(\omega)| = 1 \quad \text{resp.} \quad \operatorname{Re} f(\omega) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(7.15) \quad |F(\omega_1)| = |F(\omega_2)| = 1 \quad \text{resp.} \quad \operatorname{Re} f(\omega_1) = \operatorname{Re} f(\omega_2) = 0.$$

La courbe L doit donc passer par un domaine dans lequel $|F(\omega)| < 1$ resp. $\operatorname{Re} f(\omega) < 0$.

Passons à la détermination de $f''(\omega_1)$ et $f''(\omega_2)$. Il est aisé de vérifier que

$$(7.16) \quad f''(\omega_1) = \lambda \left[\left(\frac{1+r}{1-r} - \lambda \right) \left(\lambda - \frac{1-r}{1+r} \right) \right]^{1/2} e^{-2i\left(\alpha + \frac{3\pi}{4} - \vartheta\right)} = R_1 e^{i\nu_1}$$

et

$$(7.17) \quad f''(\omega_2) = |f''(\omega_1)| e^{-2i\left(\alpha + \frac{5\pi}{4} + \vartheta\right)} = R_1 e^{i\nu_2}.$$

Les relations (7.16) et (7.17) permettent de calculer τ_1 et τ_2 . Du fait que $f''(\omega_1)(\omega - \omega_1)^2$ est réelle et négative on conclut que

$$(7.18) \quad \tau_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi_1}{2} = \alpha + \pi - \vartheta + \frac{\pi}{4},$$

et de même

$$(7.19) \quad \tau_2 = \alpha + \pi + \vartheta + \frac{3\pi}{4}.$$

On constate que $0 < \vartheta < \pi$, car pour $\vartheta = \pi$ on aurait $\omega_1 = \omega_2 = e^{i\alpha}$, $\lambda = \frac{1-r}{1+r}$, et pour $\vartheta = 0$ on aurait $\omega_1 = \omega_2 = e^{i(\alpha+\pi)}$, $\lambda = \frac{1+r}{1-r}$, mais ces cas ont été exclus par la condition (7.11). Quand λ croît de λ'_1 à λ_1 , ω_1 et ω_2 se déplacent chacun sur une demi-circonférence ayant des positions symétriques

par rapport au diamètre d'extrémités $e^{i\alpha}$ et $e^{i(\alpha+\pi)}$ du cercle-unité (Fig. 2). Pourtant λ prend les valeurs λ_1 , λ'_1 et des valeurs très voisines à celles-ci et par conséquent $|f''(\omega_1)|$ devient très petite pour ces valeurs de λ . Cette circonstance doit être prise en considération en appliquant la formule (7.2) ou (7.3) où nous avons affaire à $|f''(\omega_1)|^{-\frac{1}{2}}$ qui devient très grande.

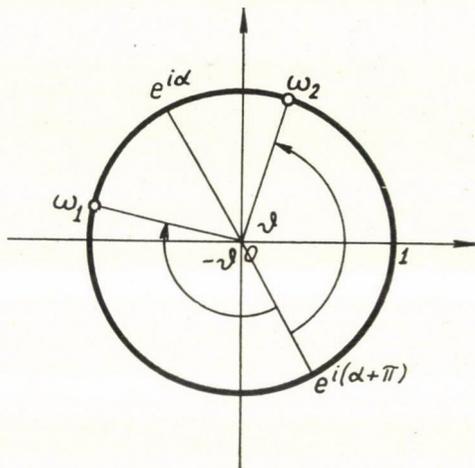


Figure 2

En adoptant la définition de $f(\omega)$ donnée sous (7.8) on peut écrire

$$(7.20) \quad h(\omega) = \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k+\delta}}{(1 - \omega)^\delta (\omega + \zeta_0)}$$

$h(\omega_1)$ et $h(\omega_2)$ n'ont pas de sens, si $\omega_1 = 1$ ou $\omega_2 = 1$, ou bien si $|1 - \omega_1|$ ou $|1 - \omega_2|$ devient infiniment petit. Généralement ces éventualités ne se produisent pas simultanément car c'est seulement l'une des demi-circonférences en question qui contient le point $\omega = 1$, sauf les cas où $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$. Nous nous occuperons dans les §§ suivants de tous ces cas particuliers.

L'expression (7.10) montre que ω_1 et ω_2 sont fonctions de λ et par conséquent la courbe L qui passe au moins par un de ces cols dépend aussi du paramètre λ . Ce fait sera mis en évidence en désignant désormais la courbe d'intégration par L_λ .

Remarque. Ce sont les relations (7.13)—(7.17) qui font ressortir l'importance de la condition (7.11). En effet, si l'inégalité (7.11) était remplacée par $\lambda < \frac{1-r}{1+r}$ ou $\lambda > \frac{1+r}{1-r}$, on aurait $|\omega_{1,2}| \neq 1$ et les expressions qu'on pourrait obtenir pour $\operatorname{Re} f(\omega_1)$, $\operatorname{Re} f(\omega_2)$, $|f''(\omega_1)|$, $|f''(\omega_2)|$ seraient beaucoup moins simples. C'est une des raisons qui explique le choix particulier de ν_1 et ν'_1 respectivement de λ_1 et λ'_1 . On verra en outre que la circonstance que $|\omega_1| = |\omega_2| = 1$ simplifie beaucoup la détermination de la courbe L_λ .

§ 8. Construction de la courbe L_λ

On démontre dans la théorie de la méthode du col que L_λ doit être tracée dans un domaine dont la frontière Γ est déterminée par l'équation

$$(8.1) \quad |F(\omega)| = |F(\omega_1)| \quad \text{ou} \quad \operatorname{Re} f(\omega) = \operatorname{Re} f(\omega_1),$$

le col ω_1 étant en général un point double de Γ , où cette dernière se coupe sous un angle droit ([10], pp. 83—85; [11], pp. 402—406). Les autres racines de l'équation $f'(\omega) = 0$ peuvent avoir la même propriété.¹ De plus Γ est une courbe de niveau qui divise le plan complexe ω en deux domaines D_1 et D_2 tels que

$$(8.2) \quad \begin{aligned} |F(\omega)| < |F(\omega_1)| & \quad \text{ou} \quad \operatorname{Re} f(\omega) < \operatorname{Re} f(\omega_1) & \quad \text{si } \omega \in D_1, \\ |F(\omega)| > |F(\omega_2)| & \quad \text{ou} \quad \operatorname{Re} f(\omega) > \operatorname{Re} f(\omega_2) & \quad \text{si } \omega \in D_2. \end{aligned}$$

Dans notre cas $|\omega_1| = 1$ et $|F(\omega_1)| = 1$, de même $|\omega_2| = 1$ et $|F(\omega_2)| = 1$, donc la courbe Γ déterminée par l'équation (8.1) passe par tous les deux cols: ω_1 et ω_2 . D'autre part, nous avons déjà observé que l'équation $|F(\omega)| = 1$ est vérifiée en tous les points de la circonférence $|\omega| = 1$ qui appartient ainsi à la courbe Γ . Mais Γ doit contenir également d'autres points que ceux de cette circonférence, puisque ω_1 et ω_2 sont les points doubles de Γ où elle se coupe sous des angles droits. On en conclut que Γ se décompose en deux parties distinctes: l'une la circonférence $|\omega| = 1$, que l'on désignera par Γ_1 , et l'autre que l'on appellera Γ_2 . Les points de Γ_2 sont de toute évidence à distance finie et en raisonnant sur la forme polaire de l'équation $|F(\omega)| = 1$ avec $\omega = \rho e^{i\varphi}$:

$$|F(\omega)| = \rho^2 \left[\frac{r^2 \rho^2 + 2 r \rho \cos(\varphi - \alpha) + 1}{\rho^2 + 2 r \rho \cos(\varphi - \alpha) + r^2} \right]^{1/2} = 1,$$

on entrevoit facilement que Γ_2 est une courbe fermée et symétrique par rapport à l'axe qui passe par les points $\omega = 0$ et $\omega = -\zeta_0$, de plus que la courbe Γ n'a d'autres branches distinctes que Γ_1 et Γ_2 . Nous ne détaillons pas ces calculs. Les tangentes à Γ en ω_1 et ω_2 sont par conséquent les rayons et les tangentes de Γ_1 qui passent par ces points (Figures 3 et 4). Appelons A_1 resp. A_2 les domaines limités par Γ_1 resp. Γ_2 .

¹ La fonction $F(\omega) = ef(\omega) = \omega^\lambda \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0}$, qui joue un rôle important dans nos recherches, présente une forte analogie avec la fonction

$$ef(s) = \frac{s(1-s)}{1-xs}$$

étudiée par RIEMANN ([11], p. 402) ayant pour but de déterminer la valeur asymptotique de l'intégrale

$$\int_{-1}^1 s^{n+a} (1-s)^{n+b} (1-xs)^{c-n} ds,$$

a, b, c étant des constantes et $n \rightarrow \infty$.

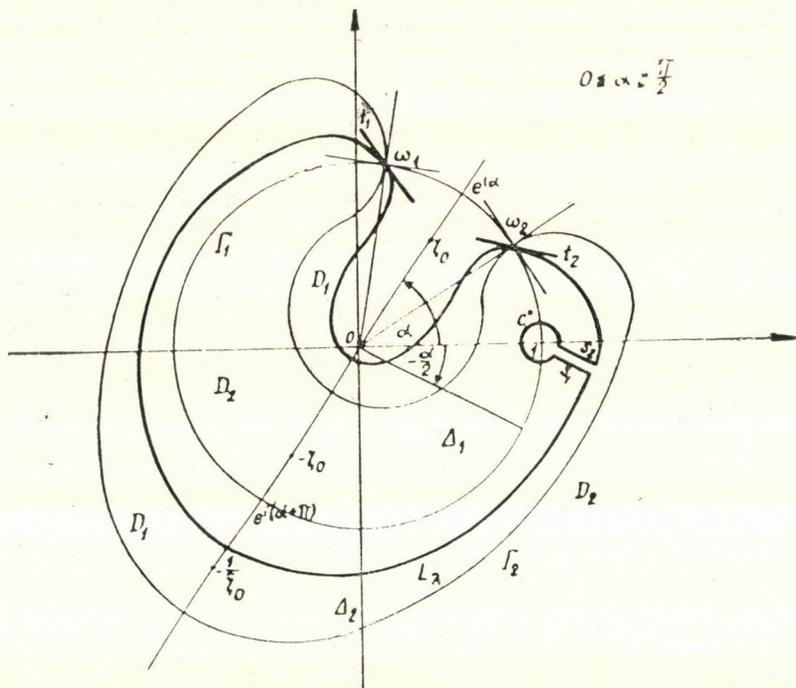


Figure 3

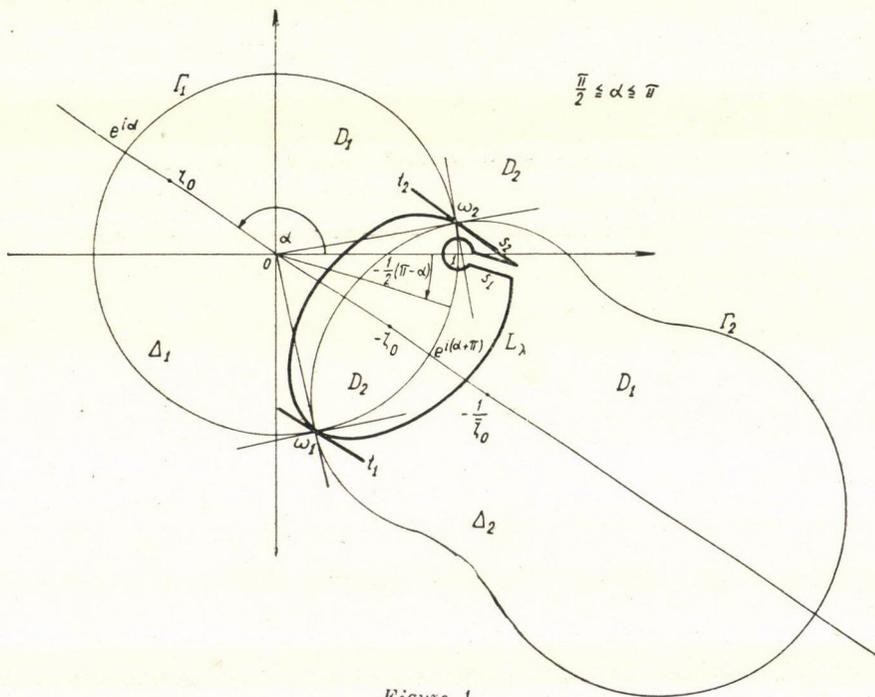


Figure 4

Les relations (8.2) prennent maintenant les formes particulières:

$$(8.3) \quad \begin{aligned} |F(\omega)| < 1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{Re} f(\omega) < 0 & \quad \text{si } \omega \in D_1, \\ |F(\omega)| > 1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{Re} f(\omega) > 0 & \quad \text{si } \omega \in D_2. \end{aligned}$$

Ce qui revient à dire que $[F(\omega)]^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ si $\omega \in D_1$, et que $|F(\omega)|$ atteint son maximum en ω_1 (ou en ω_2) sur chaque courbe tracée en D_1 , mais contenant ω_1 (ou ω_2), point de sa frontière. On sait encore que

$$(8.4) \quad |F(0)| = 0, \quad |F(-\zeta_0)| = \infty, \quad \left| F\left(-\frac{1}{\zeta_0}\right) \right| = 0, \quad |F(\infty)| = \infty,$$

On en tire que

$$(8.5) \quad 0 \in D_1, \quad -\zeta_0 \in D_2, \quad -\frac{1}{\zeta_0} \in D_1, \quad \infty \in D_2.$$

L'arc de Γ_2 qui se trouve dans A_1 sépare donc les points $\omega = 0$ et $\omega = -\zeta_0$; de même l'arc de Γ_1 qui traverse A_2 sépare les points $\omega = -\zeta_0$ et $\omega = -\frac{1}{\zeta_0}$.

Par conséquent $\omega = -\zeta_0$ est un point commun aux domaines A_1 et A_2 . En tenant compte de ces circonstances et des relations (8.5) nous sommes en mesure de donner des définitions exactes des domaines D_1 et D_2 : D_1 est constitué par des points intérieurs non communs à A_1 et A_2 , et D_2 contient les points communs intérieurs et extérieurs à A_1 et A_2 . Ce qui s'exprime par les formules

$$(8.6) \quad D_1 = A_1 \cup A_2 - A_1 \cap A_2, \quad D_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$$

où \bar{A}_1 et \bar{A}_2 désignent les domaines complémentaires de A_1 et A_2 par rapport au plan ω .

Les droites t_1, t_2 et les angles τ_1, τ_2 peuvent aussi être déterminés par des considérations géométriques. t_1 respectivement t_2 est une des bissectrices des tangentes à Γ en ω_1 respectivement ω_2 ([10], p. 84). $\operatorname{Re} f(\omega) \leq 0$ pour les $\omega \in t_1$ (ou $\omega \in t_2$) si $|\omega - \omega_1|$ (ou $|\omega - \omega_2|$) est suffisamment petit. t_1 respectivement t_2 est donc celle des bissectrices en question qui ne traverse pas le domaine $A_1 \cap A_2$. Ainsi les valeurs données pour τ_1 et τ_2 par les formules (7.18) et (7.19) sont de nouveau vérifiées.

La courbe L_λ doit être tracée autant que possible dans le domaine D_1 tout en entourant le pôle $\omega = -\zeta_0$. Cette condition se réalise le mieux si L_λ passe non seulement par ω_1 , mais aussi par ω_2 . Dans ce cas $|F(\omega)| < 1$ resp. $\operatorname{Re} f(\omega) < 0$, si $\omega \in L_\lambda$ excepté les points ω_1 et ω_2 où $|F(\omega_1)| = |F(\omega_2)| = 1$ resp. $\operatorname{Re} f(\omega_1) = \operatorname{Re} f(\omega_2) = 0$. On suppose de plus que L_λ est tangente à t_1 et à t_2 en ω_1 et en ω_2 . Les points $\omega = 0$, $\omega = 1$ et $\omega = -\frac{1}{\zeta_0}$, comme points singuliers de $F(\omega)$ et $h(\omega)$, doivent rester en dehors du domaine limité par L_λ soit D_λ . Quant aux points $\omega = 0$ et $\omega = -\frac{1}{\zeta_0}$ cette condition est toujours réalisable sans difficulté, mais le cas de $\omega = 1$ demande à être discuté.

Si $\omega = 1$ n'est pas un point intérieur à Δ_2 , donc n'est pas un point de la frontière du domaine $\Delta_1 \cap \Delta_2$, on peut construire L_λ sans aucun artifice particulier. Par contre, si $\omega = 1$ est un point intérieur à Δ_2 , il sera exclu de D_λ par le petit cercle c'' de centre $\omega = 1$ et de rayon n^{-1} (voir § 6) dont on considère l'arc a'' raccordé au reste de L_λ par deux segments de droites parallèles s_1 et s_2 faisant avec l'axe réel l'angle

$$(8.7) \quad \sigma = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2} & \text{si } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi - \alpha}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \end{cases}$$

Ce choix de l'angle σ s'expliquera d'ici peu.

Avant d'appliquer la formule (7.3) il faut s'assurer que la somme des intégrales en question prises sur a'' , s_1 et s_2 reste bornée. Or, nous avons déjà remarqué que la démonstration du lemme 2 du § 6 reste valable même si l'on pose $0 < \delta \leq 1$ au lieu de $\delta = \frac{1}{2}$. Nous pouvons écrire encore selon (6.14)

$$(8.8) \quad \left| \int_{a''} \right| = I_{nv}^{(2)} = O(n^{-1})$$

et étant donné que $v_1 - v'_1 = O(n)$, on a

$$(8.9) \quad \sum_{v=v'_1}^{v_1} I_{nv}^{(2)} = O(1).$$

C'est donc une somme bornée.

Considérons ensuite les intégrales prises sur s_1 et s_2 suivant des directions opposées. Il faut démontrer que la longueur commune des segments s_1 et s_2 peut être choisie indépendamment de n et de v , et après que la somme des intégrales prises sur ces segments reste bornée. C'est la première de ces questions, autrement dit la détermination de la longueur des segments s_1 et s_2 qui nous amène au choix spécial de l'angle σ . On pourrait croire qu'il est naturel de prendre s_1 et s_2 parallèles à l'axe réel (c'est ainsi que nous avons tracé s' et s'' dans le § 6), mais on verra que ce n'est pas toujours possible. En effet d'après les formules (7.13):

$$(8.10) \quad 1 - \omega_1 = 2 \cos \frac{\alpha - \vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha - \vartheta)}, \quad 1 - \omega_2 = 2 \cos \frac{\alpha + \vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}(\alpha + \vartheta)},$$

et nous avons constaté dans le § 7 que $0 < \vartheta < \pi$; en supposant de plus que $0 < \alpha < \pi$, nous pouvons écrire

$$(8.11) \quad \cos \frac{\alpha - \vartheta}{2} > \begin{cases} \sin \frac{\alpha}{2} & \text{si } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\alpha}{2} & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi \end{cases}$$

Il existe donc une constante $d_1 > 0$ indépendante de ϑ (ou bien de n et de ν) telle que

$$(8.12) \quad d_1 < |1 - \omega_1| = 2 \cos \frac{\alpha - \vartheta}{2} \leq 2.$$

Donc les points ω_1 et $\omega = 1$ ne coïncident et ne se rapprochent arbitrairement jamais. Par contre ω_2 se déplace sur la demi-circonférence qui contient le point $\omega = 1$, et pour certaines valeurs de λ l'un des deux cas suivants est sûrement réalisé: 1) $\frac{1}{2}(\alpha + \vartheta) = \frac{\pi}{2}$ et $|1 - \omega_2| = 0$, ou bien 2) $\frac{1}{2}(\alpha + \vartheta)$

diffère très peu de $\frac{\pi}{2}$ et $|1 - \omega_2|$ est infiniment petit. Dans le premier cas

Γ_2 est tangente par en bas à l'axe réel, et dans le second elle est tangente à un rayon du cercle-unité qui fait un angle infiniment petit avec l'axe réel. Il en résulte que si les segments s_1 et s_2 étaient parallèles à l'axe réel, ils ne pourraient avoir, dans ces derniers cas, qu'une longueur infinitésimale, fonction de $\lambda = \frac{\nu}{n}$.

On voit aussi sans difficulté que si $\alpha = 0$, $\omega = 1$ n'est jamais point de Δ_2 et tout ce calcul peut être évité. Tout au contraire si $\alpha = \pi$, $\omega = 1$ est toujours point de Δ_2 , ω_1 et ω_2 étant symétriques par rapport à $\omega = 1$, ils se rapprochent arbitrairement de ce point. Néanmoins, dans ce cas l'axe réel est l'axe de symétrie de Γ_2 et les arcs de Γ_2 se rapprochent de l'axe réel simultanément par en haut et par en bas, et malgré que l'on a, d'après (8.7) $\sigma = 0$, la longueur commune des segments s_1 et s_2 peut être choisie indépendamment de n . Le cas de $\alpha = \pi$ n'implique donc pas une discussion particulière.

Reprenons donc la première alternative $0 < \alpha < \pi$ et supposons pour l'instant que λ est un paramètre continu. λ a ainsi une valeur $\lambda^{(0)}$ pour laquelle

$$(8.13) \quad \omega_2 = \omega_2^{(0)} = e^{i(\alpha + \pi + \vartheta^{(0)})} = 1$$

d'où

$$(8.14) \quad \vartheta^{(0)} = \pi - \alpha$$

et de l'expression (7.12) de $\cos \vartheta$, on obtient

$$(8.15) \quad \lambda^{(0)} = \frac{1 - r^2}{1 + 2r \cos \alpha + r^2}.$$

La formule (7.12) montre également que ϑ est une fonction strictement monotone décroissante de λ . Par conséquent $\vartheta < \vartheta^{(0)}$ si $\lambda > \lambda^{(0)}$, et Δ_2 ne contient pas le point $\omega = 1$; de même $\vartheta > \vartheta^{(0)}$ si $\lambda < \lambda^{(0)}$ et $\omega = 1$ est un point intérieur à Δ_2 . Ce dernier cas est à examiner. Désignons par ω_0 le premier point d'intersection de $\Gamma_2(\lambda^{(0)})$ et de la demi-droite $\omega = 1 + ue^{i\sigma}$, où u est une variable non négative, et $|\omega_0| > 1$. Pour chaque $\lambda < \lambda^{(0)}$ on a donc

$$(8.16) \quad \left| \omega_0^\lambda \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega_0}{\omega_0 + \zeta_0} \right| < \left| \omega_0^{\lambda^{(0)}} \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega_0}{\omega_0 + \zeta_0} \right| = 1.$$

Ce qui revient à dire que ω_0 est contenue par tous les $\Gamma_2(\lambda)$, si $\lambda < \lambda^{(0)}$. D'après la formule (8.15) $\lambda^{(0)}$ ne dépend pas de n et ν , donc la distance $|1 - \omega_0| = 2u_0$ a la même propriété. Soit u_0 la longueur commune de s_1 et s_2 , le point $\omega = 1 + u_0 e^{i\sigma}$ appartient alors à D_1 pour tous les $\lambda \leq \lambda^{(0)}$, et s_1 et s_2 ne varient pas avec n et ν . Avec ces notations et en reprenant le raisonnement du § 6 on a

$$(8.17) \quad \left| \int_{s_1} + \int_{s_2} \right| = O(n^{-\delta}) \left| \int_{1+n^{-1}e^{i\sigma}}^{1+u_0e^{i\sigma}} \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k+\delta-1}}{(1-\omega)^\delta} \omega^\nu \left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^{n+1} d\omega \right| = \\ = \left| O(n^{-\delta}) \int_{1+n^{-1}e^{i\sigma}}^{1+u_0e^{i\sigma}} \frac{|\omega|^\nu}{|\omega-1|^\delta} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n |d\omega| \right| = I_{n\nu}.$$

Faisons le changement de variable $\omega = 1 + ue^{i\sigma}$ ($u \geq 0$), alors

$$(8.18) \quad I_{n\nu} = O(n^{-\delta}) \int_{n^{-1}}^{u_0} \frac{|\omega|^\nu}{u^\delta} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n du$$

où ω est une fonction de u . Ensuite

$$(8.19) \quad \sum_{\nu=\nu'_1}^{\nu_1} I_{\nu n} = O(n^{-\delta}) \int_{n^{-1}}^{u_0} \frac{|\omega|^{\nu'_1} (|\omega|^{\nu_1 - \nu'_1 + 1} - 1)}{u^\delta (|\omega| - 1)} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n du \leq \\ \leq O(n^{-\delta}) \left\{ \int_{n^{-1}}^{u_0} \frac{|\omega|^{\nu_1}}{u^\delta (|\omega| - 1)} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n du + \int_{n^{-1}}^{u_0} \frac{|\omega|^{\nu'_1}}{u^\delta (|\omega| - 1)} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n du \right\}.$$

Or, nous venons de voir que les points de s_1 et de s_2 appartiennent à D_1 et ainsi

$$(8.20) \quad |\omega|^{\nu_1} \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n = \left| \omega^{\lambda_1} \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n < 1; \\ |\omega|^{\nu'_1} \left| \frac{1 + \zeta_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n = \left| \omega^{\lambda'_1} \frac{1 + \zeta_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right|^n < 1.$$

On peut tirer des relations (8.19) et (8.20)

$$(8.21) \quad \sum_{\nu=\nu'_1}^{\nu_1} I_{\nu n} \leq O(n^{-\delta}) \int_{n^{-1}}^{u_0} \frac{du}{u^\delta (|\omega| - 1)}.$$

σ étant choisi de telle façon [cf. (8.7)] que l'on ait $0 < \cos \sigma \leq 1$ et ainsi

$$(8.22) \quad |\omega| - 1 = (1 + 2u \cos \sigma + u^2)^{1/2} - 1 \geq u \cos \sigma.$$

Il vient donc de (8.21) et (8.22) que

$$(8.23) \quad \sum_{\nu=\nu'_1}^{\nu_1} I_{n\nu} \leq O(n^{-\delta}) \int_{n^{-1}}^{u_0} \frac{du}{u^{\delta+1}} = O(n^{-\delta}) \left[-\frac{1}{\delta} (u_0^{-\delta} - n^{-\delta}) \right] = O(1).$$

Les relations (8.9) et (8.23) expriment le fait que la somme des intégrales envisagées prises sur l'arc a'' et sur les segments s_1 et s_2 est une quantité bornée quand ν varie de ν'_1 à ν_1 . L'application de la formule asymptotique (7.3) est donc permise.

Néanmoins notre raisonnement est en défaut si ω_1 ou ω_2 , ou bien si tous les deux cols tombent dans le cercle c'' . Nous écarterons cette difficulté en démontrant que ces cas ne se produisent qu'un nombre fini de fois, ce dont on peut faire abstraction. Autrement dit on supprime un nombre fini de termes de la somme $\sum_{\nu=\nu'_1}^{\nu_1} |g_{n\nu}|$ ce qui est justifié par le lemme 4 du § 6 selon lequel les $|g_{n\nu}|$ sont uniformément bornés en n et en ν .

Nous venons de voir que si $\alpha = 0$ le cercle c'' n'intervient même pas. Si $\alpha = \pi$, alors ω_1 et ω_2 sont des nombres complexes conjugués et ils se rapprochent le plus du point $\omega = 1$ si $\lambda = \lambda_1$. En exprimant le fait que ω_1 et ω_2 sont les fonctions de λ , nous pouvons écrire d'après les formules (6.1) et (7.10)

$$(8.24) \quad \begin{aligned} |\omega_1(\lambda_1) - \omega_2(\lambda_1)| &= \frac{1-r^2}{r\lambda_1} \left[\left(\frac{1}{\log n} + \frac{\nu_n+1}{n} \right) \left(\frac{4r}{1-r^2} - \frac{1}{\log n} - \frac{\nu_n+1}{n} \right) \right]^{\frac{1}{2}} > \\ &> \frac{(1-r)^2}{r^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\log n}} > \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

pour des n suffisamment élevés. $\omega_1(\lambda_1)$ et $\omega_2(\lambda_1)$ sont donc à l'extérieur du cercle c'' , si $\alpha = \pi$, et à plus forte raison $\omega_1(\lambda)$ et $\omega_2(\lambda)$ ne tombent pas dans ce cercle, si $\lambda < \lambda_1$.

Seul le cas $0 < \alpha < \pi$ nous intéresse. En vertu de l'inégalité (8.12) ω_1 n'est pas un point intérieur au cercle c'' , mais selon l'expression (8.10) la distance $|1 - \omega_2|$ peut devenir infiniment petite ou nulle. Nous devons évaluer le nombre des cas où

$$(8.25) \quad |1 - \omega_2| = 2 \left| \cos \frac{\alpha + \vartheta}{2} \right| = 2 \left| \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \vartheta}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Si ϑ vérifie l'inégalité (8.25), on a

$$(8.26) \quad \left| \frac{4}{\pi} \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \vartheta}{2} \right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad |\vartheta + \alpha - \pi| \leq \frac{\pi}{2n}.$$

Ces ϑ sont dans un intervalle I de longueur $\frac{\pi}{n}$. D'autre part d'après la formule (7.12)

$$(8.27) \quad \lambda = \lambda(\vartheta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \vartheta + r^2},$$

et il en découle que

$$(8.28) \quad A = \max_{0 \leq \vartheta \leq \pi} |\lambda'(\vartheta)| < \infty.$$

Par conséquent la longueur de l'image I' de l'intervalle I obtenu par la transformation $\lambda(\vartheta)$ est au plus égale à $\frac{\pi}{n}A$ et le nombre des $\lambda = \frac{v}{n}$ qui se trouvent dans I' n'est pas supérieur à $\pi A + 1$, quantité indépendante de n . Cette dernière est la borne supérieure du nombre des cols ω_2 qui peuvent tomber dans le cercle c'' ou sur sa frontière. Faisons abstraction de ces cols et des g_{nv} correspondants. Les courbes L_λ qui restent, réalisent déjà les conditions prescrites.

Ces réflexions faites, la courbe L_λ doit être tracée de la manière suivante: elle passe par les cols ω_1 et ω_2 où elle est respectivement tangente aux droites t_1 et t_2 , elle ne contient pas les points $\omega = 0$, $\omega = 1$, $\omega = -\frac{1}{\zeta_0}$, ailleurs elle se trouve entièrement dans le domaine D_1 et entoure le pôle $\omega = -\zeta_0$. Si $\omega = 1$ est un point de A_2 , l'arc a'' et les segments s_1, s_2 font partie de L_λ . Au reste L_λ peut être une courbe quelconque, toutefois de structure géométrique assez simple pour que les intégrales prises sur elle aient un sens.

§ 9. Cas de $\delta = \frac{1}{2}$

Les résultats acquis dans les §§ précédents permettent de terminer la démonstration du théorème 1 qui n'a été achevée complètement que pour $\delta > \frac{1}{2}$.

Nous venons de construire dans le § 8 la courbe d'intégration L_λ , mais sa connaissance en elle-même ne suffit encore pas pour pouvoir appliquer la formule (7.3) ou (7.2). En fait, après avoir déterminé la valeur asymptotique de $|g_{nv}|$, il faut former encore la somme $\sum_{v=v_1}^{v_2} |g_{nv}|$, et par conséquent ce n'est pas seulement la partie principale de (7.3) qui doit être envisagée, mais aussi le reste qui y figure. Or, nous avons déjà fait observer dans le § 7 que l'expression (7.3) doit être soumise à une analyse préalable minutieuse, si les quantités $f(\omega_j)$, $|f''(\omega_j)|$, $h(\omega_j)$ ($j = 1, 2$) dépendent elles-mêmes du paramètre n . Les formules du § 7 indiquent que c'est précisément le cas: ω_j dépend de n par intermédiaire de λ . Une autre particularité de la formule (7.3) provient du fait que ω_2 (si ζ_0 est un nombre complexe) ou bien simultanément ω_1 et ω_2 (si ζ_0 est réel) peuvent se trouver dans le voisinage du point $\omega = 1$, pôle de la fonction $h(\omega)$. Dans le but de modifier la relation (7.3) nous avons besoin d'un lemme concernant les fonctions suivantes du paramètre réel t et de la variable réelle x :

1° $\eta(t) > 0$ définie (au moins) pour $t > 1$, $\eta(t) = O(1)$ si $1 < t \leq \infty$, et $\eta(t)^{-1} = O(\log t)$ quand $t \rightarrow \infty$;

$$2^\circ f(x; t) = -\eta(t)x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \dots$$

où les α_j ($j = 3, 4, \dots$) peuvent dépendre de t , mais $\alpha_3 = O(1)$ et la somme $t \sum_{j=3}^{\infty} |\alpha_j x^j|$ est uniformément bornée en t pour $|x| \leq t^{-1/3} = \tau$;

$$3^\circ \quad h(x; t) = h(0; t) \quad h^*(x; t) = h(0; t) (1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots)$$

où il existe des β_j qui dépendent de t , mais la série de $h^*(x; t)$ est absolument convergente pour $|x| < \xi$, ξ étant supposé supérieur à τ ; en outre il faut traiter séparément les deux cas suivants:

$$(a) \quad \beta_j = O(\beta^j) \quad ; \quad (b) \quad \beta_j = O\left(\frac{t^{j/3}}{2^j}\right) \quad (j = 1, 2, \dots)$$

où $\beta > 0$ est une constante (le cas (b) contient les cas (a), il est pourtant nécessaire de faire cette distinction qui s'expliquera plus tard);

4°

$$\int_{-\infty}^{-\tau} h^*(x; t) e^{tf(x;t)} dx = O(t^{-N}), \quad \int_{\tau}^{\infty} h^*(x; t) e^{tf(x;t)} dx = O(t^{-N})$$

pour chaque entier $N > 0$.

Avec ces notations le lemme s'énonce comme suit:

Lemme 5. *Soit t suffisamment grand. Alors*

$$J(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x; t) e^{tf(x;t)} dx = h(0; t) \left(\frac{2\pi}{t\eta(t)}\right)^{1/2} + h(0; t) O\left\{t^{-\frac{3}{2}} \eta(t)^{-\frac{7}{2}}\right\} = P + E$$

(9.1a)

dans le cas (a), et

$$J(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x; t) e^{tf(x;t)} dx = h(0; t) \left(\frac{2\pi}{t\eta(t)}\right)^{1/2} + h(0; t) O\left\{t^{-\frac{2}{3}} \eta(t)^{-1}\right\} = P + E'$$

(9.1b)

dans le cas (b).

Démonstration. Le lemme s'obtient par un calcul dont l'analogue peut être trouvé dans [10] (pp. 60—69). Résumons d'abord les conséquences immédiates des conditions 1°—4°. On a d'après 1°

$$(9.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^a \eta(t) = +\infty$$

pour chaque $a > 0$. Il résulte ainsi de 2° et de (9.2) que pour $|x| \leq \tau$ et $t \rightarrow \infty$

$$(9.3) \quad e^{tf(x;t)} = e^{-\tau(t)x^2} \{1 + \alpha_3 t x^3 + O(tx^4) + O(t^2 x^6)\}.$$

On conclut de 3°, également pour $|x| \leq \tau$ et $t \rightarrow \infty$

$$(9.4a) \quad h^*(x; t) = 1 + \beta_1 x + O(x^2)$$

dans le cas (a), et

$$(9.4b) \quad h^*(x; t) = 1 + O(t^{1/3} |x|)$$

dans le cas (b).

Dans le cas (a) nous avons par les formules (9.3) et (9.4a)

$$(9.5) \quad h^*(x; t) e^{f(x; t)} = 1 + \beta_1 x + \alpha_3 t x^3 + O(x^2 + t x^4 + t^2 x^6),$$

et de 4° et (9.1a)

$$(9.6) \quad \begin{aligned} J(t) &= h(0; t) \left\{ \int_{-\tau}^{\tau} e^{-\eta(t) t x^2} dx + \int_{-\tau}^{\tau} (\beta_1 x + \alpha_3 t x^3) e^{-\eta(t) t x^2} dx + \right. \\ &+ \left. \int_{-\tau}^{\tau} O(x^2 + t x^4 + t^2 x^6) e^{-\eta(t) t x^2} dx + O(t^{-N}) \right\} = \\ &= h(0; t) \{J_1(t) + J_2(t) + J_3(t) + O(t^{-N})\}. \end{aligned}$$

Rappelons certaines relations connues où $q \geq 0$ est un entier quelconque :

$$(9.7) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta(t) t x^2} dx &= \left(\frac{2\pi}{t\eta(t)} \right)^{1/2}, & \int_{\tau}^{\infty} e^{-\eta(t) t x^2} x^q dx &= O \left\{ e^{-\frac{1}{2} (\eta(t) t)^{1/2} \tau} \right\}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta(t) t x^2} |x|^q dx &= O \left\{ (\eta(t) t)^{-\frac{1}{2}(q+1)} \right\}, & \int_{-\tau}^{\tau} e^{-\eta(t) t x^2} x^{2q+1} dx &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(9.8) \quad \begin{aligned} J_1(t) &= \left(\frac{2\pi}{t\eta(t)} \right)^{1/2} + O \left\{ e^{-\frac{1}{2} (\eta(t) t)^{1/2} \tau} \right\}, & J_2(t) &= 0, \\ J_3(t) &= O \left\{ t^{-\frac{3}{2}} \eta(t)^{-\frac{7}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Les formules (9.6) et (9.8) fournissent la relation (9.1a).

Dans le cas (b) nous avons d'après (9.3) et (9.4b)

$$(9.9) \quad h^*(x; t) e^{f(x; t)} = 1 + O(t^{1/3} |x|)$$

et en tenant compte de 4°, (9.7) et (9.8)

$$(9.10) \quad \begin{aligned} J(t) &= h(0; t) J_1(t) + h(0; t) O \left\{ t^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta(t) t x^2} |x| dx \right\} + h(0; t) O(t^{-N}) = \\ &= h(0; t) \left(\frac{2\pi}{t\eta(t)} \right)^{1/2} + h(0; t) O \left\{ t^{-2/3} \eta(t)^{-1} \right\} = P + E' \end{aligned}$$

ce qui n'est autre que la relation (9.1b).

L'évaluation du reste de la formule (7.3) à l'aide du lemme 5 exige le changement des notations adoptées pour le lemme. Remplaçons t par n , l'axe des x par la droite t_1 resp. t_2 , l'origine des x par ω_1 resp. ω_2 , les fonctions $f(x; t)$, $h(x; t)$, $\eta(t)$ par $f(\omega)$, $h(\omega)$, $f''(\omega_1)$ resp. $f''(\omega_2)$. En développant $f(\omega)$ et $h(\omega)$ en série de Taylor suivant les puissances de $\omega - \omega_1$ resp. $\omega - \omega_2$ on met en évidence la dépendance de ces fonctions de ω (équivalent à x) et de n (équivalent à t). Désignons ces fonctions par $f(\omega; \omega_1)$, $h(\omega; \omega_1)$ resp. $f(\omega; \omega_2)$, $h(\omega; \omega_2)$. Nous supposons de plus que la courbe d'intégration L_λ est composée d'arcs convenablement choisis (cf. § 8) et de deux segments de droite $s_{1\lambda}$ et $s_{2\lambda}$ de support t_1 et t_2 , de longueur commune $2n^{-1/3}$ et de milieu

ω_1 resp. ω_2 , tels que $|\omega - \omega_1| \leq n^{-1/3}$ si $\omega_1 \in s_{1\lambda}$, et $|\omega - \omega_2| \leq n^{-1/3}$ si $\omega_2 \in s_{2\lambda}$. Après avoir démontré que $f''(\omega_1)$, $f(\omega; \omega_1)$, $h(\omega; \omega_1)$ resp. $f''(\omega_2)$, $f(\omega; \omega_2)$, $h(\omega; \omega_2)$ réalisent les conditions 1°–4° du lemme 5 on peut remplacer L_λ par $s_{1\lambda}$

et $s_{2\lambda}$ sans commettre par cela une erreur supérieure à $O\left\{\exp\left[-\frac{1}{4}n^{1/3}|f''(\omega_1)|^{1/3}\right]\right\}$

[cf. (9.7)] où $|f''(\omega_1)| = |f''(\omega_2)|$ est équivalent à $\eta(n)$. Observons encore que la condition 4° correspond au fait que $\operatorname{Re} f(\omega) < 0$ si $\omega \in L_\lambda$, mais $\omega \neq \omega_1$ resp. $\omega \neq \omega_2$ et la valeur de l'intégrale prise sur $L_\lambda - s_{1\lambda} - s_{2\lambda}$ est de l'ordre sus-mentionné.

On peut vérifier que $s_{1\lambda} \subset D_1$ et $s_{2\lambda} \subset D_1$. Sans rentrer dans les détails nous remarquons seulement que dans les cas considérés ($\lambda'_1 \leq \lambda \leq \lambda_1$) la distance des cols $|\omega_1(\lambda) - \omega_2(\lambda)|$ atteint ses minima pour $\lambda = \lambda'_1$ et $\lambda = \lambda_1$, et selon les formules (6.1) et (7.10) l'expression (8.24) reste valable même si $\alpha \neq \pi$, autrement dit il existe une constante $c^* > 0$ telle que, $|\omega_1(\lambda'_1) - \omega_2(\lambda'_1)| > c^*(\log n)^{-1/2} > 2n^{-1/3}$ et $|\omega_1(\lambda_1) - \omega_2(\lambda_1)| > c^*(\log n)^{-1/2} > 2n^{-1/3}$, si n est assez grand.

Nous étudierons maintenant si $f''(\omega_1)$, $f(\omega; \omega_1)$, $h(\omega; \omega_1)$ resp. $f''(\omega_2)$, $f(\omega; \omega_2)$, $h(\omega; \omega_2)$ vérifient les conditions 1°–4° du lemme 5. Nous désignerons dans ce qui suit par c_i , c'_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) des constantes numériques positives.

A. *Examen de $f''(\omega_1)$ resp. $f''(\omega_2)$.* Supposons que c_0 , c'_0 , dont les valeurs seront fixées à chaque occasion, vérifient l'inégalité suivante

$$(9.11) \quad \frac{1-r}{1+r} < \lambda'_1 < c'_0 < c_0 < \lambda_1 < \frac{1+r}{1-r},$$

λ_1 et λ'_1 ont été définis par la relation (6.1). Si

$$(9.12) \quad c'_0 \leq \lambda \leq c_0,$$

il découle de (7.16) et (9.11) que

$$(9.13) \quad \begin{aligned} c'_1 &= \frac{1-r}{1+r} \left\{ \left(\frac{1+r}{1-r} - c_0 \right) \left(c'_0 - \frac{1-r}{1+r} \right) \right\}^{1/2} \leq |f''(\omega_1(\lambda))| \leq \\ &\leq \frac{1+r}{1-r} \left\{ \left(\frac{1+r}{1-r} - c'_0 \right) \left(c_0 - \frac{1-r}{1+r} \right) \right\}^{1/2} = c_1 \end{aligned}$$

ou en posant $\eta(n) = |f''(\omega_1(\lambda))|$ (9.13) s'écrira sous la forme

$$(9.14) \quad c'_1 \leq \eta(n) \leq c_1.$$

Pour les $\lambda \in [c_0, \lambda_1]$ et $\lambda \in [\lambda'_1, c'_0]$ nous introduisons les notations

$$(9.15) \quad \lambda_1 \geq \lambda_\mu \geq c_0, \quad \lambda'_1 \leq \lambda'_{\mu'} \leq c'_0$$

où λ_μ et $\lambda'_{\mu'}$ sont déterminés par les expressions

$$(9.16) \quad \lambda_\mu = \frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{\log n} - \frac{v_n + \mu}{n}, \quad \lambda'_{\mu'} = \frac{1-r}{1+r} + \frac{1}{\log n} + \frac{v'_n + \mu'}{n}.$$

v_n et v'_n ont été donnés par (6.2), et les indices μ et μ' prennent d'après les inégalités (9.15) les valeurs suivantes:

$$(9.17) \quad \begin{aligned} \mu = 1, 2, \dots, \left[n \left(\frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{\log n} - c_0 \right) - v_n \right] &= M \approx c_2 n, \\ \mu' = 1, 2, \dots, \left[n \left(c'_0 - \frac{1}{\log n} - \frac{1-r}{1+r} \right) - v'_n \right] &= M' \approx c'_2 n. \end{aligned}$$

En vertu de (9.15) et (9.16) on a

$$(9.18) \quad c_0 - \frac{1-r}{1+r} \leq \lambda_\mu - \frac{1-r}{1+r} < \frac{1+r}{1-r} - \frac{1-r}{1+r} = \frac{4r}{1-r^2}$$

et par suite, selon (7.16)

$$(9.19) \quad \begin{aligned} \frac{1-r}{1+r} \left\{ \left(c_0 - \frac{1-r}{1+r} \right) \left(\frac{1}{\log n} + \frac{v_n + \mu}{n} \right) \right\}^{1/2} &\leq |f''(\omega_1(\lambda_\mu))| \leq \\ &\leq \frac{1+r}{1-r} \left\{ \frac{4r}{1-r^2} \left(\frac{1}{\log n} + \frac{v_n + \mu}{n} \right) \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Une relation analogue peut être établie pour $|f''(\omega_1(\lambda'_{\mu'}))|$. On conclut de (9.19) qu'il existe deux constantes positives c_3 et c'_3 telles que

$$(9.20) \quad c'_3 (\log n)^{-\frac{1}{2}} < \eta(n) < c_3.$$

Que l'inégalité (9.14), ou que (9.20) limite $\eta(n)$, la condition 1° est réalisée.

B. Examen de $f(\omega; \omega_1)$ resp. $f(\omega; \omega_2)$. On obtient de l'expression (7.9) de $f'(\omega)$

$$(9.21) \quad f^{(m)}(\omega_1) = (-1)^{m-1} (m-1)! \left\{ \frac{\lambda}{\omega_1^m} + \frac{\bar{\zeta}_0^m}{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega_1)^m} - \frac{1}{(\omega_1 + \zeta_0)^m} \right\}$$

qui s'annule pour $m = 1$. Ainsi

$$(9.22) \quad f(\omega; \omega_1) = f(\omega_1) - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \left\{ \frac{\lambda}{\omega_1^m} + \frac{\bar{\zeta}_0^m}{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega_1)^m} - \frac{1}{(\omega_1 + \zeta_0)^m} \right\} (\omega - \omega_1)^m$$

et il résulte de (9.21) que

$$(9.23) \quad \frac{|f^{(m)}(\omega_1)|}{m!} \leq \frac{1}{m} \left\{ \lambda + \left| \frac{\bar{\zeta}_0^m}{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega_1)^m} \right| + \frac{1}{|\omega_1 + \zeta_0|^m} \right\} < 2 \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^m.$$

La série (9.22) est donc absolument convergente, si $|\omega - \omega_1| < \frac{1-r}{1+r}$,

et en vertu de (9.23), si n est assez élevé, on a pour $|\omega - \omega_1| \leq n^{-\frac{1}{3}} < \frac{1}{2} \frac{1-r}{1+r}$

$$(9.24) \quad n \sum_{m=3}^{\infty} \frac{|f^{(m)}(\omega_1)|}{m!} |\omega - \omega_1|^m < 2 \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^3 n |\omega - \omega_1|^3 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^m |\omega - \omega_1|^m < 4 \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^3.$$

La somme (9.24) est uniformément bornée. De telles relations peuvent être déduites pour $f(\omega; \omega_2)$. La condition 2° est donc réalisée.

C. *Examen de $h(\omega; \omega_1)$ resp. $h(\omega; \omega_2)$.* Nous avons constaté que ω_1 et ω_2 ne jouent pas de rôles identiques, si ζ_0 est complexe (cf. § 8). Dans

ce cas $|1 - \omega_2|$ prend aussi des valeurs inférieures à $n^{-\frac{1}{3}}$, tandis que $|1 - \omega_1|$ reste supérieure à une constante positive d_1 [cf. (8.12)]. Par contre si ζ_0 est réel $|1 - \omega_1|$ peut aussi devenir très petit et pour $\alpha = 0$ ce sont les points $\omega_1(\lambda'_1)$ et $\omega_2(\lambda'_1)$, pour $\alpha = \pi$ ce sont les points $\omega_1(\lambda_1)$ et $\omega_2(\lambda_1)$ qui s'approchent le plus du point $\omega = 1$. Cependant

$$(9.25) \quad \begin{aligned} |1 - \omega_1(\lambda'_1)| = |1 - \omega_2(\lambda'_1)| &> c_4 (\log n)^{-\frac{1}{2}} > n^{-\frac{1}{3}} && \text{si } \alpha = 0, \\ |1 - \omega_1(\lambda_1)| = |1 - \omega_2(\lambda_1)| &> c_4 (\log n)^{-\frac{1}{2}} > n^{-\frac{1}{3}} && \text{si } \alpha = \pi \end{aligned}$$

[cf. (8.24)]. Il en découle qu'on ne rencontre pas de difficulté pour développer

en série $h(\omega; \omega_1)$ suivant les puissances de $\omega - \omega_1$, où $|\omega - \omega_1| \leq n^{-\frac{1}{3}}$ que ζ_0 soit complexe ou réel. On peut dire la même chose sur la série de $h(\omega; \omega_2)$ développée autour de ω_2 si ζ_0 est réel; mais si ζ_0 est complexe il faut étudier à part le comportement de $h(\omega; \omega_2)$. Il est donc motivé de traiter d'abord la fonction $h(\omega; \omega_2)$, toutes conclusions s'ensuivront pour $h(\omega; \omega_1)$.

$h(\omega)$ est définie par la formule (7.20) et on peut écrire

$$(9.26) \quad \begin{aligned} h(\omega; \omega_2) &= h(\omega_2) \frac{\left(1 + \frac{\bar{\zeta}_0(\omega - \omega_2)}{1 + \bar{\zeta}_0 \omega_2} \right)^{k + \frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{\omega - \omega_2}{1 - \omega_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\omega - \omega_2}{\omega_2 + \zeta_0} \right)} = \\ &= h(\omega_2) h^*(\omega; \omega_2) = h(\omega_2) [1 + \beta_1(\omega - \omega_2) + \beta_2(\omega - \omega_2)^2 + \dots]. \end{aligned}$$

La série qui figure dans (9.26) est absolument convergente si

$$(9.27) \quad |\omega - \omega_2| < \min \left\{ \left| \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega_2}{\bar{\zeta}_0} \right|, |\omega_2 + \zeta_0|, |1 - \omega_2| \right\} = b.$$

La relation (9.27) supposée vérifiée $h^*(\omega; \omega_2)$ est analytique pour $|\omega - \omega_2| \leq n^{-\frac{1}{3}}$, si $b > n^{-\frac{1}{3}}$, mais $h^*(\omega; \omega_2)$ n'est pas développable en série dans le même cercle, suivant les puissances de $\omega - \omega_2$ si $|1 - \omega_2| \leq n^{-\frac{1}{3}}$. Nous allons démontrer tout à l'heure un lemme pour éliminer cet obstacle, mais envisageons premièrement les cas où $|1 - \omega_2| > n^{-\frac{1}{3}}$. Il faut calculer les β_j . Il est aisé de voir d'après (9.26) que

$$(9.28) \quad \beta_j = q_j(1 - \omega_2)^{-j}$$

où $|q_j| = O(1)$. Si $|1 - \omega_2|^{-1} \leq \beta$, alors $\beta_j = O(\beta^j)$ et on est dans le cas (a). Par contre si $|1 - \omega_2| \geq 2n^{-\frac{1}{3}} = \xi$, on a $\beta_j = O\left(\frac{n^{j/3}}{2^j}\right)$ et l'on se trouve dans le cas (b). La série de $h^*(\omega; \omega_2)$ est ainsi absolument convergente pour $|\omega - \omega_2| \leq n^{-\frac{1}{3}} < \xi$ dans tous les deux cas. La condition 3° est toujours remplie si ζ_0 est réel, elle est vérifiée même si ζ_0 est complexe pour $|1 - \omega_2| \geq 2n^{-\frac{1}{3}}$. Il reste à étudier le cas où ζ_0 est complexe et $|1 - \omega_2| < 2n^{-\frac{1}{3}}$. La réponse à la question ainsi posée est donnée par le lemme suivant:

Lemme 6. Soit $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$ et c'' le cercle de centre $\omega = 1$ et de rayon $2n^{-\frac{1}{3}}$. Alors

$$(9.29) \quad \sum_{\omega_2 \in c''} |g_{nv}| = O(1).$$

Démonstration. Nous avons prouvé dans le § 8 que le nombre des $\omega_2 \in c''$ (c'' est le cercle de centre $\omega = 1$ et de rayon n^{-1}) est au plus égal à $\pi A + 1 = O(1)$ [cf. (8.28)]. On peut démontrer par un raisonnement semblable à celui du § 8 que le nombre des $\omega_2 \in c'''$ ne dépasse pas $2\pi A n^{2/3}$.

Cherchons à présent l'arc du cercle-unité sur lequel $|1 - \omega_2|$ peut devenir arbitrairement petit. Le phénomène se produit si $|\lambda^{(0)} - \lambda|$ est suffisamment petit [cf. (8.13), (8.14), (8.15)], parce que $\omega_2(\lambda)$ est une fonction continue de λ dans le voisinage de $\lambda^{(0)}$ et $\omega_2(\lambda^{(0)}) = 1$, donc $|1 - \omega_2(\lambda)|$ est très petit avec $|\lambda^{(0)} - \lambda|$. Il suffit ainsi de préciser les valeurs de c_0 et c'_0 telles qu'elles vérifient l'inégalité

$$(9.30) \quad \lambda_1 > c_0 > \lambda^{(0)} > c'_0 > \lambda'_1$$

et démontrer le lemme pour les $\lambda \in (c'_0, c_0)$.

Dans le calcul de J_{nv} [cf. (7.4)] décomposons L_λ en deux arcs partiels $A_{1\lambda}$ et $A_{2\lambda}$ comprenant respectivement les segments $s_{1\lambda}$ et $s_{2\lambda}$ (cf. p. 135) et soit

$$(9.31) \quad J_{nv} = J'_{nv} + J''_{nv} = \int_{A_{1\lambda}} h(\omega) e^{nf(\omega)} d\omega + \int_{A_{2\lambda}} h(\omega) e^{nf(\omega)} d\omega.$$

Rien n'empêche de faire usage de la formule (7.2) pour évaluer J'_{nv}

$$(9.32) \quad J'_{nv} = h(\omega_1) e^{nf(\omega_1) + i\tau_1} \left(\frac{2\pi}{n|f''(\omega_1)|} \right)^{\frac{1}{2}} \{1 + O(n^{-1})\}.$$

En effet, ζ_0 n'étant pas réel, $|h(\omega_1)| < c_5$ [cf. (7.20), (8.12)], $\frac{1}{c'} > |f''(\omega_1)|^{-1} = \eta(n)^{-1} = O(1)$ et $|\exp(nf(\omega_1) + i\tau_1)| = 1$, ainsi le reste de l'expression (9.32) est $O(n^{-3/2})$, mais la formule (9.1a) du lemme 5 conduit à la même valeur $E = O(n^{-3/2})$. On déduit de (9.32) que

$$(9.33) \quad |J'_{nv}| < c_5 \left(\frac{2\pi}{c'_1 n}\right)^{\frac{1}{2}} \{1 + O(n^{-1})\} = O(n^{-\frac{1}{2}}).$$

Cependant la relation (7.2) est inutilisable pour évaluer $|J''_{nv}|$ si $|1 - \omega_2| < 2n^{-\frac{1}{3}}$. Il faut limiter $|J''_{nv}|$ sans se référer à (7.2). Le fait que $\omega_2 \in s_{2\lambda}$ s'exprime par les relations

$$(9.34) \quad \omega = \omega_2 + ue^{i\tau_2}, \quad -n^{-\frac{1}{3}} \leq u \leq n^{-\frac{1}{3}}.$$

Désignons par $B'_{2\lambda}$ et $B''_{2\lambda}$ les parties de $A_{2\lambda}$ différentes de $s_{2\lambda}$. La valeur de l'intégrale en question prise sur $B'_{2\lambda}$ et $B''_{2\lambda}$ est $O(n^{\frac{1}{6}} e^{-\frac{n}{3}})$, car pour $\omega \in B'_{2\lambda}$, $\omega \in B''_{2\lambda}$ on a $|h(\omega)| = O(n^{\frac{1}{6}})$ et $|e^{nf(\omega)}| = O(e^{-\frac{n}{3}})$ et par suite

$$(9.35) \quad |J''_{nv}| = \left| \int_{s_{2\lambda}} h(\omega) e^{nf(\omega)} d\omega \right| + O(n^{-\frac{1}{6}} e^{-\frac{n}{3}}).$$

D'ailleurs, si $\omega \in s_{2\lambda}$, on a

$$(9.36) \quad |e^{nf(\omega)}| \leq 1, \quad |h(\omega)| \leq \frac{c_6}{|1 - \omega_2 - u e^{i\tau_2}|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{2c_6}{|u|^{\frac{1}{2}}}$$

et en faisant le changement de variable (9.34) on obtient par (9.35)

$$(9.37) \quad |J''_{nv}| \leq 4c_6 \int_0^{n^{-\frac{1}{3}}} \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} + O(n^{\frac{1}{6}} e^{-\frac{n}{3}}) = O(n^{-\frac{1}{6}}).$$

En vertu des relations (9.31), (9.33) et (9.37)

$$(9.38) \quad |J_{nv}| \leq |J'_{nv}| + |J''_{nv}| = O(n^{-\frac{1}{6}}).$$

D'autre part selon la formule (7.5)

$$(9.39) \quad |g_{nv}| \leq O(n^{-\frac{1}{2}}) |J_{nv}| = O(n^{-\frac{2}{3}}).$$

Or, nous venons de voir que le nombre des $\omega_2 \in c'''$ est $O(n^{\frac{2}{3}})$, d'où résulte la relation (9.29). Le lemme 6 est ainsi démontré.

Dans la partie suivante de ce § il est nécessaire de traiter séparément les cas où ζ_0 est complexe ($0 < \alpha < \pi$) et ceux où ζ_0 est réel ($\alpha = 0, \alpha = \pi$).

I. ζ_0 est complexe. On sait que $|h(\omega_1(\lambda))| = O(1)$ [cf. (7.20), (8.12)], mais $|h(\omega_2(\lambda))|$ peut avoir des valeurs très grandes. Néanmoins $|h(\omega_2(\lambda_\mu))| = O(1)$ et $|h(\omega_2(\lambda'_\mu))| = O(1)$ [cf. (9.15)—(9.17)], puisque $\lambda_\mu \notin (c'_0, c_0)$ et $\lambda'_\mu \notin (c'_0, c_0)$, tandis que $\lambda^{(0)} \in (c'_0, c_0)$ [cf. (9.30)] et l'intervalle critique des λ sur lequel $|h(\omega_2(\lambda))|$ devient très grand est un voisinage de $\lambda^{(0)}$. Par conséquent l'évaluation de E de (9.1a) est simple pour $\lambda = \lambda_\mu$ ou $\lambda = \lambda'_\mu$.

Nous avons pour ces λ , selon (9.20), $\eta(n)^{-1} = O\{(\log n)^{\frac{1}{2}}\}$ et ainsi

$$(9.40) \quad E = O\{n^{-\frac{3}{2}}(\log n)^{\frac{7}{4}}\}.$$

Soit $\nu_\mu = \lambda_\mu n$ et $\nu'_\mu = \lambda'_\mu n$, et formons la somme

$$(9.41) \quad \sum_{\mu=1}^M |J_{n\nu_\mu}| + \sum_{\mu'=1}^{M'} |J_{n\nu'_{\mu'}}|,$$

où M et M' sont donnés sous (9.17), alors l'erreur commise en calculant (9.41) à l'aide de la formule (9.1a) est

$$(9.42) \quad O(n)E = E_1 = O\{n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{7}{4}}\}$$

et, étant donné que $|g_{n\nu}| = O(n^{-\frac{1}{2}}) |J_{n\nu}|$, le reste de la somme $\sum_{\mu=1}^M |g_{n\nu_\mu}| + \sum_{\mu'=1}^{M'} |g_{n\nu'_{\mu'}}|$ est

$$(9.43) \quad E_2 = O\{n^{-1}(\log n)^{\frac{7}{4}}\}.$$

On peut tirer ensuite de la relation (9.19)

$$(9.44) \quad (n |f''(\omega_1(\lambda_\mu))|)^{-\frac{1}{2}} = (v_n + \mu)^{-\frac{1}{4}} O(n^{-\frac{1}{4}})$$

et on obtient par (9.1a), (9.43) et (9.44)

$$(9.45) \quad \sum_{\mu=1}^M |g_{n\nu_\mu}| = O(n^{-\frac{1}{2}}) \sum_{\mu=1}^M |J_{n\nu_\mu}| = O(n^{-\frac{3}{4}}) \sum_{\mu=1}^M (v_n + \mu)^{-\frac{1}{4}} + E_2 = O(1).$$

On a de même

$$(9.46) \quad \sum_{\mu'=1}^{M'} |g_{n\nu'_{\mu'}}| = O(1).$$

Supposons en second lieu que $c'_0 \leq \lambda \leq c_0$ et désignons ces λ par $\bar{\lambda}_x$, où l'indice x peut être positif, négatif ou nul et que nous allons définir. Soit $\bar{\lambda}_0$ le nombre de la forme $\frac{\nu}{n}$ qui est le plus près de $\lambda^{(0)}$ (n étant fixe), c'est-à-dire

$$(9.47) \quad |\bar{\lambda}_0 - \lambda^{(0)}| \leq n^{-1}$$

et posons

$$(9.48) \quad c'_0 \leq \bar{\lambda}_x = \bar{\lambda}_0 + x n^{-1} \leq c_0.$$

L'indice \varkappa varie donc entre les limites

$$(9.49) \quad \varkappa_1 = -[n(\bar{\lambda}_0 - c'_0)] \leq \varkappa \leq [n(c_0 - \bar{\lambda}_0)] = \varkappa_2$$

([x] désigne la partie entière de x), et $\varkappa_2 - \varkappa_1 = c_7 n$. Soient encore $\bar{\nu}_\varkappa = \bar{\lambda}_\varkappa n$ et $J_{n\bar{\nu}_\varkappa} = J'_{n\bar{\nu}_\varkappa} + J''_{n\bar{\nu}_\varkappa}$. En tenant compte de (9.48) et (9.13) ou (9.14) on a $|f''(\omega_1(\bar{\lambda}_\varkappa))| = \eta(n)^{-1} \leq \frac{1}{c_1}$, $|h(\omega_1(\bar{\lambda}_\varkappa))| = O(1)$, et par suite le

reste $E = O(n^{-\frac{3}{2}})$ dans l'évaluation de $|J'_{n\bar{\nu}_\varkappa}|$. Nous obtenons ainsi

$$(9.50) \quad \sum_{\varkappa=\varkappa_1}^{\varkappa_2} |J'_{n\bar{\nu}_\varkappa}| = \sum_{\varkappa=\varkappa_1}^{\varkappa_2} \left\{ O(n^{-\frac{1}{2}}) + O(n^{-\frac{3}{2}}) \right\} = O(n^{\frac{1}{2}}).$$

Pour ce qui est de $J''_{n\bar{\nu}_\varkappa}$ il faut s'occuper d'avantage de $h(\omega_2(\bar{\lambda}_\varkappa))$. Nous avons selon la définition (9.47) et (9.48) de $\bar{\lambda}_\varkappa$

$$(9.51) \quad |1 - \omega_2(\bar{\lambda}_\varkappa)| = |1 - \omega_2(\bar{\lambda}_0) + \omega_2(\bar{\lambda}_0) - \omega_2(\bar{\lambda}_\varkappa)| = (1 + |\varkappa|) O(n^{-1}),$$

car $\max_{c'_0 \leq \lambda \leq c_0} |\omega'_2(\lambda)| = O(1)$. On obtient par (9.51)

$$(9.52) \quad |h(\omega_2(\bar{\lambda}_\varkappa))| = (1 + |\varkappa|)^{-\frac{1}{2}} O(n^{\frac{1}{2}}).$$

Les quantités $|1 - \omega_2(\bar{\lambda}_\varkappa)|$ peuvent être très petites, mais en vertu du lemme 6 seules nous intéressent celles qui vérifient la relation $|1 - \omega_2(\bar{\lambda}_\varkappa)| \geq 2n^{-\frac{1}{3}}$, ainsi il faut prendre $\beta_j = O\left(\frac{n^{j/2}}{2^j}\right)$ et l'on doit utiliser la formule (9.1b) dans le calcul de $J''_{n\bar{\nu}_\varkappa}$, le reste s'exprimant par la relation

$$(9.53) \quad E' = (1 + |\varkappa|)^{-\frac{1}{2}} O(n^{-\frac{1}{6}}).$$

En outre $|f''(\omega_2(\bar{\lambda}_\varkappa))|^{-1} = |f''(\omega_1(\bar{\lambda}_\varkappa))|^{-1} = O(1)$, par conséquent

$$(9.54) \quad \sum_{\varkappa=\varkappa_1}^{\varkappa_2} |J''_{n\bar{\nu}_\varkappa}| = \left\{ O(1) + O(n^{-\frac{1}{6}}) \right\} \sum_{\varkappa=\varkappa_1}^{\varkappa_2} (1 + |\varkappa|)^{-\frac{1}{2}} = O(n^{\frac{1}{2}}).$$

On obtient ainsi de (7.5), (9.50) et (9.54)

$$(9.55) \quad \sum_{\varkappa=\varkappa_1}^{\varkappa_2} |g_{n\bar{\nu}_\varkappa}| = O(n^{-\frac{1}{2}}) \sum_{\varkappa=\varkappa_1}^{\varkappa_2} (|J'_{n\bar{\nu}_\varkappa}| + |J''_{n\bar{\nu}_\varkappa}|) = O(1).$$

Les relations (9.45), (9.46) et (9.54) établissent la démonstration du théorème 1 pour $\delta = \frac{1}{2}$ et ζ_0 complexe.

II. ζ_0 est réel. La discussion des cas de $\alpha = 0$ et de $\alpha = \pi$ s'effectuant de la même manière, il suffit de traiter l'un d'entre eux, soit $\alpha = \pi$. Cette fois-ci [cf. (8.10)]

$$(9.56) \quad |1 - \omega_1| = \cos \frac{\pi - \vartheta}{2} = \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad |1 - \omega_2| = -\cos \frac{\pi + \vartheta}{2} = \sin \frac{\vartheta}{2}.$$

Il s'ensuit que pour les petites valeurs de ϑ les quantités $|h(\omega_1)| = |h(\omega_2)|$ [cf. (7.20)] et $|f''(\omega_1)|^{-1} = |f''(\omega_2)|^{-1}$ [cf. (7.16)] deviennent très grandes. Les $\vartheta \geq \vartheta_0 > 0$, où $0 < \vartheta_0 < \pi$ est un angle constant arbitraire, ne créent donc aucune difficulté. Nous allons discuter les deux éventualités $\vartheta \in [\vartheta_0, \pi)$ et $\vartheta \in (0, \vartheta_0)$.

Admettons que c_0 et c'_0 [cf. (9.11)] soient maintenant confondues et désignons par

$$(9.57) \quad c_0 = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \vartheta_0 + r^2}$$

leur valeur commune. Alors pour chaque n assez élevé $\lambda_1 > c_0 > \lambda'_1$ et les inégalités (9.15) peuvent être remplacées par

$$(9.58) \quad \lambda_1 \geq \lambda_\mu > c_0 \geq \lambda'_{\mu'} \geq \lambda'_1.$$

Les définitions de $\lambda_\mu, \lambda'_{\mu'}, M, M'$ [cf. (9.16), (9.17)] ne changent pas. Les $\lambda'_{\mu'}$ correspondent aux $\vartheta \in [\vartheta_0, \pi)$ et les λ_μ aux $\vartheta \in (0, \vartheta_0)$. Il en découle, vu les relations (9.56) et (9.13), que $|h(\omega_1(\lambda'_{\mu'}))| = |h(\omega_2(\lambda'_{\mu'}))| = O(1)$ et $|f''(\omega_1(\lambda'_{\mu'}))|^{-1} = |f''(\omega_2(\lambda'_{\mu'}))|^{-1} < \frac{1}{c'_1}$, la formule (9.46) reste ainsi valable sans qu'il soit nécessaire de modifier la démonstration.

On déduit des expressions (7.12) et (9.16) que

$$(9.59) \quad \sin^2 \frac{\vartheta(\lambda_\mu)}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta(\lambda_\mu)) \geq c_8 (v_n + \mu) n^{-1},$$

d'où selon (7.20) et (8.10)

$$(9.60) \quad |h(\omega_1(\lambda_\mu))| = |h(\omega_2(\lambda_\mu))| = (v_n + \mu)^{-\frac{1}{4}} O(n^{\frac{1}{4}}).$$

L'expression (9.44) garde évidemment son sens, $\eta(n)^{-1}$ est donné à nouveau par la formule (9.40) et par application de la relation (9.1b) on obtient

$$(9.61) \quad \begin{aligned} \sum_{\mu=1}^M |g_{n\nu\mu}| &= O(n^{-\frac{1}{2}}) \sum_{\mu=1}^M |J_{n\nu\mu}| = \\ &= O(n^{-\frac{3}{4}}) \sum_{\mu=1}^M (v_n + \mu)^{-\frac{1}{4}} + O\{n^{-\frac{11}{12}} (\log n)^{\frac{1}{2}}\} \sum_{\mu=1}^M (v_n + \mu)^{-\frac{1}{4}} = O(1). \end{aligned}$$

Le théorème 1 est ainsi entièrement démontré.

§ 10. Cas de $\delta < \frac{1}{2}$

La première question qui se pose à nouveau est de savoir si la formule (7.3) est applicable ou non dans sa forme originelle. La réponse est affirmative au cas où $\lambda \in [c'_0, c_0]$ [cf. (9.11)] si en opposition à l'inégalité (9.30)

$$(10.1) \quad \lambda^{(0)} \notin [c'_0, c_0].$$

Au fait, dans ce cas $|h(\omega_1)|$ et $|h(\omega_2)|$ sont bornées, $\beta_j = O(\beta^j)$ et d'après les relations (9.13) et (9.14) on a

$$(10.2) \quad \frac{1}{c_1'} > |f''(\omega_1)|^{-1} > \frac{1}{c_1} \quad \text{ou} \quad \eta(n)^{-1} = O(1).$$

Les $\lambda \notin [c_0', c_0]$ et les g_{nv} correspondants ne nous intéressent pas, car nous allons démontrer que d'ores et déjà

$$(10.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{c_0' n \leq \nu \leq c_0 n} |g_{nv}| = +\infty.$$

L'application de la formule (7.3) étant légitime on peut écrire

$$(10.4) \quad |J_{nv}| = |h(\omega_1) e^{nf(\omega_1) + i\tau_1} + h(\omega_2) e^{nf(\omega_2) + i\tau_2}| \left(\frac{2\pi}{n|f''(\omega_1)|} \right)^{\frac{1}{2}} \{1 + O(n^{-1})\}.$$

En tenant compte de l'inégalité (10.2) nous devons seulement prouver que

$$(10.5) \quad |U_n(\lambda)| = |h(\omega_1(\lambda)) e^{nf(\omega_1(\lambda)) + i\tau_1(\lambda)} + h(\omega_2(\lambda)) e^{nf(\omega_2(\lambda)) + i\tau_2(\lambda)}|$$

reste supérieur à une constante $c_9 > 0$, lorsque $c_0' \leq \lambda \leq c_0$. La démonstration sera faite séparément pour les ζ_0 complexes et pour les ζ_0 réels.

I. ζ_0 est complexe. Nous avons déjà remarqué dans l'introduction que pour faciliter la démonstration nous supposons $\delta > 0$, et pour $\delta \leq 0$ nous nous référons au théorème d'inclusion.

D'après l'expression (7.13) de ω_1 resp. ω_2 nous avons

$$(10.6) \quad |1 + \bar{\zeta}_0 \omega_1| = |\omega_1 + \zeta_0| = |1 + \bar{\zeta}_0 \omega_2| = |\omega_2 + \zeta_0| = r_1,$$

et en vertu des relations (7.20) et (8.10)

$$(10.7) \quad |h(\omega_1)| = \frac{r_1^{k+\delta-1}}{2^\delta \cos^\delta \frac{\alpha - \vartheta}{2}} \neq |h(\omega_2)| = \frac{r_1^{k+\delta-1}}{2^\delta \left| \cos \frac{\alpha + \vartheta}{2} \right|^\delta}.$$

Désignons par ϑ_0 et ϑ_0' deux angles constants tels que

$$(10.8) \quad 0 < \vartheta_0 < \vartheta_0' < \min(\alpha, \pi - \alpha)$$

et soient

$$(10.9) \quad c_0 = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \vartheta_0 + r^2}, \quad c_0' = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \vartheta_0' + r^2}.$$

Alors $c_0 > c_0' > \lambda^{(0)}$ [cf. (8.15)], et aux $\lambda \in [c_0', c_0]$ correspondent les $\vartheta \in [\vartheta_0, \vartheta_0']$. Il résulte donc de (10.5) et (10.7) que

$$(10.10) \quad |U_n(\lambda)| \geq ||h(\omega_1)| - |h(\omega_2)|| \geq \frac{r_1^{k+\delta-1}}{2^\delta} \left(\cos^{-\delta} \frac{\alpha + \vartheta_0}{2} - \cos^{-\delta} \frac{\alpha - \vartheta_0}{2} \right) = c_9 > 0.$$

II. ζ_0 est réel. Dans ce cas $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$, donc $|h(\omega_1)| = |h(\omega_2)|$ et les relations (10.7) et (10.10) ne sont plus valables. C'est pourquoi nous démontrons le lemme suivant:

Lemme 7. *Il existe un entier n_0 et deux constantes positives c_{10} et c_{11} indépendants de n tels que l'inégalité*

$$(10.11) \quad |U_n(\lambda)| = \left| U_n \left(\frac{\nu}{n} \right) \right| \geq c_{10}$$

soit vérifiée au moins $[c_{11} n]$ fois, lorsque $n > n_0$ est fixé et $\frac{\nu}{n}$ varie dans un intervalle convenablement choisi contenu par (λ'_1, λ_1) .

Démonstration. Les discussions des cas $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$ étant identiques, nous nous bornons à traiter l'un d'entre eux, soit $\alpha = 0$.

Cette fois-ci $\omega_1 = \bar{\omega}_2$ et on en tire les relations

$$(10.12) \quad h(\omega_1) = \overline{h(\omega_2)}, \quad nf(\omega_1) = \overline{nf(\omega_2)}, \quad \tau_1 = -\tau_2 + 3\pi.$$

Par conséquent le second terme du membre droit de l'expression de $U_n(\lambda)$ [cf. (10.5)] est le conjugué du premier multiplié par -1 , c'est-à-dire

$$(10.13) \quad U_n(\lambda) = 2i \operatorname{Im} h(\omega_1) e^{nf(\omega_1) + i\tau_1} = 2i \operatorname{Im} V_n(\lambda).$$

Introduisons maintenant certaines notations en considérant momentanément λ comme une variable continue. Soit

$$(10.14) \quad X(\lambda) = \arg h(\omega_1) + \tau_1$$

où $\arg h(\omega_1)$ est une des branches continues et univalentes de $\arg h(\omega_1)$ définie le long de l'arc $\omega_1(\lambda)$. $X(\lambda)$ est une fonction analytique de λ dans l'intervalle (λ'_1, λ_1) . Soit de plus

$$(10.15) \quad Y(\lambda) = \operatorname{Im} f(\omega_1) = \frac{1}{i} f(\omega_1).$$

Alors selon l'expression (10.13):

$$(10.16) \quad \arg V_n(\lambda) = X(\lambda) + nY(\lambda) = W_n(\lambda).$$

Commençons par l'examen de $Y(\lambda)$:

$$(10.17) \quad Y'(\lambda) = \operatorname{Im} \left\{ f'(\omega_1) \frac{d\omega_1}{d\lambda} + \log \omega_1 \right\} = \pi - \vartheta > 0$$

[cf. (7.8), $f'(\omega_1) = 0$ selon la définition de ω_1]. Observons que si λ croît dans l'intervalle (λ'_1, λ_1) , $\vartheta(\lambda)$ est une fonction strictement monotone décroissante dans l'intervalle $(0, \pi)$ et ω_1 se déplace dans le sens positif sur l'arc de la frontière du cercle-unité, lequel est situé au-dessus de l'axe réel [cf. (7.12), (7.13)]. Ainsi en vertu de (10.17) on peut affirmer que $Y(\lambda)$ et $Y'(\lambda)$ sont des fonctions strictement monotones croissantes dans l'intervalle (λ'_1, λ_1) .

Choisissons maintenant $\lambda = c_0$ de telle façon que nous ayons

$$(10.18) \quad \vartheta(c_0) = \frac{3\pi}{4}.$$

c'_0 est déterminée par l'égalité

$$(10.19) \quad c'_0 = \frac{1}{2}(\lambda'_1 + c_0).$$

La fonction $Y(\lambda)$ est donc monotone croissante pour $\lambda \in [c'_0, c_0] \subset (\lambda'_1, \lambda_1)$. Les formules (10.17) et (10.18) entraînent aussi

$$(10.20) \quad 0 < Y'(\lambda) \leq \frac{\pi}{4} \quad (\lambda \in [c'_0, c_0]).$$

Soient S l'oscillation de $X(\lambda)$ dans l'intervalle $[c'_0, c_0]$, $T = Y(c_0) - Y(c'_0)$, et associons à chaque entier positif p qui obéit à l'inégalité

$$(10.21) \quad p \frac{S + \pi}{n} \leq T,$$

donc

$$(10.22) \quad p = 1, 2, \dots, \left[\frac{nT}{S + \pi} \right],$$

un nombre $\lambda_p^{(n)} \in [c'_0, c_0]$ vérifiant l'identité

$$(10.23) \quad Y(\lambda_p^{(n)}) - Y(c'_0) = p \frac{S + \pi}{n}.$$

On écrira aussi $\lambda_0^{(n)} = c'_0$. $Y(\lambda)$ étant strictement monotone croissante, on a aussi $\lambda_p^{(n)} > \lambda_{p-1}^{(n)}$. On obtient des relations (10.16) et (10.23)

$$(10.24) \quad W_n(\lambda_p^{(n)}) - W_n(\lambda_{p-1}^{(n)}) = X(\lambda_p^{(n)}) - X(\lambda_{p-1}^{(n)}) + S + \pi \geq \pi.$$

$W_n(\lambda)$ étant une fonction continue, l'inégalité (10.24) exprime le fait qu'il existe un nombre $\lambda_{(p)}^{(n)} \in [\lambda_{p-1}^{(n)}, \lambda_p^{(n)}]$ pour lequel $W_n(\lambda_{(p)}^{(n)})$ est un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$:

$$(10.25) \quad W_n(\lambda_{(p)}^{(n)}) = (2l_p + 1) \frac{\pi}{2},$$

où $l_p \geq 0$ est un entier.

Par ailleurs selon les relations (10.20) et (10.23)

$$(10.26) \quad \frac{S + \pi}{n} = Y(\lambda_p^{(n)}) - Y(\lambda_{p-1}^{(n)}) = (\lambda_p^{(n)} - \lambda_{p-1}^{(n)}) Y'(A_p) \leq \frac{\pi}{4} (\lambda_p^{(n)} - \lambda_{p-1}^{(n)}),$$

$A_p \in [\lambda_{p-1}^{(n)}, \lambda_p^{(n)}]$ est un point convenablement choisi. Il découle de (10.26) que

$$(10.27) \quad \lambda_p^{(n)} - \lambda_{p-1}^{(n)} \geq \frac{4}{n}.$$

L'intervalle $[\lambda_{p-1}^{(n)}, \lambda_p^{(n)}]$ contient donc au moins un point $\frac{\nu_p}{n}$ (ν_p étant un entier) tel que

$$(10.28) \quad \left| \frac{\nu_p}{n} - \lambda_{(p)}^{(n)} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Il est évident que $\nu_p \neq \nu_{p'}$, si $p \neq p'$.

Soit enfin

$$(10.29) \quad X'_0 = \max_{c'_0 \leq \lambda \leq c_0} |X'(\lambda)|,$$

alors grâce aux formules (10.16), (10.20) et (10.28)

$$(10.30) \quad \left| W_n \left(\frac{\nu_p}{n} \right) - W_n(\lambda_{(p)}^{(n)}) \right| \leq \frac{1}{n} \left(X'_0 + n \frac{\pi}{4} \right) = \frac{X'_0}{n} + \frac{\pi}{4}.$$

Soit n_0 aussi élevé qu'on ait $\frac{X'_0}{n_0} \leq \frac{\pi}{8}$, on conclut alors de (10.30)

$$(10.31) \quad \left| W_n \left(\frac{\nu_p}{n} \right) - W_n(\lambda_{(p)}^{(n)}) \right| \leq \frac{3\pi}{8} \quad (n > n_0),$$

et en tenant compte de (10.25) et (10.31)

$$(10.32) \quad (2l_p + 1) \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} \leq W_n \left(\frac{\nu_p}{n} \right) \leq (2l_p + 1) \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}.$$

d'où

$$(10.33) \quad \left| \operatorname{Im} V_n \left(\frac{\nu_p}{n} \right) \right| = \left| h \left(\omega_1 \left(\frac{\nu_p}{n} \right) \right) \sin W_n \left(\frac{\nu_p}{n} \right) \right| \geq \left| h \left(\omega_1 \left(\frac{\nu_p}{n} \right) \right) \right| \sin \frac{\pi}{8}.$$

L'expression (10.7) fournit pour $\alpha = 0$ et $c'_0 \leq \lambda \leq c_0$ la borne inférieure suivante de $|h(\omega_1)|$:

$$(10.34) \quad |h(\omega_1(\lambda))| \geq \frac{r_1^{k+\delta-1}}{2^\delta \cos^\delta \frac{\vartheta(c_0)}{2}} > \frac{r_1^{k+\delta-1}}{2 \sin^\delta \frac{\pi}{8}}.$$

On tire ainsi des formules (10.13), (10.33) et (10.34) que

$$(10.35) \quad \left| U_n \left(\frac{\nu_p}{n} \right) \right| \geq r_1^{k+\delta-1} \sin^{1-\delta} \frac{\pi}{8} = c_{10}.$$

c_{11} est aussi donnée par la relation (10.22)

$$(10.36) \quad c_{11} = \frac{T}{S + \pi}.$$

Le lemme 7 est établi.

Soit donc ζ_0 réel ou non, il existe une constante c_{12} qui est égale à c_9 si ζ_0 est complexe, et à c_{10} si ζ_0 est réel, telle que pour des λ adéquats dans l'intervalle $[c'_0, c_0]$ (où c'_0 et c_0 ont des valeurs différentes selon que ζ_0 est réel ou non) $|U_n(\lambda)| \geq c_{12}$. Pour ces λ

$$(10.37) \quad |J_{nv}| \geq c_{12} \left(\frac{2\pi}{c_1 n} \right)^{\frac{1}{2}} \{1 + O(n^{-1})\} > c_{13} n^{-\frac{1}{2}}$$

[cf. (10.2), (10.4)]. Or, d'après (7.5) et (7.7)

$$(10.38) \quad |g_{nv}| = d_{nv} n^{-\delta} |J_{nv}| > d n^{-\delta} |J_{nv}| \geq c_{14} n^{-\frac{1}{2}-\delta}.$$

Par conséquent (en tenant compte aussi du lemme 7 si ζ_0 est réel)

$$(10.39) \quad \sum_{c_0 n \leq \nu \leq c_1 n} |g_{\nu\nu}| > c_{13} n^{2-\delta}.$$

Étant donné que $\delta < \frac{1}{2}$ cette somme dépasse toute limite quand $n \rightarrow \infty$.

La démonstration du théorème 2 est ainsi achevée.

(Reçu le 20 Janvier 1959.)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] TURÁN, P.: "A remark concerning the behaviour of a power-series on the periphery of its convergence-circle". *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **12** (1958) 19–26.
- [2] ALPÁR, L.: "Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence, I". *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **3** (1958) 1–12.
- [3] ALPÁR, L.: "Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence, II". *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **3** (1958) 141–158.
- [4] RIESZ, M.: "Sur les séries de Dirichlet et les séries entières". *Compte Rendu* **149** (1909) 909–912.
- [5] HARDY, G. H.: *Divergent series*. Calderon Press, Oxford, 1949.
- [6] WATSON, G. N.: *A treatise on the theory of Bessel functions*. University Press, Cambridge, 1952.
- [7] FULKS, W.: "A generalization of Laplace's method". *Proceedings of the American Mathematical Society* **2** (1951) 613–622.
- [8] THOMSEN, D. L. JR.: "Extension of the Laplace method". *Proceedings of the American Mathematical Society* **5** (1954) 526–532.
- [9] BÉKÉSSY, A.: "Bemerkungen zur Engelschen Darstellung reeller Zahlen". *Annales Universitatis Scientiarum Budapestensis de Roland Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* **1** (1958) 143–151.
- [10] DE BRUIJN, N. G.: *Asymptotic methods in analysis*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, P. Noordhoff LTD. — Groningen, 1958.
- [11] RIEMANN, B.: *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*. B. G. Teubner, Leipzig, 1876.

ЗАМЕЧАНИЕ О СУММИРУЕМОСТИ РЯДА ТЕЙЛОРА НА ОКРУЖНОСТИ СХОДИМОСТИ, III.

L. ALPÁR

Резюме

Пусть функция $f_1(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$ и $\zeta_0 \neq 0$ любая фиксированная внутренняя точка этого круга. Тогда функция, определенная соотношением

$$(1) \quad f_2(z) = f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right),$$

также регулярна в единичном круге $|z| < 1$ и поэтому в этом случае обе функции имеют при $|z| < 1$ сходящийся ряд Тейлора:

$$(2) \quad f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu},$$

$$(3) \quad f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(\zeta_0) z^{\nu}.$$

Предполагая еще, что $f_1(z)$ определена и ее ряд Тейлора сходится в одной из точек окружности сходимости, например, в точке $z = 1$, можно поставить следующей вопрос: что можно сказать о поведении ряда (3) в соответствующей точке $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$, являющейся решением уравнения $\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} = 1$? Можно ожидать, что поведение этих рядов будет сходным. Так, например, можно предполагать, что из сходимости ряда

$$(4) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$$

— когда $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_{\nu} = 0$ — следует сходимость ряда

$$(5) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(\zeta_0) \left(\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0} \right)^{\nu},$$

так как, если коэффициенты сходятся к нулю, то сходимость ряда Тейлора на окружности сходимости является локальным свойством, о котором можно предполагать, что неизменно останется, когда над переменной z производится аналитическое преобразование, каким является соотношение (1).

Однако P. TIVÁN [1] доказал, что, во-первых, к данному ζ_0 можно подобрать функцию $f_1(z)$ так, что ее ряд Тейлора (2) сходится в точке $z = 1$, а ряд (3) расходится в точке $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$; во-вторых, если ряд (2) суммируем по Абелю в точке $z = 1$, то этот факт всегда имеет место и для ряда (3) в точке $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$, как бы ни выбирать функцию $f_1(z)$, регулярную в круге $|z| < 1$.

В связи с этими теоремами противоположного характера сам собой встает вопрос: к какому результату приводит применение метода суммирования, более сильного чем вычисление обычной суммы рядов, но более слабого, чем суммирование по Абелю. Таковым является, например, наиболее часто применяющийся метод суммирования (C, k) , когда $0 < k < \infty$.

Исходя из этой идеи, в [2] было доказано, что к данному ζ_0 и к целому $k > 0$ можно подобрать регулярную в круге $|z| < 1$ функцию $f_1(z)$, ряд Тейлора (2) которой (C, k) — суммируем в точке $z = 1$, так, что ряд (3) не суммируем в смысле (C, k) в точке $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$. С другой стороны, в [3] было доказано, что если $k \geq 0$ целое число и ряд (2) (C, k) — суммируем в точке

$z = 1$, то ряд (3) всегда $(C, k + 1)$ — суммируем в точке $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$. Из последней теоремы эвристически уже следует вышеприведенный результат ТУВАН-а о суммируемости по Абелю, так как метод суммирования Абеля часто является предельным случаем суммирования по Чезаро, но если $k \rightarrow \infty$, то $k + 1$ не отличается от k .

Однако приведенные теоремы не достаточны для решения задачи. В предыдущем предполагалось, что k целое число. Но это не необходимое условие, так как определено и суммирование по Чезаро дробного и даже отрицательного порядка. Не выяснено и то, что из (C, k) — суммируемости ряда (4) следует лишь $(C, k + 1)$ — суммируемость ряда (5), или существует такое число $0 < \delta < 1$, с которым последний уже $(C, k + \delta)$ — суммируем. На эти вопросы отвечают две теоремы работы, для формулировки которых пусть $\alpha_n^{(k)}$ означает n -ую (C, k) — среднюю ряда (4), а $\beta_n^{(k+\delta)}$ n -ую $(C, k + \delta)$ — среднюю ряда (5):

Теорема 1. Пусть $k \geq 0$ и $\delta \geq \frac{1}{2}$ данные числа $\zeta_0 \neq 0$ фиксированная

внутренняя точка единичного круга и $f_1(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ регулярная в круге $|z| < 1$ функция, ряд Тейлора которой (C, k) — суммируем в точке $z = 1$. Тогда ряд Тейлора определенной формулой

$$f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) z^v$$

функции $(C, k + \delta)$ — суммируем в точке $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(k+\delta)}.$$

Важным специальным случаем теоремы 1 является тот, когда $k = 0$.

Следствие. Из сходимости ряда $\sum_{v=0}^{\infty} a_v$ всегда следует $(C, \frac{1}{2})$ — суммируемость ряда $\sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) \left(\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}\right)^v$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{(0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(\frac{1}{2})}.$$

Результат противоположного характера имеет место в случае $\delta < \frac{1}{2}$.

Теорема 2. Пусть $k \geq 0$ и $\delta < \frac{1}{2}$ данные числа, $\zeta_0 \neq 0$ фиксированная внутренняя точка единичного круга. Тогда существует регулярная в круге $|z| < 1$ функция $f_1(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ ряда Тейлора которой (C, k) — суммируем

в точке $z = 1$, т. е. $\lim \alpha_n^{(k)}$ существует и для которой ряд (3) не суммируем в смысле $(C, k + \delta)$ в точке $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$, т. е. $\lim \beta_n^{(k+\delta)}$ не существует.

Теорема 2 является обострением теоремы ТУВÁН-а так как последняя утверждает лишь возможность расходимости ряда (5), несмотря на сходимость ряда (4), в то время как согласно теореме 2 сходимость ряда (4) не обеспечивает даже $(C, k + \delta)$ — суммируемости ряда (5), если $0 < \delta < \frac{1}{2}$.

В § 2 доказывается, что между $\alpha_n^{(k)}$ и $\beta_n^{(k+\delta)}$ имеет место соотношение

$$(6) \quad \beta_n^{(k+\delta)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0) \alpha_n^{(k)},$$

где величины $\gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$ зависят лишь от чисел ζ_0 , k , δ , n и ν , но не зависят от выбора функции $f_1(z)$. Соотношение (6) определяет линейный метод суммирования и нужно решить, при каких δ удовлетворяет его матрица $[\gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0)]$ условиям перманентности Теплитца—Шура. Эти условия выполняются, если

I. $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 0$ для всех фиксированных ν ;

II. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0) = 1$;

III. существует такая постоянная $K^{(k,\delta)} > 0$, что неравенство

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0)| < K^{(k,\delta)}$$

справедливо независимо от n .

В § 3 доказывается, что условия I и II всегда выполняются, если $\delta \geq 0$, что необходимо для доказательства теоремы 1.

Дальнейшие параграфы работы занимаются исследованием условия III, в связи с которым возникли наибольшие трудности.

С этой целью в § 4 дается одно асимптотическое выражение $g_{n\nu}$ элементов матрицы $\gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0)$, для которого имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}^{(k,\delta)}(\zeta_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |g_{n\nu}|,$$

где

$$(7) \quad g_{n\nu} = \frac{c_n^{(k+\delta)}}{2\pi i} \frac{\binom{\nu+k}{k}}{\binom{n+k+\delta}{k+\delta}} \int_{|\omega|=2} \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k+\delta-1}}{(1 - \omega)^\delta} \omega^\nu \left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^{n+1} d\omega,$$

$c_n^{(k+\delta)}$ и $|\zeta_0| < \varrho < 1$ постоянные.

В § 5, исходя из (7), доказывається теорема 1 в случае $\delta > \frac{1}{2}$. Здесь используется следующая лемма:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin^{2\delta} t} dt = \begin{cases} O(n^{2\delta-1}), & \text{если } \delta > \frac{1}{2} \\ O(\log n), & \text{если } \delta = \frac{1}{2} \\ O(1), & \text{если } \delta < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Однако этот метод не приводит к цели, если $\delta = \frac{1}{2}$ или $\delta < \frac{1}{2}$.

В § 6 доказываются леммы, утверждающие, что если $\delta = \frac{1}{2}$ и n фиксированное, большое число, то существует два таких индекса: $\nu_1 = \lambda_1 n > \nu'_1 = \lambda'_1 n$, для которых

$$\sum_{\nu=0}^{\nu'_1-1} |g_{n\nu}| = O(1), \quad \sum_{\nu=\nu_1+1}^{\infty} |g_{n\nu}| = O(1),$$

и что числа $|g_{n\nu}|$ не превосходят общей грани. Таким образом, надо исследовать лишь сумму $\sum_{\nu=\nu'_1}^{\nu_1} |g_{n\nu}|$.

В случаях $\delta \leq \frac{1}{2}$ и $\nu'_1 \leq \nu \leq \nu_1$ асимптотическое значение $g_{n\nu}$ в случае большого, фиксированного n и каждого ν может быть определено методом наискорейшего спуска. В § 7 определяются точки наискорейшего спуска. Так как уравнение

$$\left(\frac{1 + \zeta_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)' = 0$$

не имеет конечного корня, вводится новый параметр $\lambda = \frac{\nu}{n}$ ($\lambda'_1 \leq \lambda \leq \lambda_1$)

и вместо $\left(\frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^n$ исследуется функция $\left(\omega^\lambda \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^n$. Уравнение $\left(\omega^\lambda \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)' = 0$ уже имеет два конечных корня, т. е. имеются две точки наискорейшего спуска, расположенные на единичной окружности и изменяющие свое положение, если λ изменяется.

В § 8 строится интегральная кривая L_λ , меняющая свою форму и положение вместе с изменением положения точек наискорейшего спуска и проходящая через них.

В § 9 завершается доказательство теоремы 1 в случае $\delta = \frac{1}{2}$. Так как L_λ проходит через две точки наискорейшего спуска, необходимо вычислить два асимптотических значения и детально изучить их сумму. Усложняет положение то, что точки наискорейшего спуска могут быть как угодно близки друг к другу и к точке $\omega = 1$, а в этом последнем случае подинтегральная функция уже не ограничена. Надо отдельно рассматривать случаи, когда ζ_0 вещественное и комплексное число.

В § 10 завершается доказательство теоремы 2. Особенно трудно доказать тот факт, что когда ζ_0 вещественно, сумма двух упомянутых асимптотических значений больше независимого от n и ν положительного числа.