

# ÜBER EIN PROBLEM DER GASDYNAMIK (CHARAKTERISTISCHE RANDWERTAUFGABE MIT UNSTETIGKEITEN IN DEN RANDWERTEN)

VON

IMRE BIHARI<sup>1</sup>, TAMÁS FREY<sup>1</sup> und ÁRPÁD PETHŐ<sup>2</sup>

## § 1. Über das chemisch-physikalische Problem

1.1. Es sind in der Chemie mehrere Verfahren zur Trennung von Gemischen bekannt, die mit Materialtransportprozessen zwischen bewegten Phasen in Beziehung stehen. Unter diesen rief der als »Gas-Chromatographie« bezeichnete Prozeß in den vergangenen Jahren ein großes Interesse hervor [1]. Im folgenden wollen wir dieses Verfahren quantitativ behandeln, unter zahlreichen Vereinfachungen des wirklichen physikalischen Bildes. Dieses vereinfachte Modell soll durch die Kriterien beschrieben werden:

I. Ein Gasgemisch, das eine einzige (ad- oder ab-)sorbierbare Komponente enthält, strömt neben der ruhenden Phase (die die Rolle des Ad- bzw. Absorbens spielt) in einem (in der einen Richtung als unendlich lang vorausgesetzten) Rohr;

II. Das Verhältnis der Volumina der sich bewegenden und ruhenden Phase ist längs des Strömungsrohres unverändert;

III. Es tritt kein Konzentrationsgradient in der Gas- und Sorptionsphase senkrecht zur Strömungsrichtung auf;

IV. Die Diffusionsprozesse in der Strömungsrichtung werden vernachlässigt;

V. Die Geschwindigkeit des Sorptionsvorganges hängt linear von den Konzentrationen in der sich bewegenden bzw. ruhenden Phase (s. weiter unten) ab;

VI. Die Vorgänge verlaufen unter isothermen und isobaren Verhältnissen.<sup>3</sup>

Nun sind die Konzentrationen der sorbierbaren Komponente in der Gasphase bzw. im Sorbens und die Geschwindigkeit des Gasstromes als Funktion von Ort und Zeit zu berechnen. Zwecks Aufstellung der Differentialgleichungen werden zunächst die folgenden Begriffe eingeführt:

$x$ : die Ortskoordinate [cm];

$y$ : die Zeit [sec];

$u(x, y)$ : das im Sorbens gebundene Gasvolumen geteilt durch das Volumen der Gasphase, beide auf die Längeneinheit des Rohres bezogen [1];

<sup>1</sup> Technische Hochschule, Budapest.

<sup>2</sup> Zentralforschungsinstitut für Chemie, Budapest.

<sup>3</sup> Bezüglich einigermaßen ähnlicher Systeme siehe [2].

$v(x, y)$ : der Volumenbruch der sorbierbaren Komponente in der Gasphase [1];

$c(x, y)$ : die Geschwindigkeit des Gasstromes [cm sec<sup>-1</sup>];

$k_1$  und  $k_2$ : Geschwindigkeitskonstanten der Sorption [sec<sup>-1</sup>].

Betrachten wir nun einen Abschnitt des Rohres, der vom Nullpunkt bis zur Koordinate  $x$  reicht und eine Zeitdauer vom Zeitpunkt 0 bis  $y$ , dann lassen sich die Kontinuitätsgleichungen für die gegebenen Intervalle und die sorbierbare bzw. andere (nicht sorbierbare) Komponente des Gasgemisches folgendermaßen aufschreiben:

$$(1) \quad \int_0^y c(x, \eta) v(x, \eta) d\eta + \int_0^x [u(\xi, y) + v(\xi, y)] d\xi = \\ = \int_0^y c(0, \eta) v(0, \eta) d\eta + \int_0^x [u(\xi, 0) + v(\xi, 0)] d\xi,$$

$$(2) \quad \int_0^y c(x, \eta) [1 - v(x, \eta)] d\eta + \int_0^x [1 - v(\xi, y)] d\xi = \\ = \int_0^y c(0, \eta) [1 - v(0, \eta)] d\eta + \int_0^x [1 - v(\xi, 0)] d\xi.$$

Differenzieren der Gleichungen (1) und (2) nach  $x$  und  $y$  ergibt (die Indizes  $x$  und  $y$  bedeuten Ableitungen):

$$(3) \quad (cv)_x + u_y + v_y = 0$$

$$(4) \quad -(cv)_x + c_x - v_y = 0.$$

Zu diesen Kontinuitätsgleichungen ist noch die Gleichung der Sorption nach VI. hinzuzufügen:

$$(5) \quad u_y = k_1 v - k_2 u$$

oder

$$(6) \quad u_y = k_1 \left( v - \frac{k_2}{k_1} u \right).$$

Werden die Bezeichnungen

$$(7) \quad t = k_1 y$$

$$(8) \quad w = \frac{c}{k_1}$$

$$(9) \quad l = \frac{k_2}{k_1}$$

ins Gleichungssystem (3)—(4)—(6) eingeführt (die funktionellen Beziehungen werden wiederum durch  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$ ,  $w(x, t)$  bezeichnet), so erhält man

(statt (4) sei die Summe von (3) und (4) genommen):

$$(10) \quad (wv)_x + u_t + v_t = 0$$

$$(11) \quad u_t + w_x = 0$$

$$(12) \quad u_t + lu - v = 0.$$

Nach den Gleichungen (1) und (2) können folgende Funktionen als Rand- und Anfangsbedingungen vorgeschrieben werden (unter Berücksichtigung von (7) und (8)):

$$(13) \quad v(0, t) = v_0(t)$$

$$(14) \quad w(0, t) = w_0(t)$$

$$(15) \quad u(x, 0) = u^0(x)$$

$$(16) \quad v(x, 0) = v^0(x).$$

Aus der physikalischen Natur des Problems folgt aber unmittelbar, dass gewisse Einschränkungen für diese Funktionen gelten; nach der Definition von  $v$  bzw.  $w$  bestehen die Ungleichungen:

$$0 \leq v_0(t) \leq 1, \quad 0 \leq v^0(x) \leq 1, \quad w_0(t) > 0;$$

ferner wird in der Praxis immer angenommen, daß sich die Phasen anfangs im Gleichgewicht befinden, d. h.  $u_t = 0$  ( $t = 0$ ), daher sind  $u^0(x)$  und  $v^0(x)$  gemäß (12) voneinander abhängig:

$$0 \leq u^0(x) = \frac{v^0(x)}{l} \leq \frac{1}{l}.$$

12. Anstatt des vorangehenden Problems sei nun das einfachere (welches auch dem physikalischen Bild vollkommen entspricht) wie folgt betrachtet: Es ist das Gleichungssystem (10)–(11)–(12) mit den Rand- und Anfangswerten zu lösen:

$$(1') \text{ Problem »A«: } 0 \leq v_0(t) \leq 1, \quad w_0(t) = w_0 = \text{const.}, \quad u^0(x) = v^0(x) = 0$$

bzw.

$$(2') \text{ Problem »B«: } v_0(t) = 0, \quad w_0(t) = w_0 = \text{const.}, \quad 0 \leq u^0(x) = \frac{v^0(x)}{l} \leq \frac{1}{l}.$$

Im weiteren wollen wir uns mit der Lösung des Problems »A« befassen. Sei  $v_0(t)$  in der Gestalt

$$(3') \quad v_0(t) = M \tau(t), \quad 0 \leq M = \max v_0(t) \leq 1.$$

dargestellt. Versuchen wir nun die Lösung des Problems »A« so darzustellen, daß wir die Funktionen  $u, v, w$  und die Anfangs- und Randbedingungen nach Potenzen von  $M$  entwickeln

$$(4') \quad u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, t) M^k, \quad v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, t) M^k, \quad w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, t) M^k$$

$$(5') \quad v_k(0, t) = \begin{cases} 0, & k = 0, 2, 3, \dots \\ \tau(t), & k = 1 \end{cases}; \quad w_k(0, t) = \begin{cases} w_0, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots \end{cases}; \quad u_k(x, 0) = v_k(x, 0) = 0.$$

Nun sind die Beiwerte  $u_k, v_k, w_k$  zu bestimmen.

Für  $k = 0$  besteht nach (10)–(11)–(12):

$$(6') \quad \begin{aligned} (w_0 v_0)_x + (v_0)_t + (u_0)_t &= 0 & v_0(0, t) &= 0 \\ (u_0)_t + (w_0)_x &= 0 & ; & w_0(0, t) = w_0 \\ (u_0)_t + l u_0 - v_0 &= 0 & u_0(x, 0) &= v_0(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Problems ist offenbar

$$(7') \quad u_0(x, t) = 0, \quad v_0(x, t) = 0, \quad w_0(x, t) = w_0,$$

Für  $k = 1$  besteht nach (10)–(11)–(12), unter Berücksichtigung von (7')

$$(8') \quad w_0(v_1)_x + (v_1)_t + (u_1)_t = 0$$

$$(9') \quad (u_1)_t + (w_1)_x = 0$$

$$(10') \quad (u_1)_t + l u_1 - v_1 = 0$$

$$(11') \quad v_1(0, t) = \tau(t), \quad w_1(0, t) = 0, \quad u_1(x, 0) = v_1(x, 0) = 0.$$

Die Lösung des linearen partiellen Gleichungssystems mit konstanten Koeffizienten (8')–(10') wird auch in der Literatur behandelt [3, 4, 5], und in Kenntnis von  $u_1$  ergibt sich auch  $w_1$  durch Integration. Für  $k = 2, 3, \dots$  besteht das folgende lineare partielle Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$(12') \quad \begin{aligned} w_0(v_k)_x + (v_k)_t + (u_k)_t &= -(w_1 v_{k-1} + \dots + w_{k-1} v_1) \equiv f_k(x, t) \\ (u_k)_t + (w_k)_x &= 0 \\ (u_k)_t + l u_k - v_k &= 0 \\ v_k(0, t) = w_k(0, t) = u_k(x, 0) &= v_k(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Demgemäß, da für  $k = 2$   $f_2(x, t)$  nach dem Vorangehenden schon bekannt ist, lassen sich die Lösungen  $u_2, v_2, w_2$  bestimmen und im allgemeinen: im  $k$ -ten Schritt der Iteration ist schon  $f_{k-1}(x, t)$  bekannt worden, wodurch sich die Lösungen  $u_k, v_k, w_k$  angeben lassen. Somit können die Beiwerte der Reihenentwicklungen (4'), also auch die gesuchten Funktionen  $u, v, w$  dargestellt werden.

Bei der Lösung des Problems »B« setzt man (im allgemeinen werden keine neuen Bezeichnungen gebraucht)

$$(13') \quad v^0(x) = M \xi(x), \quad 0 \leq M = \max v^0(x) \leq 1$$

und zieht die Reihenentwicklungen (4') heran. Jetzt gilt:

$$(14') \quad \begin{aligned} v_k(0, t) = 0; \quad w_k(0, t) &= \begin{cases} w_0, & k = 0 \\ 0, & k = 1, 2, \dots \end{cases} ; \\ u_k(x, 0) = \frac{v_k(x, 0)}{l} &= \begin{cases} 0, & k = 0, 2, 3, \dots \\ \frac{\xi(x)}{l}, & k = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Beiwerte  $u_k, v_k, w_k$  können ähnlich wie die im Problem »A« bestimmt werden: (6') bzw. (7') bleiben ungeändert, neben (8')–(9')–(10') sind jetzt die Bedingungen gültig:

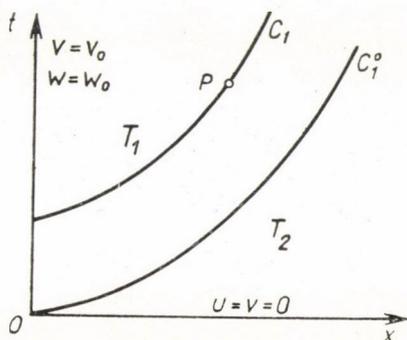
$$(15') \quad \begin{aligned} v_1(0, t) = w_1(0, t) &= 0 \\ u_1(x, 0) = \frac{v_1(x, 0)}{l} &= \frac{\xi(x)}{l}, \end{aligned}$$

und (12') bleibt ebenso ungeändert.

§ 2. Die Lösung des Problems in einem einfachen Falle mit der Methode der Charakteristiken

21. Nach einigen Umformungen lauten unsere Gleichungen (10)—(11)—(12):

$$(17) \quad \begin{cases} v_t + [(v - 1)w]_x = 0 \\ u_t + w_x = 0 \\ u_t + lu - v = 0. \end{cases}$$



Figur 1.

Wir nehmen erstens die folgenden einfachen Nebenbedingungen an:

$$(18) \quad \begin{cases} v(0, t) = v_0, & w(0, t) = w_0 \\ v(x, 0) = u(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (0 < v_0 = \text{const.} \leq 1, w_0 = \text{const.} > 0)$$

Die Funktion  $v(x, t)$  hat einen Sprung im Anfangspunkt, folglich kann die Aufgabe für alle drei Funktionen  $u, v, w$  keine stetigen Lösungen besitzen.

Doch zeigen wir, daß eine Lösung im Teil  $T : x \geq 0, t \geq 0$  der Ebene existiert, die bis auf eine aus dem Nullpunkt ausgehende Kurve  $C_1^0$  stetig und einmal stetig differenzierbar ist, wo (d. h. längs  $C_1^0$ ) die Funktion  $v$  (beim Durchschritt) samt mit gewissen Ableitungen (s. (17) und die letzten Zeilen des Punktes 23.) einen Sprung hat, dagegen die Funktionen  $u$  und  $w$  stetig bleiben.

Die Kurve  $C_1^0$  trennt das Gebiet  $T$  in zwei Gebiete:  $T_1, T_2$ . (Der obere sei  $T_1$ , s. Fig. 1). Die genauere Begrenzung dieser wird später (in 24.) behandelt werden.

22. Vorläufig nur die Existenz einer solchen Lösung angenommen, leiten wir ein mit (17) gleichwertiges Gleichungssystem der gleichen Art für zwei Funktionen ab. — Es folgt aus (17)

$$u_{tt} = -w_{xt} = v_t - lu_t = -[(v - 1)w]_x + lw_x.$$

Die zweiten Ableitungen  $u_{tt}$  und  $w_{xt}$  existieren und sind nach unseren Voraussetzungen und nach (17) sowohl im Innern von  $T_1$ , als im Innern von  $T_2$

(aber nicht auf  $C_1^0$ ) stetig. — So gilt in  $T_1$  und  $T_2$  (nicht aber auf  $C_1^0$ )

$$-w_{xt} = -w_{tx} = -[(v-1)w]_x + lw_x,$$

also durch Integrieren nach  $x$

$$(19) \quad w_t = (v-1-l)w + C(t).$$

Im Grundsatz kann  $C(t)$  in  $T_1$  und in  $T_2$  verschiedene Formen, d. h. längs  $C_1^0$  einen Sprung haben, doch liegt dieser Fall nicht vor, wie wir es sofort zeigen. Aus (17) folgt

$$v = u_t + lu = -w_x + lu.$$

Setzen wir dies in (19) ein, so erhalten wir

$$(20) \quad w_t + ww_x = (lu - 1 - l)w + C(t).$$

Es sei die Kurvenschar mit der Gleichung  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{w(x,t)}$  (oder  $\frac{dx}{dt} = w(x,t)$ ) mit  $C_1$  bezeichnet. Nach unseren Annahmen über  $w (> 0)$  werden  $T_1$  und  $T_2$  einfach von ihr bedeckt. Sei  $\bar{C}_1^0$  das durch 0 gehende Glied von  $C_1$ . Später (im Punkt 24.) werden wir zeigen, dass  $\bar{C}_1^0 \equiv C_1^0$  besteht. Vorläufig soll dies angenommen werden und wir schreiben im folgenden  $C_1^0$  statt  $\bar{C}_1^0$ .

Der Ausdruck  $w_t + ww_x$  bedeutet die (innere) Ableitung von  $w(x, t)$  längs  $C_1$  (mit  $C_1$  soll auch das Glied der Schar  $C_1$  durch irgendeinen Punkt  $P$  bezeichnet werden, s. Fig. 1.). So haben wir

$$(20') \quad \frac{dw}{dt} = w_t + ww_x = (lu - 1 - l)w + C(t).$$

Bezeichnen wir mit  $[p]$  den Sprung einer Funktion  $p(x, t)$  längs  $C_1^0$ , dann ist nach (20') (da  $u$  und  $w$  keine Sprünge haben)

$$\left[ \frac{dw}{dt} \right] = [C(t)],$$

Die innere Ableitung  $\frac{dw}{dt}$  hat aber längs  $C_1^0$  keinen Sprung, denn  $w(x, t)$  ist überall stetig, also  $[C(t)] = 0$ , was zu beweisen war. — So hat die Funktion  $C(t)$  dieselbe Form in beiden Gebieten  $T_1$  und  $T_2$ . Ihr Wert in  $T_1$  ergibt sich unmittelbar, wenn man in (19)  $x = 0$  setzt:  $C(t) = -(v_0 - l - 1)w_0$ . In unserem Fall ist speziell  $C(t) = \text{const.}$  Aus (17) und (19)

$$[w(v-1)]_t + w[w(v-1)]_x = w_t(v-1) = (v-1)[(v-1-l)w + C(t)].$$

Benützt man die Bezeichnung  $w(v-1) = z$  in der obigen Gleichung bzw. in (19), so erhalten wir

$$(21) \quad \begin{cases} z_t + wz_x = \frac{z}{w}(z - lw + C(t)), \\ w_t = z - lw + C(t), \end{cases}$$

d. h. ein System ähnlich (17), aber nur mit zwei Funktionen  $z(x, t)$  und  $w(x, t)$ . Die Nebenbedingungen lauten hier wie folgt:

$$[z(0, t) = w_0(v_0 - 1), \quad w(0, t) = w_0, \quad z(x, 0) = -w(x, 0) = -w_0$$

(da nach (17)  $w_x(x, 0) = -u_t(x, 0) = 0$  und  $w(0, 0) = w_0$  gelten).

Die mit (21) verknüpfte Randwertaufgabe ist mit der ursprünglichen in dem Sinne gleichwertig, daß man aus irgendeiner Lösung der einen eine Lösung für die andere Aufgabe konstruieren kann.

Das hyperbolische quasilineare System (21) besitzt zwei Scharen von Charakteristiken. Die eine ist die oben definierte Schar  $C_1$ . Die Geraden, parallel mit Achse  $t$  bilden die andere Schar:  $C_2$ . Die Ausdrücke  $z_t + wz_x$  bzw.  $w_t$  sind ja innere Ableitungen längs dieser Scharen. Der Rand  $x=0$  ist selbst auch eine Charakteristik, der Rand  $t=0$  aber keine.

23. Bestimmen wir die „Hauptcharakteristik“  $C_1^0$  und unsere Funktionen längs dieser, d. h. die sog. „Wellenfront“.

Wir zeigen in 29. I., daß längs  $C_1^0$   $u = 0$  ist. Dann folgt aus (20') (die Werte längs  $C_1^0$  werden mit einem oberen Index  $^\circ$  bezeichnet)

$$(22) \quad \frac{dw^0}{dt} = C(t) - (l + 1)w^0,$$

also eine gewöhnliche Differentialgleichung für  $w^\circ = w^\circ(t)$ . Betrachten wir z. B. den Fall  $v_0 = \text{const.}$ , folglich  $C(t) = (1 + l - v_0)w_0 = \text{const.}$ ;  $w^\circ(0) = w_0$  wegen bekommen wir

$$(23) \quad w^0 = w^0(t) = \frac{w_0(l + 1 - v_0)}{l + 1} + \frac{w_0 v_0}{l + 1} e^{-(l+1)t}.$$

Da  $\frac{dx}{dt} = w^0(t)$  ist, lautet die Gleichung von  $C_1^0$

$$(24) \quad x = \frac{w_0(l + 1 - v_0)}{l + 1} t - \frac{w_0 v_0}{(l + 1)^2} e^{-(l+1)t} + \frac{w_0 v_0}{(l + 1)^2}.$$

Gemäß (17) gilt

$$v_t + w_x(v - 1) + wv_x = v_t + wv_x + (v - 1)(lv - v) = 0,$$

also längs  $C_1^0$  (wo  $u = u^\circ = 0$ )

$$(25) \quad \frac{dv^0}{dt} = (v_t + wv_x)^0 = (v^0 - 1)v^0,$$

woraus folgt

$$v^0 = v^0(t) = \frac{v_0}{v_0 + (1 - v_0)e^t}.$$

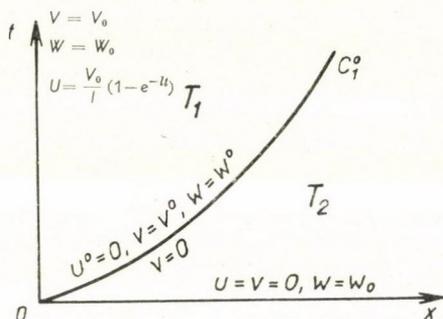
Wie wir es in 24. sehen werden, ist dies der Grenzwert von  $v$  bei einer Annäherung zu  $C_1^0$  von der Seite von  $T_1$  her. In demselben Sinne gibt (25) den Wert

von  $u_t = -w_x$ , (19) aber denjenigen von  $w_t$  längs  $C_1^0$ . Es gelten ferner längs  $C_1^0$  die Gleichungen:  $u = 0$ ,  $\frac{du}{dt} = u_t + wu_x = 0$  und so  $u_x = -\frac{1}{w}u_t$ .

24. Jetzt trennt sich unser Ausgangsproblem I. in die folgenden (II. und III.):

II. Es soll das auf  $T_2$  und (21) bezügliche Cauchy'sche, *nicht charakteristische* Anfangswertaufgabe gelöst werden, wo die Anfangslinie die nicht charakteristische Achse  $x$  ist;

III. Es soll die auf  $T_2$  bezügliche Aufgabe gelöst werden, aber die Anfangslinien (die Achse  $t$  und die Kurve  $C_1^0$ ) sind hier Charakteristiken. Wir haben



Figur 2.

also mit einer *charakteristischen* Anfangswertaufgabe zu tun. Die Randwerte (die Belegungen) sind von Fig. 2. ablesbar.

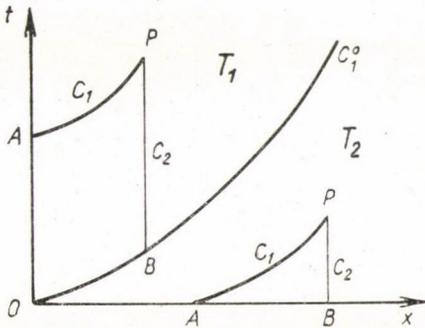
Wie bekannt (s. [6]), besitzen beide Aufgaben genau je eine Lösung, die stetig differenzierbar sind und stetige gemischte zweite Ableitungen haben, d. h. die vereinigten Lösungen von II. und III. geben genau die *einzig*e Lösung der Aufgabe I., die stetig von den Anfangs- und Randwerten abhängt. Von der Gestalt und Größe von  $T_2$  wissen wir nur soviel, dass  $T_2$  sich auf eine gewisse Umgebung der Achse  $x$  — gelegentlich auf den ganzen Teil  $x \geq 0$ ,  $t \geq 0$  der Ebene  $x, t$  unter  $C_1^0$  — ausbreitet (s. [7]). Das Gebiet  $T_1$  ist dagegen ein von Charakteristiken begrenztes Viereck. Das Abhängigkeitsgebiet eines Punktes  $P$  wird in beiden Fällen durch die durch  $P$  gehenden Charakteristiken aus den Anfangslinien ausgeschnitten. Die erhaltene Lösung genügt allen unseren Bedingungen, ist einzig und stabil, folglich ist *die* Lösung des Problems. Der Sprung von  $v$  längs  $C_1^0$  tritt tatsächlich auf (s. in 29. I.) und nur hier, womit die behauptete Identität  $\bar{C}_1^0 = C_1^0$  bewiesen ist. Dagegen sind die Funktionen  $u$  und  $w$  im ganzen Gebiet  $T$  stetig (s. an derselben Stelle). — Da  $w^0(t)$  mit  $t \rightarrow +\infty$  endlich bleibt, ist die Lösung über alle Grenzen fortsetzbar (also für das ganze Gebiet  $T$ ). In den einigen Teilgebieten der Figur können die Lösungen der Reihe nach (s. die Numerierung der Fig. 4.) bestimmt werden.

25. Für die Gewinnung von angenäherten Lösungen kann die Gitterpunktmethod von H. LEWY, oder die Iterationsmethode von R. COURANT dienen, aber die erste gibt keine Näherungsformeln, die andere führt auf einen Iterationsprozeß mit 12 Integralen (zwischen denen 4 zweifache Integrale).

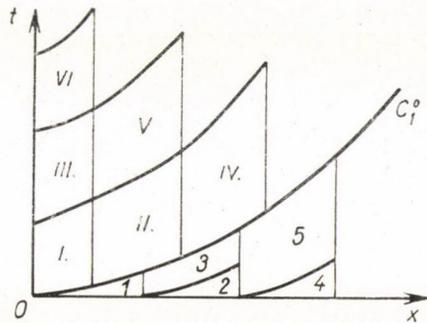
Viel einfacher ist eine andere von R. COURANT und P. LAX stammende Methode [7]:

Durch Integration der Gleichungen (21) längs der entsprechenden Charakteristiken bekommen wir die folgenden Integralgleichungen (s. Fig. 3.).

$$(26) \quad \begin{cases} z(P) = z(A) + \int_{\widehat{AP}} \frac{z}{w} (z - lw + C) dt = z(A) + \int_{\widehat{AP}} \frac{z}{w^2} (z - lw + C) dx, \\ w(P) = w(B) + \int_{\widehat{BP}} (z - lw + C) dt. \end{cases}$$



Figur 3.



Figur 4.

Für nicht charakteristische Anfangswertaufgaben haben COURANT und LAX gezeigt, daß die auf Grund von (26) durchgeführte Iteration — in einem gewissen Gebiet — gleichmäßig gegen einer — der Funktionenklasse  $C_1 + \text{Lip}(1)$  angehörigen — Lösung konvergiert, wenn die Anfangs- und Randwerte — wie jetzt — auch hierher gehören. Bei der Anwendung der Methode bestimmen sich die Charakteristiken  $C_1$  auch durch dieselbe Iteration (s. in 29. II.) mit.

Unsere Aufgabe ist charakteristisch in  $T_1$ , nicht aber in  $T_2$ . Der genannte Prozess ist also für  $T_2$  unmittelbar anwendbar. Wir machen davon auch in  $T_1$  Gebrauch, doch verschieben wir die Behandlung der Konvergenz zu § 4.

Natürlich gilt dies alles erstens nur auf ein kleines Gebiet in der Nähe der Anfangslinien, dann kann aber die Lösung stetig fortgesetzt werden, wie oben bemerkt wurde.

Wir bestimmen unsere Näherungswerte aber nicht mit Hilfe von (21) und (26), denn eine noch einfachere, unmittelbare Methode wird dafür dargelegt werden (s. den Punkt 28.).

26. Wir geben aber erst noch eine weitere Methode an.

Den Gleichungen (17<sub>1</sub>)—(17<sub>2</sub>) gemäss gibt es zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $\varphi = \varphi(x, t)$  und  $\psi = \psi(x, t)$ , für die

$$(27) \quad \begin{cases} \varphi_x = v, & \varphi_t = -(v - 1)w \\ \psi_x = u, & \psi_t = -w \end{cases}$$

gelten. Diese in (17<sub>3</sub>) gesetzt erhält man

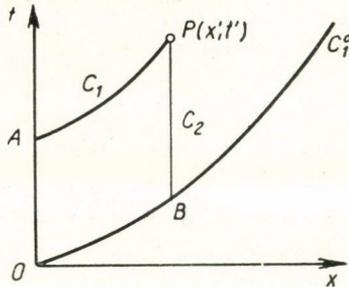
$$(28) \quad \psi_{xt} = \psi_{tx} = \varphi_x - l\psi_x, \text{ bzw. } \psi_t = \varphi - l\psi + C(t), \quad C(t) = (v_0 - l - 1)w_0 t + c$$

Aus (27)–(28)

$$\varphi_t = (\varphi_x - 1) \psi_t \quad \text{bzw.} \quad \varphi_x + \frac{1}{-\psi_t} \varphi_t = 1.$$

Somit ergibt sich folgendes System für  $\varphi$  und  $\psi$

$$(29) \quad \begin{cases} \varphi_x + \frac{1}{l\psi - \varphi - C(t)} \varphi_t = 1, \\ \psi_t = \varphi - l\psi + C(t). \end{cases}$$



Figur 5.

Die Gleichung der einen charakteristischen Schar ( $C_1$ ) ist  $\frac{dx}{dt} = l\psi - \varphi - C(t) = w$ , die Parallelen der Achse  $t$  bilden die andere Schar ( $C_2$ ), d. h. die beiden Scharen stimmen mit denen des schon betrachteten Falles überein. Die Integralgleichungen sind als *lineare* — doch einfacher:

$$(30) \quad \begin{cases} \varphi(P) = \varphi(A) + \int_{AP} dx = \varphi(A) + x', \\ \psi(P) = \psi(B) + \int_{BP} (\varphi - l\psi + C(t)) dt. \end{cases}$$

Die Konstante  $c$  von  $C(t)$  kann bestimmt werden, wenn wir die Differentialgleichung von  $C_1^0$  mit ihrer durch den vorigen Weg gewonnenen Gleichung vergleichen. So hat man  $c = -w_0$ . Aus (27) (die Integrationskonstante sei als 0 gewählt) ergeben sich die Nebenbedingungen für  $\varphi$  und  $\psi$ :

$$\varphi(x, 0) = \psi(x, 0) = 0, \quad \varphi(0, t) = -(v_0 - 1)w_0 t, \quad \psi(0, t) = -w_0 t.$$

Aus (30<sub>1</sub>) haben wir  $\varphi^0 = \varphi^0(x) = x$  und aus (23), (27), (28)  $\psi^0 = \psi^0(x) = -x$ .

Die auf Grund von (30) durchgeführte Iteration gibt gute Näherungswerte nicht rasch, da sich  $u$ ,  $v$ ,  $w$  aus Annäherungen von  $\varphi$ ,  $\psi$  durch Differenzieren erhalten lassen.

27. Diese Methode der Einführung der Potenzialfunktionen  $\varphi$  und  $\psi$  kann auch zur Gewinnung von Lösungen in geschlossener Form verwendet werden, die von einer Konstante und von einer willkürlichen Funktion abhängen.

Es sei

$$(a) \quad \varphi + C(t) = D(x),$$

wo  $D(x)$  eine willkürliche Funktion von  $x$  ist. Aus (28)

$$\psi_t + l\psi = D(x), \quad \text{d. h.} \quad \psi_{tt} + l\psi_t = 0$$

und so

$$(\beta) \quad -w = \psi_t = E(x) e^{-lt}$$

( $E(x)$  ist eine willk. F. von  $x$ ).

Hieraus

$$(\beta') \quad \psi = -\frac{E(x)}{l} e^{-lt} + F(x)$$

( $F(x)$  ist eine willk. F. von  $x$ )  
und

$$(\gamma) \quad u = \psi_x = -\frac{E'(x)}{l} e^{-lt} + F'(x).$$

Aus (a)

$$\varphi_x = D'(x), \quad \varphi_t = -C'(t),$$

folglich mit Hilfe von (27) und ( $\beta$ )

$$(\delta) \quad v = D'(x), \quad w(1-v) = -C'(t)$$

bzw.

$$-E(x) e^{-lt} [1 - D'(x)] = -C'(t).$$

Durch Trennung der Variablen erhalten wir

$$E(x) [1 - D'(x)] = C'(t) e^{lt} = K = \text{const.}$$

also

$$v = D'(x) = 1 - \frac{K}{E(x)}, \quad C'(t) = K e^{-lt}.$$

(17<sub>3</sub>), ( $\gamma$ ), ( $\delta$ ) gemäss

$$E'(x) e^{-lt} = 1 - \frac{K}{E(x)} + E'(x) e^{-lt} - l F'(x)$$

und so

$$F'(x) = \frac{1}{l} \left( 1 - \frac{K}{E(x)} \right).$$

Als Endresultat bekommen wir

$$(\epsilon) \quad \begin{cases} v(x, t) = 1 - \frac{K}{E(x)}, \\ w(x, t) = -E(x) e^{-lt} \\ u(x, t) = -\frac{1}{l} E'(x) e^{-lt} + \frac{1}{l} \left( 1 - \frac{K}{E(x)} \right), \end{cases}$$

eine Lösung in geschlossener Form — ( $\epsilon$ ) erfüllt (17) in der Tat — die aber bei keiner Wahl der willkürlichen Konstanten  $K$  und der Funktion  $E(x)$  *allen* Nebenbedingungen

genügt. Diese Lösung kann z. B. bei einer Rand- und Anfangswertaufgabe benutzt werden, wo  $u(x, 0) = 0$  ist. Diese führt zu der Gleichung

$$E'(x) + \frac{K}{E(x)} - 1 = 0,$$

die für  $E(x)$  leicht gelöst werden kann. Die Lösung enthält neben  $K$  noch eine Konstante so, dass zwei weitere über  $u, v, w$  gestellte Bedingungen erfüllt werden können. Ähnlicherweise gelangen wir mit der Annahme  $\varphi + C(t) = D(x)t$  statt  $(\alpha)$  zu Lösungen ganz anderer Art, die (18) nicht genügen. Auf diese Fragen wird hier nicht eingegangen.

28. Es ist eine sehr durchsichtige und auf viel bessere Näherungswerte führende Methode, bei der man (17) in seine charakteristische Form, also in ein System von drei Gleichungen für  $u, v, w$  überführt, indem jede Gleichung nur in einer Richtung genommene Ableitungen enthält. Das wird auf folgende Weise erreicht. Aus (17)

$$v_t + wv_x = w_x(1 - v) = -u_t(1 - v) = (lu - v)(1 - v),$$

mithin hat man das System

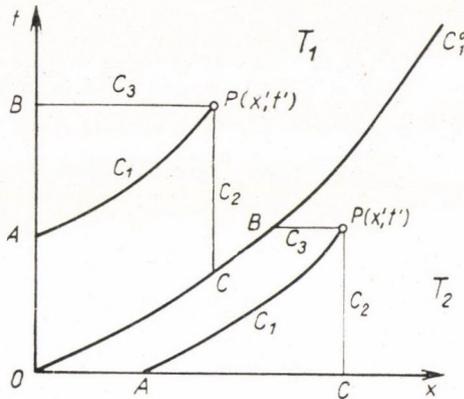
$$(31) \quad \begin{cases} v_t + wv_x = (lu - v)(1 - v), \\ w_x = lu - v, \\ u_t = v - lu. \end{cases}$$

Die charakteristischen Scharen sind genau die vorigen Scharen, aber es gibt noch eine dritte  $C_3$ : die Schar der  $x$  Achse parallelen Geraden. Es gehören zu jedem Punkt 3 verschiedene charakteristische Richtungen (da  $w > 0$  und beschränkt ist); darum ist (17) hyperbolisch und (31) charakteristisch (jede Gleichung enthält Ableitung nur nach einer Richtung). Die Integralgleichungsformen unserer Gleichungen sind

$$(32) \quad \begin{cases} v(P) = v(A) + \int_{\widehat{AP}} (lu - v)(1 - v) dt = \\ \quad = v(A) + \int_{\widehat{AP}} (lu - v)(1 - v) \frac{1}{w} dx, \\ w(P) = w(B) + \int_{\widehat{BP}} (lu - v) dx, \\ u(P) = u(C) + \int_{\widehat{CP}} (v - lu) dt. \end{cases}$$

Die Anfangslinien — die Achse  $x$  und  $t$  — sind jetzt beide Charakteristiken (charakteristische Anfangswertprobleme). Da (31) mit (17) und diese z. B. mit (21) gleichwertig ist und für (21) die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gesichert sind, können wir dasselbe auch über (31) behaupten, ferner zeigen wir (s. § 4.), (wie oben bei zweigliedrigen Systemen), dass die Lösung auch hier mit Iteration und zwar auf Grund von (32) gewonnen werden kann.

Dieselbe Tatsache hat für die *nicht* charakteristische Aufgabe und auch mehr als zwei Gleichungen einen unmittelbaren Beweis (s. z. B. [7]). Im § 4. werden die Existenz, Einzigkeit der Lösung, die Konvergenz der Iteration auch für den charakteristischen Fall gezeigt. Das ist von Wichtigkeit, denn sich das System nicht immer in ein zweigliedriges überführen lässt.



Figur 6.

29. Die Iteration vollzieht sich nach den Formeln

$$(33) \quad \begin{cases} v_{(n+1)}(P) = v_{(n)}(A) + \int_{C_{1(n)}} (lu_{(n)} - v_{(n)}) (1 - v_{(n)}) dt, \\ w_{(n+1)}(P) = w_{(n)}(B) + \int_{BC} (lu_{(n)} - v_{(n)}) dx, \\ u_{(n+1)}(P) = u_{(n)}(C) + \int_{CP} (v_{(n)} - lu_{(n)}) dt, \end{cases}$$

wo  $u_{(n)}, v_{(n)}, w_{(n)}, C_{1(n)}$  die  $n$ -ten Näherungen von  $u, v, w, C_1$  bedeuten. Folglich ist  $C_{1(n)}$  die durch  $P(x', t')$  gehende Integralkurve der Gleichung  $\frac{dx}{dt} = w_{(n)}(x, t)$ .

I. Im Gebiet  $T_2$  (unter  $C_1^0$ ) nehmen wir für 0-te Näherungen die Werte (s. Fig. 6)

$$v_{(0)}(P) = v(A) = 0, \quad w_{(0)}(P) = w(B) = w^0(B), \quad u_{(0)}(P) = u(C) = 0.$$

Dadurch ergibt die Iteration

$$v_{(n)}(P) = u_{(n)}(P) = 0, \quad w_{(n)}(P) = w^0(B) = w^0(t').$$

Die Grenzfunktionen dieser werden die Lösungen in  $T_2$  sein, d. h. in  $T_2$  (s. Fig. 6)

$$v(P) = u(P) = 0, \quad w(P) = w^0(t') = \frac{w_0(l+1-v_0)}{l+1} + \frac{w_0 v}{l+1} e^{-(l+1)t'}.$$

Diese erfüllen (17), ferner die Anfangsbedingungen in der Tat und — da gibt es keine andere zu  $C_1 + Lip(1)$  gehörige Lösung des Problems — das ist die Lösung in  $T_2$ .

II. Im Gebiete  $T_1$  (oberhalb  $C_1^0$ ) müssten die aufeinanderfolgenden Näherungen die auf dem Rande  $C_1^0$  und  $x = 0$  vorgeschriebenen Werte eigentlich genau aufnehmen. Wäre die Gleichung von  $C_1^0$  in der Form  $t = t^0(x)$  bekannt, dann könnten  $v^0, w^0$  als

Funktionen von  $x$  in den Formen  $v^0 = v^0(x)$ ,  $w^0 = w^0(x)$  geschrieben und als 0-te Näherungen die Werte

$$v_{(0)}(x, t) = v^0(x), \quad w_{(0)}(x, t) = w^0(x), \quad u_{(0)}(x, t) = \frac{v_0}{l} (1 - e^{-(t-t^0(x))})$$

gewählt werden, die am Rande stetigerweise in die vorgeschriebenen Werte übergehen. Im vorliegenden Falle können — wegen der Mangel der expliziten Formel  $t = t^0(x)$  — nur solche erste, zweite, ..., Näherungen gewonnen werden, die die Randwerte nur näherungsweise aufnehmen, während selbst der eine Rand ( $C_1^0$ ) mit seiner Näherungsgleichung ersetzt wird. Eine erste Näherung der geschilderten Art gewinnen wir, wie folgt:

Nehmen wir in (33<sub>1</sub>) längs  $C_{1(0)}$

$$v_{(0)} = v(A) = v_0, \quad w_{(0)} = w(A) = w_0, \quad u_{(0)} = u(A) = \frac{v_0}{l} (1 - e^{-lt_A}).$$

(Der letzte Wert wurde aus (17<sub>3</sub>) durch Integration längs der Linie  $x = 0$  mit dem Anfangswert  $u(0, 0) = 0$  erhalten.)

Ebenso sei es in (33<sub>2</sub>) längs  $\overline{BP}$

$$v_{(0)} = v(B) = v_0, \quad w_{(0)} = w(B) = w_0, \quad u_{(0)} = u(B) = \frac{v_0}{l} (1 - e^{-lt'}),$$

und bei (33<sub>3</sub>) längs  $\overline{CP}$

$$v_{(0)} = v(C) = v^0(x'), \quad w_{(0)} = w(C) = w^0(x'), \quad u_{(0)} = u(C) = 0.$$

Die 0-te Näherung der sich durch  $P(x', t')$  ziehenden Charakteristik  $C_1$  sei  $t = t' + \frac{1}{w_0}(x - x')$ , woraus  $t_A = t' - \frac{x'}{w_0}$ .

Diese Näherungswerte längs der entsprechenden Charakteristiken bilden zusammen noch *keine* (0-te) Näherungsfunktionen für das ganze Gebiet  $T_1$ , nur *dienen zur* Bestimmung einer im früheren Sinne für das ganze  $T_1$  eindeutig definierten *ersten Näherung*, die lautet

$$v_{(1)}(P) = v_{(1)}(x', t') = v_0 + \frac{v_0}{w_0} (v_0 - 1) x' e^{-l\left(t' - \frac{x'}{w_0}\right)},$$

$$w_{(1)}(P) = w_{(1)}(x', t') = w_0 - v_0 x' e^{-lt'},$$

$$u_{(1)}(P) = u_{(1)}(x', t') = v^0(x') [t' - t^0(x')].$$

Statt der unbekanntnen Funktion  $t = t^0(x)$  nehmen wir als ihre 0-te Näherung  $t = \frac{1}{w_0} x$ .

Mit Hilfe von (25') haben wir dann

$$u_{(1)}(P) = u_{(1)}(x', t') = \frac{v_0}{v_0 + (1 - v_0) e^{x'/w_0}} \left( t' - \frac{1}{w_0} x' \right).$$

Zwecks der Gewinnung der zweiten Näherung bestimmen wir jetzt die erste Näherung von  $C_1$  aus der Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = w_{(1)}(x, t) = w_0 - v_0 x e^{-lt}.$$

Sie kann geschrieben werden:

$$dx + (v_0 x e^{-lt} - w_0) dt = 0$$

und wird nach Multiplikation mit  $e^{-\frac{v_0}{l} t}$  zu einer exakten Gleichung, deren Integration ergibt

$$x e^{-\frac{v_0}{l} t} - w_0 \int_0^t e^{-\frac{v_0}{l} t_1} dt_1 = \text{const.}$$

Das ist die erste Näherung der Schar  $C_1$ . Das sich durch  $P(x', t')$  ziehende Glied von  $C_1$  ist

$$(34) \quad xe^{-\frac{v_0}{l}e^{-u}} - x'e^{-\frac{v_0}{l}e^{-u'}} - w_0 \int_{t'}^t e^{-\frac{v_0}{l}e^{-u_1}} dt_1 = 0.$$

Setzt man hier  $x = 0$ , so haben wir die Gleichung für  $t_A$

$$\int_{t'}^{t_A} e^{-\frac{v_0}{l}e^{-u_1}} dt_1 = -\frac{1}{w_0} x' e^{-\frac{v_0}{l}e^{-u'}}$$

die nur näherungsweise auf lösbar ist. Auch aus (34) gewinnen wir die Gleichung von  $C_1$  in der expliziten Form

$$(35) \quad x = x' e^{\frac{v_0}{l}(e^{-u} - e^{-u'})} + w_0 \int_{t'}^t e^{\frac{v_0}{l}(e^{-u} - e^{-u_1})} dt_1 = f_1(t).$$

Die zweite Näherung ist dann

$$v_{(2)}(x', t') = v_0 + \int_{t_A}^{t'} [lu_{(1)}(f_1(t), t) - v_{(1)}(f_1(t), t)] [1 - v_{(1)}(f_1(t), t)] dt.$$

Bei der Bestimmung von  $w_{(2)}$ :

$$\begin{aligned} w_{(2)}(x', t') &= w_0 + \int_0^{x'} [lu_{(1)}(x, t') - v_{(1)}(x, t')] dx = \\ &= w_0 + \int_0^{x'} \left[ \frac{lv_0}{v_0 + (1 - v_0)e^{x/w_0}} \left( t' - \frac{x}{w_0} \right) - v_0 - \frac{v_0}{w_0} (v_0 - 1) x e^{-l \left( t' - \frac{x}{w_0} \right)} \right] dx, \end{aligned}$$

verursacht nur der Typ  $\int \frac{xdx}{A + Be^{kx}}$  einige Schwierigkeiten. Endlich ist

$$\begin{aligned} u_{(2)}(x', t') &= \int_{t^0(x')}^{t'} [v_{(1)}(x', t) - lu_{(1)}(x', t)] dt = \\ &= \int_{t^0(x')}^{t'} \left[ v_0 + v_0(v_0 - 1) \frac{1}{w_0} x' e^{-l \left( t - \frac{x'}{w_0} \right)} - \frac{lv_0}{v_0 + (1 - v_0)e^{x'/w_0}} \left( t - \frac{x'}{w_0} \right) \right] dt. \end{aligned}$$

In (35)  $x' = t' = 0$  gesetzt, bekommen wir die erste Näherung von  $C_1^0$ . Sie ist

$$x = w_0 \int_0^t e^{\frac{v_0}{l}(e^{-u} - e^{-u_1})} dt_1 = f_1^0(t)$$

und ihre Inverse sei  $t = g_1^0(x)$ . Dann gilt in der Formel von  $u_{(2)}(x', t') : t^0(x') = g_1^0(x')$ . Die hier auftretenden unbestimmten Integrale sind leicht bestimmbar.

Die zweite Näherung kann noch durchgeführt werden, wenn auch mit viel Rechnung. Die Rechnung der dritten und höheren Näherungen stösst auf ernste Schwierigkeiten und kann praktisch kaum vollzogen werden.

### § 3. Existenz-, Eindeutigkeit- und Stabilitätssätze im Allgemeinen

Schreiben wir das Gleichungssystem (10—12) in die Form

$$(36) \quad u_t + w_x = 0$$

$$(37) \quad u_t + lu - v = 0$$

$$(38) \quad v_t + [(v-1)w]_x = 0$$

und betrachten dabei die Nebenbedingungen

$$(39) \quad u(x, 0) = u^0(x) \geq 0$$

$$(40) \quad v(x, 0) = v^0(x) \geq 0$$

$$(41) \quad v(0, t) = v_0(t) \geq 0$$

$$(42) \quad w(0, t) = w_0(t) > 0.$$

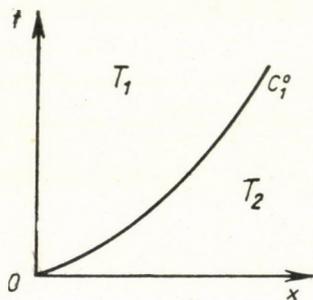
31. Es sei nun erst vorausgesetzt, dass alle vier Funktionen:  $u^0$ ,  $v^0$ ,  $v_0$  und  $w_0$  stetig und in  $x \geq 0$ , bzw.  $t \geq 0$  stetig differenzierbar sind, nicht aber, dass die Grenzwerte

$$v^0(0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} v(x, 0) \quad \text{und} \quad v_0(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} v(0, t)$$

übereinstimmen. Wir beweisen nun erst, dass das System (36—38) mit den Nebenbedingungen (39—42) ein und nur ein stetiges und stetig differenzierbares Lösungssystem in  $T$  ( $x \geq 0, t \geq 0$ ) besitzt, falls

$$v^0(0) = v_0(0)$$

gilt, sogar beweisen wir auch im Falle  $v^0(0) \neq v_0(0)$ , dass es eine vom Nullpunkt ausgehende, den Bereich  $T$  in zwei Teile ( $T = T_2 \cup T_1$ , s. Fig. 7.) zerschneidende Kurve  $C_1^0$  und ein Lösungssystem des Problems gibt, welches



Figur 7.

in den offenen Gebieten  $T_2$  und  $T_1$  stetig und stetig differenzierbar ist (kurz: zu  $C_1$  gehört), weiter  $u$  und  $w$  im ganzen  $T$  stetig sind, dagegen  $v$  längs  $C_1^0$  einen Sprung besitzt. Wir zeigen ferner, dass dieses Lösungssystem in beiden Fällen stetig von den Randwerten  $u^0, v^0, v_0, w_0$  abhängt. Es sei ja erst bemerkt, dass der Fall  $v^0(0) = v_0(0)$  einen Spezialfall des allgemeineren Problems  $v^0(0) \neq v_0(0)$  darstellt. Da wir ferner nur in  $T_2$  bzw. in  $T_1$  stetig differenzierbares Lösungssystem betrachten, so gilt nach (37), dass in beiden Bereichen auch  $u_{tx}$  und  $u_{tt}$ , also nach (36) auch  $w_{xt}$  und  $w_{xx}$ , also nach (38) auch  $v_{tx}$  stetig sind. Nach dem

Schwarz'schem Theorem gilt also in  $T_2$  bzw. in  $T_1$

$$(43) \quad u_{xt} = u_{tx}, \quad v_{xt} = v_{tx}, \quad w_{xt} = w_{tx}.$$

Aus (37) und (36) folgt also für  $T_2$  einerseits, für  $T_1$  andererseits, dass

$$v_t = lu_t + u_{tt} = -(lw_x + w_{xt}) = -(lw + w_t)_x,$$

also dass

$$-(lw + w_t)_x + [(v - 1)w]_x = 0$$

gültig ist. Durch Integration bekommt man

$$(44) \quad -(lw + w_t) + (v - 1)w = \begin{cases} C^{**}(t), & \text{falls } P(x, t) \in T_2 \\ C^*(t), & \text{falls } P(x, t) \in T_1 \end{cases}$$

d. h.

$$(45) \quad -(lw + w_t) + (lu + u_t - 1)w = \begin{cases} C^{**}(t) \\ C^*(t) \end{cases}$$

Es sei

$$-C^*(t) = c^*; \quad -C^{**}(t) = c^{**}.$$

Nach (36) gilt also endlich

$$(46) \quad w_t + ww_x = [lu - (1 + l)]w + \begin{cases} c^{**} \\ c^* \end{cases}$$

Es sei nun  $C_1^0$  eingebettet in einer Kurvenschar  $C_1$ , durch die Differentialgleichung

$$(47) \quad \frac{dx}{dt} = w(x, t)$$

definiert. (46) kann man jetzt auch in der Form

$$(48) \quad \frac{dw}{dt} = [lu - (1 + l)]w + \begin{cases} c^{**} \\ c^* \end{cases}$$

schreiben, wo also unter  $\frac{dw}{dt}$  die (innere) Ableitung von  $w$  längs der Schar zu verstehen ist. Wir beweisen nun, dass

$$(49) \quad c^* = c^{**} = c$$

gilt.  $C_1^0$  ist ja durch (47) und die Anfangsbedingung  $x(0) = 0$  definiert. Da  $u$  und  $w$  stetig in  $T$  sind, besitzt die innere Ableitung längs  $C_1^0$  eine hebbare Singularität; mit  $u$  und  $w$  und mit der eindeutig bestimmten Kurve  $C_1^0$  hat nämlich auch  $\frac{dw}{dt}$  dieselben Randwerte längs  $C_1^0$  von beiden Seiten her. So folgt aber nach (48), dass  $c^*$  und  $c^{**}$  längs  $C_1^0$  ebenso in  $T_2$  wie in  $T_1$  auch dieselben Randwerte besitzen, also, da sie beide nur von  $t$  abhängen, sind sie identisch, d. h.

$$(50) \quad c^* = c^{**} = c(t).$$

Mit Hilfe von (37), (41) und (39) kann man auch den Randwert

$$(51) \quad u(0, t) = u_0(t)$$

und ebenso mit Hilfe von (36)—(37) und (39)—(40) auch

$$(52) \quad w(x, 0) = w^0(x)$$

bestimmen; dann ist aber aus (44) auch  $c^* = c^{**} = c(t)$  bestimmbar. Mit dem Problem (36—42) ist also das Problem

$$(36^*) \quad u_t + w_x = 0$$

$$(46^*) \quad w_t + ww_x = [lu - (1 + l)]w + c(t)$$

$$(39^*) \quad u(x, 0) = w^0(x) \geq 0 \quad \left. \vphantom{u(x, 0)} \right\} w^0(0) = u_0(0)$$

$$(51^*) \quad u(0, t) = u_0(t) \geq 0 \quad \left. \vphantom{u(0, t)} \right\}$$

$$(52^*) \quad w(x, 0) = w^0(x) \geq 0 \quad \left. \vphantom{w(x, 0)} \right\} w^0(0) = w_0(0)$$

$$(42^*) \quad w(0, t) = w_0(t) > 0 \quad \left. \vphantom{w(0, t)} \right\}$$

gleichwertig, falls wir nur die Lösungen betrachten, die in  $T_2$  und in  $T_1$  stetig und stetig differenzierbar, in  $T$  aber nur stetig sind.

Das hyperbolische, quasilineare System (36\*)—(46\*)—...—(42\*) besitzt nun zwei charakteristische Scharen von Kurven, nämlich die Schar, definiert durch (47) und die, definiert durch

$$(53) \quad x = \text{const.}$$

(36\*)—(46\*)—(39\*)—(52\*) ist also in  $T_2$  eine gewöhnliche Anfangswertaufgabe mit zwei Veränderlichen, die — wie schon in § 2. bemerkt — in jedem endlichen Teile von  $T_2$  ein und nur ein stabiles Lösungssystem besitzt, sogar auch im ganzen  $T_2$ , falls  $w^0(x)$  beschränkt ist. Wurde diese Aufgabe gelöst, so kennt man die Werte von  $u$  und  $w$  längs  $C_0^1$  in  $T_1$ , hat man also in  $T_1$  ein charakteristisches Problem zu lösen. Nach [6] bzw. nach § 2. ist es schon bekannt, dass das Problem (36\*)—(46\*)—...—(42\*) ein und nur ein stabiles Lösungssystem (mit positivem  $u$  und  $w$ ) in  $T$  besitzt, was aber in  $T$  vielleicht nur schrittweise (s. § 2.) zu zeigen, bzw. zu rechnen ist. Dasselbe folgt aber dann auch für das ursprüngliche Problem (36—42), w. z. b. w.

32. Betrachten wir nun den Fall, wo — dem vorigen Punkt gegenüber — die Funktion  $v_0(t)$  nicht mehr stetig ist; übrigens ist dieser Fall von praktischer Bedeutung:

$$(54) \quad u(x, 0) = u^0(x) = 0$$

$$(55) \quad v(x, 0) = v^0(x) = 0$$

$$(56) \quad v(0, t) = v_0(t) = \begin{cases} \frac{v_0}{\varepsilon} > 0, & \text{falls } 0 \leq t < \varepsilon \\ 0, & \text{falls } \varepsilon < t \end{cases}$$

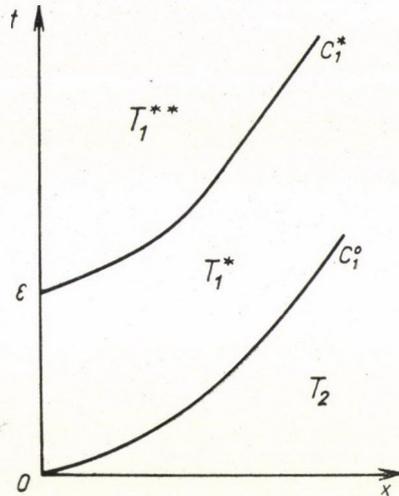
$$(57) \quad w(0, t) = w_0(t) = w_0 = \text{const.} > 0$$

bzw. ein solches Lösungssystem des Problems (36—38) bzw. (54—57), für welches  $u$  und  $w$  stetig in  $T$ , ferner  $u$ ,  $v$  und  $w$  stetig und stetig differenzierbar

in  $T_2$ ,  $T_1^*$  und  $T_1^{**}$  sind (s. Fig. 8).  $C_1^*$  ist ja die Kurve der Schar (47), welche durch die Anfangsbedingung

$$(58) \quad x(\varepsilon) = 0$$

definiert ist. Nach den obigen Überlegungen folgt auch jetzt, dass das betrachtete Problem mit einem (36\*)—(46\*)—...—(42\*) ähnlichen äquivalent ist, also dass es ein und nur ein — den vorangehenden entsprechendes — Lösungs-



Figur 8.

system besitzt, welches stetig von den Randwerten abhängt. Die fehlenden Randwerte und die Werte längs  $C_1^0$  werden in dem folgenden festgestellt; es sei aber erst bemerkt, dass — wie die Gleichungen (36—38) zeigen, — das einzige, den Bedingungen entsprechende Lösungssystem in  $T_2$  das System

$$(59) \quad v(x, t) = u(x, t) = 0 \quad \text{und} \quad w(x, t) = \bar{w}(t)$$

darstellt, wo mit  $\bar{w}(t)$  der Wert von  $w$  als Funktion von  $t$  auf  $C_1^0$  bezeichnet wird. Dieses System ist ferner — wie es schon bemerkt — eindeutig bestimmt und stabil. Bezeichnen wir dieses mit  $u_e(x, t)$ ,  $v_e(x, t)$ ,  $w_e(x, t)$ .

Die Randwerte in  $T_2$  und in  $T_1$  bzw. auf  $C_1^0$  ergeben sich durch einfache Rechnung; unter Berücksichtigung von (37), (39\*), (51\*) bzw. (56) bekommt man

$$(60) \quad u_0(t) = \int_0^t v_0(\tau) e^{-l(t-\tau)} d\tau = \begin{cases} \frac{v_0}{l\varepsilon} (1 - e^{-lt}), & \text{falls } t \leq \varepsilon \\ v_0 e^{-lt} \frac{e^{l\varepsilon} - 1}{l\varepsilon}, & \text{falls } t \geq \varepsilon \end{cases};$$

die Funktion  $c(t)$  wird aus (44) bestimmt, wenn man in (44)  $x = 0$  einsetzt:

$$(61) \quad c(t) = w_0 [1 + l - v_0(t)];$$

aus (46), (61) und (59):

$$(62) \quad \frac{d\bar{w}}{dt} + (1+l)\bar{w} = w_0[1+l-v_0(t)],$$

oder integriert mit der Bedingung  $\bar{w}(0) = w_0$  und wegen (56):

$$(63) \quad \bar{w}(t) = w_0 \left[ 1 - \int_0^t v_0(\tau) e^{-(1+l)(t-\tau)} d\tau \right] = \begin{cases} w_0 \left[ 1 - \frac{v_0}{\varepsilon(1+l)} (1 - e^{-(1+l)t}) \right], & t \leq \varepsilon \\ w_0 \left[ k - v_0 e^{-(1+l)t} \frac{e^{(1+l)\varepsilon} - 1}{\varepsilon(1+l)} \right], & t \geq \varepsilon; \end{cases}$$

endlich wird die Gleichung von  $C_1^0$  aus (47) und (63) wie folgt gewonnen:

$$(64) \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = w_0 \left[ 1 - \int_0^t v_0(\tau) e^{-(1+l)(t-\tau)} d\tau \right],$$

$$(65) \quad \bar{x}(t) = w_0 \left\{ \varepsilon - \frac{v_0}{\varepsilon(1+l)} \left[ \varepsilon + (e^{-(1+l)\varepsilon} - 1) \right] + t - \varepsilon + \frac{v_0}{1+l} [e^{-(1+l)t} - e^{-(1+l)\varepsilon}] \frac{e^{(1+l)\varepsilon} - 1}{\varepsilon(1+l)} \right\} (t \geq \varepsilon).$$

Ähnlicherweise erhalten wir auf Grund von (25) und  $v_\varepsilon(0, 0) = \frac{v_0}{\varepsilon}$ :

$$\bar{v}(t) = \frac{v_0}{v_0 - (v_0 - \varepsilon) e^t}.$$

Die Funktionen  $v_0(t)$ ,  $u_0(t)$ ,  $c(t)$ ,  $\bar{w}(t)$ ,  $\bar{x}(t)$  und  $\bar{v}(t)$  besitzen nun folgende Grenzwerte, falls  $\varepsilon$  nach Null strebt ( $\delta(t)$  bezeichnet Dirac-Distribution):

$$(66) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_0(t) = v_0 \delta(t)$$

$$(67) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_0(t) = v_0 e^{-lt}$$

$$(68) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(t) = w_0 [1+l-v_0 \delta(t)]$$

$$(69) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{w}(t) = w_0 [1-v_0 e^{-(1+l)t}]$$

$$(70) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{x}(t) = w_0 \left[ t - \frac{v_0}{1+l} (1 - e^{-(1+l)t}) \right]$$

$$(70') \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{v}(t) = \frac{1}{1-e^t}.$$

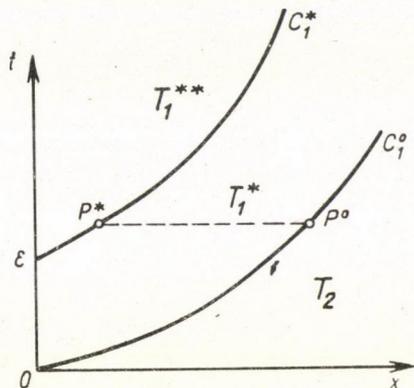
$C_1^0$  besitzt also die Grenzstelle, definiert durch die Gleichung

$$(71) \quad \bar{x}(t) = w_0 \left[ t - \frac{v_0}{1+l} (1 - e^{-(1+l)t}) \right].$$

Wir zeigen noch, dass auch  $C_1^*$  eine Grenzstelle besitzt, falls  $\varepsilon \rightarrow 0$ , und zwar fällt sie dann mit  $C_1^0$  zusammen. Daraus folgt aber, dass das Problem (36–38) mit den Nebenbedingungen

$$u(x, 0) = v(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = \delta(t), \quad w(0, t) = w_0 = \text{const.} > 0$$

als einzige Lösung  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_\varepsilon$  hat.



Figur 9.

Um nun zu zeigen, dass  $C_1^*$  eine Grenzstelle besitzt, betrachten wir Fig. 9. Nach (60) und (59) sind längs  $C_1^0$  bzw. längs  $x = 0$  in  $T_1^*$

$$(73) \quad u_t > 0 \quad \text{und folglich} \quad w_x < 0$$

gültig, und da das Lösungssystem in  $T_1^*$  stetig differenzierbar ist, gilt (73) auch noch in einer Umgebung der obigen Randkurven. Also gilt die Ungleichung

$$(74) \quad w(x + \Delta x, t) < w(x, t).$$

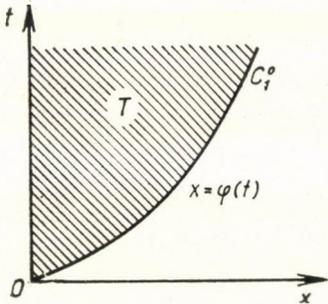
Somit folgt — für genügend kleine  $\varepsilon$  — dass  $C_1^*$  im Punkte  $P^*(x^*, t)$  einen kleineren Richtungskoeffizienten  $\left( \frac{1}{w(P^*)} \right)$ , als  $C_1^0$  im Punkte  $P^0(x, t)$  mit gleichem  $t$  besitzt.  $C_1^*$  strebt also gegen  $C_1^0$ , falls  $\varepsilon \rightarrow 0$ , w. z. b. w.

Doch hat die mit dem Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  gewonnene Lösung für das physikalische Problem keine Bedeutung mehr, da  $0 \leq v_0(t) \leq 1$  ständig gelten muss, was hier nicht erfüllt ist, wie es (70') zeigt.

#### § 4. Ergänzung zu dem charakteristischen Problem. Frage der Existenz, Eindeutigkeit, Stabilität und Möglichkeit der Iteration

Wir behandeln z. B. den Fall des dreigliedrigen Systems (17) im Bereich  $T: x \geq 0, t \geq \varphi(t)$  (wo  $x = \varphi(t) = x^0(t)$  die Gleichung der Hauptcharakteristik ist) mit den Randwerten von § 2. längs  $x = \varphi(t)$  und  $x = 0$ , die samt mit  $\varphi(t)$  zu  $C_1 + \text{Lip}(1)$  gehören, sich im Punkt 0 aneinander stetig anknüpfen

(dabei ist  $\varphi'(t) > 0, \varphi(0) = 0$ ). Die Kurven  $x = \varphi(t)$  und  $x = 0$  sind Charakteristiken. — Wir suchen eine zu  $C_1 + \text{Lip}(1)$  gehörige Lösung der Aufgabe, für die noch  $u \geq 0, v \geq 0, w > 0$  gilt (Problem I).



Figur 10.

Das Gebiet  $T$  geht mit der ein-eindeutigen Transformation  $\xi = x, \tau = \varphi(t) - x$  in das Viertel  $\xi \geq 0, \tau \geq 0$  der Ebene  $(\xi, \tau)$  über. Gleichzeitig gehen  $C_1^0$  in die Achse  $\xi$ , Achse  $t$  in die Achse  $\tau$ , die Geraden  $x = \text{const.}$  in  $\xi = \text{const.}$ , schliesslich die Geraden  $t = \text{const.}$  in die der Gerade  $\tau = -\xi$  parallelen Geraden über und ändert sich damit der Charakter  $C_1 + \text{Lip}(1)$  von (17) nicht. So ist das Problem I. mit dem folgenden Problem II. gleichwertig (wir schreiben  $\varphi'(t) = \psi(\xi, \tau)$  und dann  $x, t$  statt  $\xi, \tau$ ):

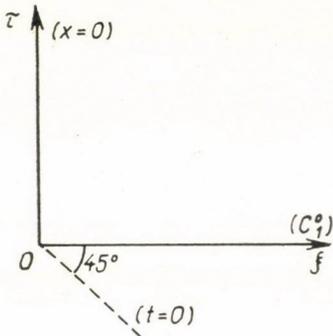
$$(75) \quad \begin{cases} \psi v_t + [(v-1)w]_x - [(v-1)w]_t = 0, \\ \psi u_t + w_x - w_t = 0, \\ \psi u_t = v - lu. \end{cases}$$

Der Rand besteht jetzt aus den Achsen  $x$  und  $t$ .

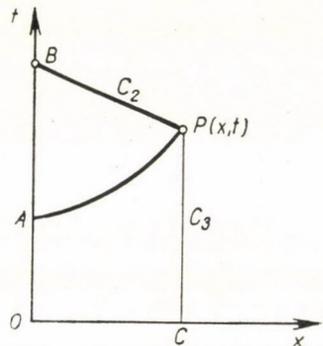
Die charakteristische Form dieses Systems ist

$$(76) \quad \begin{cases} v_t + \frac{w}{\psi-w} v_x = \frac{(1-v)(lu-v)}{\psi-w}, \text{ oder } \frac{\psi-w}{w} v_t + v_x = \frac{(1-v)(lu-v)}{v}, \\ w_t - w_x = v - lu, \\ u_t = \frac{v-lu}{\psi}. \end{cases}$$

Die drei Scharen von Charakteristiken sind: die Schar mit der Gleichung  $\frac{dt}{dx} = \frac{\psi-w}{w}$ , oder  $\frac{dx}{dt} = \frac{w}{\psi-w}$  (wozu auch die Achse  $x$  gehört), die Schar  $C_2$  der  $t = -x$  parallelen Geraden, die Schar  $C_3$  der Geraden  $x = \text{const.}$



Figur 11.



Figur 12.

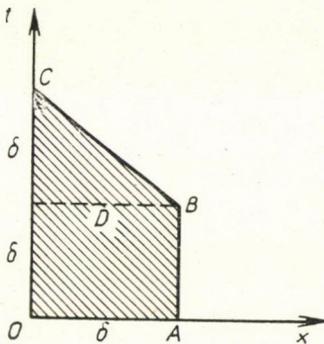
Durch jeden Punkt von  $x \geq 0, t \geq 0$  zieht sich je ein Glied der drei Scharen. Die Glieder von  $C_1$  schneiden alle die Achse  $t$ , aber die Achse  $x$  nicht, da die Lösung der Gleichung  $\frac{dt}{dx} = \frac{\psi - w}{w}$  — nach unseren Annahmen — mit den Anfangswerten eindeutig bestimmt ist.

Jetzt zeigen wir, dass Problem II. genau eine Lösung hat, die stabil ist und mit Iteration gewonnen werden kann. — Existiert die verlangte Lösung, dann kann (76) in die Integralgleichungsform

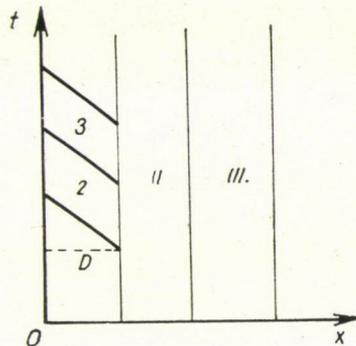
$$(77) \quad \begin{cases} v(P) = v(A) + \int_{\widehat{AP}} \frac{(1-v)(lu-v)}{\psi-w} dt = v(A) + \int_{\widehat{AP}} \frac{(1-v)(lu-v)}{w} dx, \\ w(P) = w(B) + \int_{\widehat{BP}} (v-lu) dt, \\ u(P) = u(C) + \int_{\widehat{CP}} \frac{v-lu}{\psi} dt \end{cases}$$

geschrieben werden, die mit (76) gleichwertig ist. Durch Einsetzen einer  $n$ -ten Näherung in die rechten Seiten, gewinnt man die  $n+1$ -te. Zu einer ersten Näherung gelangt man z. B. dadurch, wenn man in allen rechten Seiten die Werte von  $u, v, w$  mit ihren Werten in den Punkten  $A, B$  und  $C$  (s. Fig. 12.) ersetzt. So wird keine erste Näherung geliefert, doch die mit deren Hilfe gewonnenen Funktionen  $u_1, v_1, w_1$  sind alle Forderungen erfüllende erste Näherungen (z. B. nehmen sie am Rand die vorgeschriebenen Werte an).

Zeichnet man in der Ebene  $x, t$  ein Gebiet  $D$ , welches durch eine Trapez  $OABC$  begrenzt wird (s. Fig. 13.), so kann der Courant-Laxsche Beweis [7] für  $D$  auch in diesem Fall vollständig durchgeführt werden. — Man sieht aus (77), wie wesentlich es ist, dass am Rande  $x=0, t=0$  überall  $w > 0$  (im vorliegenden Fall  $w = w_0 = \text{const.} > 0$ ) und  $\varphi'(t) > 0$  gelten und  $\varphi'(t)$  immer über einen positiven Wert bleibt. Der Beweis gilt erst nur für eine genügend kleine  $\delta > 0$ , aber — da diese Eigenschaften der ursprünglichen Randwerte für die neuen Randwerte übrigbleiben — können wir nach und nach mit



Figur 13.



Figur 14.

сич an D knüpfenden Parallelogrammen und mit der Achse  $t$  parallelen Streifen mit der Breite  $\delta$  das ganze Gebiet  $x \geq 0$ ,  $t \geq 0$  einnetzen. Damit sind alle Lücken des Beweises der Paragraphen 2. und 3. ausgefüllt.

(Eingegangen 18. Mai, 1959.)

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] SCHAY, G.: *Theoretische Grundlagen der Gas-Chromatographie*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.
- [2] MEDGYESSY P.—RÉNYI A.—TETTAMANTI K.—VINCZE I.: „A kémiai frakcionáló megosztás matematikai tárgyalása nem-teljes diffúzió esetében.” *Publications de l'Institut des Mathématiques Appliquées de l'Académie des Sciences de Hongrie* 3 (1954) 81—97.
- [3] KLINKENBERG, A.: „Heat transfer in cross-flow heat exchangers and packed beds.” *Industrial and Engineering Chemistry* 46 (1954) 2285—2289.
- [4] CARSLAW, H. S.—JAEGER, J. C.: *Conduction of heat in solids*. At the Clarendon Press, Oxford, 1959.
- [5] ТИХОНОВ, А. И.—САМАРСКИЙ, А. А.: *Уравнения математической физики*. Главиздат государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1953.
- [6] LEWY, H.: „Über das Anfangswertproblem einer hyperbolischen nichtlinearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen.” *Mathematische Annalen* 98 (1928) 179—191.
- [7] COURANT, R.—LAX, P.: „On nonlinear Partial Differential Equations with two Independent Variables.” *Communications on Pure and Applied Mathematics* 2 (1949) 255—273.

### ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ (ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА С РАЗРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ)

I. BIHARI, T. FREY и Á. PETHŐ

#### Резюме

Сорбные явления, имеющие место при токе газовой смеси через трубу, при некоторых условиях ведут к смешанной задаче, связанной с квазилинейной, гиперболической системой дифференциальных уравнений первого порядка (17). Решение ищется в области  $T(x \geq 0, t \geq 0)$ . Задача различными способами может быть сведена к аналогичной проблеме системы из двух уравнении. Все эти задачи имеют ту особенность, что в гранично-начальных значениях одной из неизвестных функций имеется разрыв, задача не имеет решения, непрерывного во всей области  $T$ . В работе доказывается, что существует решение, которое везде кроме точек некоторой кривой, исходящей из центра системы координат, принадлежит классу функций  $C_1 + \text{Lip}(1)$  (если и граничные значения таковы), более того, остальные две функции непрерывны во всей области  $T$ . Работа даёт решение в одной из частных областей в явном виде, в другой даёт приближённое решение с помощью итерации на основании трёх однократных интегральных уравнений, причём и одна система характеристик находится с помощью итераций. Фронт волн также определяется в явном виде. В одном из исследованных специальных случаев разрывная функция принимает на двух осях два различных постоянных значения, во втором — значение, заданное на одной из осей, — дистрибуция Dirac-а. В противоположность предыдущим работам аналогичного содержания, работа не считает скорость газовой смеси постоянной.