

EINE MATRIXMETHODE ZUR LÖSUNG VON ANFANGSWERTAUFGABEN LINEARER DIFFERENZENGLEICHUNGEN

von
A. PETHŐ¹

In der vorliegenden Arbeit wird die Anwendung des Matrizenkalküls zur Lösung der Anfangswertaufgaben (im allgemeinen partieller) linearer Differenzengleichungen in dem Falle dargelegt, wo die Koeffizienten von einer Veränderlichen unabhängig sind. Zuerst wird die Methode für die gewöhnlichen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten explizit durchgeführt (§ 2), danach ein konstruktives Verfahren diskutiert, wie die Lösung einer partiellen Gleichung genannten Typs in Kenntnis der allgemeinen expliziten Lösungen der gewöhnlichen linearen Differenzengleichungen mit (im allgemeinen) veränderlichen Koeffizienten zu erhalten ist (§ 3). In § 4 wird die rechen-technische Einfachheit der Methode an einem partiellen Differenzengleichungssystem (das von einem Problem chemischer Natur herrührt) gezeigt, dessen Lösung andere Verfasser [1] mit der Methode der erzeugenden Funktionen [2] bereits bestimmt hatten.

Den Überlegungen liegt die einfache Bemerkung zugrunde, dass im kommutativen Ring der Matrizen der Form $[\lambda_{i-j}]$ ($\lambda_{i-j} = 0$ für $i < j$) die ganzen rationalen Funktionen wie dieselben im Polynomring über den reellen Zahlen $\sum \lambda_k z^k$ darzustellen sind, ferner dass die im Falle $\lambda_0 \neq 0$ existierenden Inversen auch Ringelemente sind (§ 1).

§ 1. Einige Definitionen und Bemerkungen

Wir beginnen mit einem Hinweis auf die einfache Tatsache, dass die Lösung der für die Funktion $u(x)$ ($x = 0, 1, \dots$) bestehenden linearen Differenzengleichung m -ter Ordnung

$$(11) \quad \sum_{r=0}^m a_r(x) u(x+r) = b(x) \quad (a_m(x) \neq 0)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(12) \quad u(\varrho) = u_\varrho, \quad \varrho = 0, 1, \dots, m-1 \quad (u_\varrho \text{ vorgegeben})$$

¹ Zentralforschungsinstitut für Chemie der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest.

eine rationale Funktion der Beiwerte $a_r(x)$, des Gliedes $b(x)$ und der Anfangswerte u_ϱ liefert:

$$(13) \quad u(x) = \sum_{\pi=0}^{x-m} P_\pi(a_r) b(\pi) + \sum_{\varrho=0}^{m-1} R_\varrho(a_r) u_\varrho, \quad x > m-1,$$

wo $P_\pi(a_r)$ bzw. $R_\varrho(a_r)$ ganze rationale Funktionen der Veränderlichen $\frac{a_\varrho(0)}{a_m(0)}, \dots, \frac{a_\varrho(x-m)}{a_m(x-m)}$ ($\varrho = 0, \dots, m-1$) sind.

Da im Operatorenmodul der Vektoren von n Dimensionen (einschliesslich $n = \infty$) — ihm als Operatorenbereich den Ring der kommutativen quadratischen Matrizen n -ter Ordnung zugeordnet — dieselben Rechengesetze wie bei Zahlen gelten [3], muss das eben Gesagte auch in diesem Operatorenmodul bestehen; wir bewiesen also den

Hilfssatz I. Die Lösung der linearen vektoriellen Differenzgleichung m -ter Ordnung mit vertauschbaren quadratischen Matrizenkoeffizienten

$$(14) \quad \sum_{r=0}^m \mathbf{A}_r(x) \mathbf{u}(x+r) = \mathbf{b}(x) \quad (|\mathbf{A}_m(x)| \neq 0; x = 0, 1, \dots)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(15) \quad \mathbf{u}(\varrho) = \mathbf{u}_\varrho, \quad \varrho = 0, 1, \dots, m-1 \quad (\mathbf{u}_\varrho \text{ vorgegeben})$$

ist wie folgt:

$$(16) \quad \mathbf{u}(x) = \sum_{\pi=0}^{x-m} P_\pi(\mathbf{A}_r) \mathbf{b}(\pi) + \sum_{\varrho=0}^{m-1} R_\varrho(\mathbf{A}_r) \mathbf{u}_\varrho, \quad x > m-1,$$

hierbei werden die sog. Resolventenmatrizen $P_\pi(\mathbf{A}_r)$, $R_\varrho(\mathbf{A}_r)$ dargestellt, indem man in den Funktionen $P_\pi(a_r)$, $R_\varrho(a_r)$ (s. (13)) für die Skalarveränderlichen

$$(17) \quad \frac{\mathbf{A}_\varrho(0)}{\mathbf{A}_m(0)}, \dots, \frac{\mathbf{A}_\varrho(x-m)}{\mathbf{A}_m(x-m)} \quad (\varrho = 0, 1, \dots, m-1)$$

setzt.

Die Lösung einer partiellen Differenzgleichung genannten Typs lässt sich immer — wie in § 3 gezeigt wird — zu der Lösung solcher gewöhnlicher vektorieller Differenzgleichungen reduzieren, in denen die Koeffizienten Polynome der (unendlichen) Matrix

$$(18) \quad \mathbf{I} = [\lambda_{i-j}], \quad \lambda_{i-j} = \delta_{i-j,1} \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

d. h. Matrizen der Form²

$$(19) \quad \mathbf{A}_n \equiv \sum_{k=0}^n \lambda_k \mathbf{I}^k = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_0 & 0 & \dots \\ \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

² Hinsichtlich der Potenzen von $\mathbf{I}$ siehe [4].

kürzer:

$$\mathbf{A}_n = [\lambda_{i-j}]; \quad \lambda_{i-j} = 0, \quad \text{wenn } i - j \neq 0, 1, \dots, n$$

sind.

Die Matrizen $\mathbf{A}_n$ sind im Fall $\lambda_0 \neq 0$ invertabel, insbesondere gilt für $\lambda_0 = 1$

$$(110) \quad \frac{1}{\mathbf{A}_n} = \mathbf{A}_n^{-1} = \left(\mathbf{I}^0 + \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{I}^k \right)^{-1} = \sum_{v=0}^{\infty} \left(- \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{I}^k \right)^v.$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass die Matrizen $\mathbf{A}_n$ (n beliebig, einschliesslich $n = \infty$) einen kommutativen Ring definieren, in dem die Rechengesetze gelten:

$$(111) \quad \sum \lambda'_k \mathbf{I}^k + \sum \lambda''_k \mathbf{I}^k = \sum (\lambda'_k + \lambda''_k) \mathbf{I}^k$$

$$(112) \quad \sum \lambda'_k \mathbf{I}^k \cdot \sum \lambda''_k \mathbf{I}^k = \sum (\lambda'_0 \lambda''_k + \dots + \lambda'_k \lambda''_0) \mathbf{I}^k,$$

die mit denen im Polynomring $\Sigma \lambda_k z^k$ über den reellen Zahlen λ_k übereinstimmen.

Wir wollen nunmehr $\mathbf{A}_n^{-1}$ nach den Potenzen von $\mathbf{I}$ ordnen. Nach dem polynomischen Lehrsatz gilt

$$(113) \quad \mathbf{A}_n^{-1} = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_n=v} \frac{v!}{k_1! \dots k_n!} (-\lambda_1)^{k_1} \dots (-\lambda_n)^{k_n} \mathbf{I}^{k_1+\dots+nk_n},$$

wo $k_1, k_2, \dots, k_n$ nicht negative ganze Zahlen sind. Hier ist der Beiwert von $\mathbf{I}^k$ ($k = 0, 1, \dots$) leicht zu berechnen; es gilt nämlich

$$(114) \quad k = k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = v + k_2 + \dots + (n-1)k_n,$$

das heisst

$$(115) \quad v = k - k_2 - \dots - (n-1)k_n,$$

folglich ist der Beiwert von $\mathbf{I}^k$:

$$(116) \quad \lambda_k^{(-1)} = \sum_{k_1+\dots+nk_n=k} \frac{(k - k_2 - \dots - (n-1)k_n)!}{k_1! \dots k_n!} (-\lambda_1)^{k_1} \dots (-\lambda_n)^{k_n}.$$

Somit haben wir für $\mathbf{A}_n^{-1}$ erhalten:

$$(117) \quad \mathbf{A}_n^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(-1)} \mathbf{I}^k,$$

woraus zu sehen ist, dass $\mathbf{A}_n^{-1}$ auch dem erwähnten Matrizenring angehört (im Falle $\lambda_0 \neq 0$). Hiermit haben wir folgendes bestätigt:

Hilfssatz II. Wählen wir für die Koeffizienten in (14) die Matrizen (s. § 3):

$$(118) \quad \mathbf{A}_r(x) = \sum_{s=0}^n a_{rs}(x) \mathbf{I}^{n-s}; \quad r = 0, 1, \dots, m; \quad a_{mn}(x) = 1,$$

wo die $a_{rs}(x)$ beliebige Beiwerte und n eine nicht negative ganze Zahl bezeichnen, so gilt für die Inverse von $\mathbf{A}_m(x)$:

$$(119) \quad \mathbf{A}_m^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + nk_n = k} \frac{(k - k_2 - \dots - (n-1)k_n)!}{k_1! \dots k_n!} \times \\ \times (-a_{m,n-1}(x))^{k_1} \dots (-a_{m0}(x))^{k_n} \mathbf{I}^k,$$

ferner sind

$$(120) \quad \frac{\mathbf{A}_0(0)}{\mathbf{A}_m(0)}, \dots, \frac{\mathbf{A}_0(x-m)}{\mathbf{A}_m(x-m)} \quad (0 = 0, 1, \dots, m-1).$$

Elemente des kommutativen Ringes von Matrizen $[\lambda_{i-j}]$ ($\lambda_{i-j} = 0$ für $i < j$), deren ganze rationale Funktionen, somit auch die Resolventenmatrizen $P_\pi(\mathbf{A}_r)$, $R_\rho(\mathbf{A}_r)$ wie im Polynomring $\Sigma \lambda_k z^k$ über den reellen Zahlen λ_k berechnet werden können.

§ 2. Lösung der Anfangswertaufgaben von gewöhnlichen Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Zur Anwendung des Vorangehenden werden wir die explizite Lösung der gewöhnlichen Differenzgleichung

$$(21) \quad \sum_{s=0}^n a_s u(y+s) = c(y) \quad (a_n = 1; y = 0, 1, \dots)$$

mit den Anfangswerten

$$(22) \quad u(\sigma) = u^{(\sigma)}, \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1 \quad (u^{(\sigma)} \text{ vorgegeben})$$

ableiten.

(21) ist — wegen des Bestehens von (21) bei $y = 0, 1, \dots$ — mit dem linearen algebraischen Gleichungssystem gleichwertig:

$$(23) \quad \begin{bmatrix} a_n & 0 & 0 & \dots \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n) \\ u(n+1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(0) - \sum_{\sigma=0}^{n-1} a_\sigma u^{(\sigma)} \\ c(1) - \sum_{\sigma=0}^{n-2} a_\sigma u^{(\sigma+1)} \\ \vdots \\ c(n-1) - a_0 u^{(n-1)} \\ c(n) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Führt man die Matrizen (18) und die Vektoren

$$(24) \quad \mathbf{u} = [u(n+y)] \quad (y = 0, 1, \dots)$$

$$(25) \quad \mathbf{b} = [b(y)] \quad (y = 0, 1, \dots), \quad b(y) = \begin{cases} c(y) - \sum_{\sigma=0}^{n-1-y} a_{\sigma} u^{(\sigma+y)}, & y < n \\ c(y), & y > n-1 \end{cases}$$

ein, so kann (23) in vektorieller Form geschrieben werden:

$$(26) \quad \left(\sum_{s=0}^n a_s \mathbf{I}^{n-s} \right) \mathbf{u} = \mathbf{b},$$

woraus

$$(27) \quad \mathbf{u} = \left(\sum_{s=0}^n a_s \mathbf{I}^{n-s} \right)^{-1} \mathbf{b}$$

folgt. Nach (118)—(119) gilt aber

$$(28) \quad \left(\sum_{s=0}^n a_s \mathbf{I}^{n-s} \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \mathbf{I}^k$$

$$\lambda_k = \sum_{k_1 + \dots + n k_n = k} \frac{(k - k_2 - \dots - (n-1) k_n)!}{k_1! \dots k_n!} (-a_{n-1})^{k_1} \dots (-a_0)^{k_n},$$

wo $k_1, \dots, k_n$ nicht negative ganze Zahlen sind. Somit haben wir als Lösung des Problems (21)—(22):

$$(29) \quad u(y) = \mathbf{e}_{y-n+1}^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \mathbf{I}^k \right) \mathbf{b} = [\lambda_{y-n}, \lambda_{y-n-1}, \dots, \lambda_0] \begin{bmatrix} c(0) - \sum_{\sigma=0}^{n-1} a_{\sigma} u^{(\sigma)} \\ c(1) - \sum_{\sigma=0}^{n-2} a_{\sigma} u^{(\sigma+1)} \\ \vdots \\ c(n-1) - a_0 u^{(n-1)} \\ \vdots \\ c(y-n) \end{bmatrix},$$

wo $\mathbf{e}_i$ den i -te Basisspaltenvektor, d. h.

$$(210) \quad \mathbf{e}_i^* = [\overset{1}{0} \dots 0 \overset{i}{1} 0 \dots] \quad (i = 1, 2, \dots)$$

bedeutet, oder nach einer Umformung

$$u(y) = \sum_{\pi=0}^{y-n} \lambda_{y-n-\pi} c(\pi) - \sum_{\sigma=0}^{n-1} (\lambda_{y-n} a_{\sigma} + \lambda_{y-n-1} a_{\sigma-1} + \dots + \lambda_{y-n-\sigma} a_0) u^{(\sigma)}, y < n-1. \quad (211)$$

§ 3. Reduktion der Anfangswertaufgaben von partiellen Differenzgleichungen mit Koeffizienten, die von einer Veränderlichen unabhängig sind, zu denen der gewöhnlichen Gleichungen

Im vorigen Paragraph wurde gezeigt, dass sich die Lösung einer gewöhnlichen Differenzgleichung — falls ihre Koeffizienten Konstanten sind — zu der einer vektoriellen Gleichung mit Matrizenkoeffizienten reduzieren lässt. Seien nun Differenzgleichungen von zwei (oder mehr) Veränderlichen betrachtet, deren Koeffizienten jedoch von einer Veränderlichen (sei y) unabhängig sind. Wir können die dargelegte Methode ohne weiteres auch zu ihrer Lösung überführen, wenn nämlich die anderen Veränderlichen als Parameter behandelt werden. Im Folgenden wird das Reduktionsverfahren — der Einfachheit halber — für den Fall von zwei Veränderlichen durchgeführt. Es sei also die lineare Differenzgleichung m -ter bzw. n -ter Ordnung bezüglich x bzw. y für die Funktion $u(x, y)$ ($x, y = 0, 1, \dots$)

$$(31) \quad \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n a_{rs}(x) u(x+r, y+s) = c(x, y) \quad (a_{mn}(x) = 1)$$

mit den Anfangsbedingungen gegeben:

$$(32) \quad u(\varrho, y) = u_{\varrho}(y), \quad \varrho = 0, 1, \dots, m-1$$

$$(33) \quad u(x, \sigma) = u^{(\sigma)}(x), \quad \sigma = 0, 1, \dots, n-1$$

$$(34) \quad u_{\varrho}(\sigma) = u^{(\sigma)}(\varrho).$$

Hier stellen $u_{\varrho}(y)$ und $u^{(\sigma)}(x)$ vorgeschriebene Funktionen von x und y dar, die noch der Kompatibilitätsbedingung (34) genügen. (31) und (33) sind — wegen des Bestehens von (31) bei $y = 0, 1, \dots$ — mit dem linearen algebraischen Gleichungssystem vom Parameter x , gültig für die Unbekannten $u(x+r, n)$, $u(x+r, n+1)$, $\dots$ gleichwertig:

$$(35) \quad \sum_{r=0}^m \begin{bmatrix} a_{rn}(x) & 0 & 0 & \dots \\ a_{r,n-1}(x) & a_{rn}(x) & 0 & \dots \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1}(x) & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r0}(x) & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x+r, n) \\ u(x+r, n+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c(x, 0) \\ c(x, 1) \\ \vdots \\ c(x, n-1) \\ c(x, n) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} - \sum_{r=0}^m \begin{bmatrix} \sum_{\sigma=0}^{n-1} a_{r\sigma}(x) u^{(\sigma)}(x+r) \\ \sum_{\sigma=0}^{n-2} a_{r\sigma}(x) u^{(\sigma+1)}(x+r) \\ \vdots \\ a_{r0}(x) u^{(n-1)}(x+r) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Führt man die Matrizen (18) und die Vektoren

$$(36) \quad \mathbf{u}(x+r) = [u(x+r, n+y)] \quad (y=0, 1, \dots)$$

$$(37) \quad \mathbf{b}(x) = [b(x, y)] \quad (y=0, 1, \dots), \quad b(x, y) =$$

$$= \begin{cases} c(x, y) - \sum_{r=0}^m \sum_{\sigma=0}^{n-1-y} a_{r\sigma}(x) u^{(\sigma+y)}(x+r), & y < n \\ c(x, y) & , \quad y > n-1 \end{cases}$$

ein, so kann (35) in einer vektoriellen Form geschrieben werden:

$$(38) \quad \sum_{r=0}^m \left(\sum_{s=0}^n a_{rs}(x) \mathbf{I}^{n-s} \right) \mathbf{u}(x+r) = \mathbf{b}(x) \quad (a_{mn}(x) = 1).$$

Die zu der gewöhnlichen vektoriellen Differenzengleichung (38) gehörigen Anfangsbedingungen sind gemäss (32)

$$(39) \quad \mathbf{u}(\varrho) = \mathbf{u}_\varrho = [u(\varrho, n+y)], \quad \varrho = 0, 1, \dots, m-1 \quad (y=0, 1, \dots).$$

Nun, da wir die Lösung von (38) neben (39) nach den Hilfssätzen I und II schon ausführlich besprochen haben, bleibt also nichts anderes übrig, als aus der vektoriellen Lösung die Lösung des Problems (31)—(32)—(33)—(34) aufzuschreiben:

$$(310) \quad u(x, y) = \mathbf{e}_{y-n+1}^* \left\{ \sum_{\pi=0}^{x-m} P_\pi(\mathbf{A}_r) \mathbf{b}(\pi) + \sum_{\varrho=0}^{m-1} R_\varrho(\mathbf{A}_r) \mathbf{u}_\varrho \right\}; \quad x > m-1, \quad y > n-1.$$

Bemerkung: Das Reduktionsverfahren führt zu einer gewöhnlichen Differenzengleichung mit von x unabhängigen (also konstanten) Koeffizienten dann und nur dann, falls die $a_{rs}(x)$ in (31) solche gewesen sind.

§ 4. Eine Anwendung: Lösung eines partiellen Differenzgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten

Bei der mathematischen Behandlung der chemischen fraktionierten Verteilung [1] ergab sich das partielle Gleichungssystem (Gleichung (1) loc. cit., abgesehen von den Bezeichnungen):

$$(41) \quad v(x+1, y+1) = (1-f)w(x, y+1) + gv(x, y)$$

$$(42) \quad w(x+1, y+1) = fw(x, y+1) + (1-g)v(x, y),$$

wo f und g Konstanten bezeichnen und die folgenden Anfangsbedingungen gelten:

$$(43) \quad v(0, y) = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ 0, & y > 0 \end{cases}; \quad v(x, 0) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$(44) \quad w(0, y) = 0 \quad ; \quad w(x, 0) = 0.$$

Das Gleichungssystem (41)–(42) ist in Gleichungen, bestehend allein für v bzw. w , zu zerlegen:

$$(45) \quad v(x+2, y+1) - fv(x+1, y+1) - gv(x+1, y) - hv(x, y) = 0$$

$$(46) \quad w(x+2, y+1) - fw(x+1, y+1) - gw(x+1, y) - hw(x, y) = 0$$

$$(h = 1 - f - g).$$

v erfüllt die Bedingung (43) und

$$(47) \quad v(1, y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ g, & y = 1 \\ 0, & y > 1 \end{cases}$$

sowie w die Bedingung (44) und

$$(48) \quad w(1, y) = \begin{cases} 0 & y = 0 \\ 1 - g, & y = 1. \\ 0 & y > 1 \end{cases}$$

Da die Gleichungen (45) und (46) gleicher Gestalt sind, kann die gemeinsame Veränderliche $u(x, y)$ eingeführt werden, damit wurde uns die Aufgabe gestellt, die Differenzgleichung

$$(49) \quad u(x+2, y+1) - fu(x+1, y+1) - gu(x+1, y) - hu(x, y) = 0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(410) \quad u(0, y) = u_0(y) = \begin{cases} \alpha, & y = 0 \\ 0, & y > 0 \end{cases}; \quad u(1, y) = u_1(y) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \beta, & y = 1; \\ 0, & y > 1 \end{cases}$$

$$u(x, 0) = u^{(0)}(x) = \begin{cases} \alpha, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

zu lösen, wo die Relationen

$$(411) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = g \end{array} \right\} \text{ wenn } u = v \text{ bzw. } \left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = 1 - g \end{array} \right\} \text{ wenn } u = w$$

gelten. Die Lösung von (49)–(410) ist auf die der gewöhnlichen Gleichung

$$(412) \quad u(x+2) + a_1 u(x+1) + a_0 u(x) = b(x); \quad u(0) = u_0, \quad u(1) = u_1$$

zurückzuführen (s. (211)):

$$(413) \quad u(x) = \sum_{\pi=0}^{x-2} \lambda_{x-2-\pi} b(\pi) - (\lambda_{x-2} a_0) u_0 - (\lambda_{x-2} a_1 + \lambda_{x-3} a_0) u_1$$

$$(414) \quad \lambda_k = \sum_{k_1+2k_2=k} \frac{(k-k_2)!}{k_1! k_2!} (-a_1)^{k_1} (-a_0)^{k_2} = \sum_{k_2} \binom{k-k_2}{k_2} (-a_1)^{k-2k_2} (-a_0)^{k_2},$$

wo $\sum_{k_2}$ bedeutet, daß in der Summierung nur die Werte $k_2 \geq 0$ mit $k - 2k_2 \geq 0$ berücksichtigt werden. Berücksichtigt man, daß $\lambda_{x-2}(-a_0)$ ($x = 2, 3, \dots$) die Lösung von (412) (nämlich im Falle $u_0 = 1, u_1 = b(x) = 0$) darstellt und so die Identität

$$(415) \quad -\lambda_{x-1} = a_1 \lambda_{x-2} + a_0 \lambda_{x-3}, \quad x = 3, 4, \dots$$

— wie es leicht zu sehen, auch für $x = 2$ — besteht, so läßt sich (413) noch in eine einfachere Form bringen:

$$(416) \quad u(x) = \sum_{\pi=0}^{x-2} \lambda_{x-2-\pi} b(\pi) - \lambda_{x-2} a_0 u_0 + \lambda_{x-1} u_1, \quad x = 2, 3, \dots$$

Nach dem Reduktionsverfahren setzt man

$$(417) \quad \mathbf{A}_0 = -h\mathbf{I}, \quad \mathbf{A}_1 = -(f\mathbf{I}^0 + g\mathbf{I});$$

$$(418) \quad \mathbf{b}(x) = [b(x, y)], \quad b(x, y) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{r=0}^2 a_{r0} u^{(0)}(x+r) = \begin{cases} h\alpha, & x=0 \\ 0, & x>0 \end{cases}, & y=0 \\ 0, & y>0 \end{cases}$$

(also nach Einführung des Basisspaltenvektors $\mathbf{e}_1$)

$$(419) \quad \mathbf{b}(x) = \begin{cases} h\alpha \mathbf{e}_1, & x=0; \\ 0, & x>0 \end{cases}$$

$$(420) \quad \mathbf{u}_0 = [u(0, y+1)] = 0,$$

$$(421) \quad \mathbf{u}_1 = [u(1, y+1)] = \beta \mathbf{e}_1.$$

Die Lösung unserer Aufgabe ergibt sich mithin nach (310) und (416):

$$(422) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \mathbf{e}_y^* \{P_0(\mathbf{A}_r) \mathbf{b}(0) + R_1(\mathbf{A}_r) \mathbf{u}_1\} = \\ &= \mathbf{e}_y^* \{h \alpha P_0(\mathbf{A}_r) + \beta R_1(\mathbf{A}_r)\} \mathbf{e}_1; \quad x > 1, y > 0 \end{aligned}$$

wo

$$(423) \quad P_0(\mathbf{A}_r) = \sum_l \binom{x-2-l}{l} (h\mathbf{I})^l (f\mathbf{I}^0 + g\mathbf{I})^{x-2-2l} \quad (x-2-2l \geq 0)$$

$$(424) \quad R_1(\mathbf{A}_r) = \sum_l \binom{x-1-l}{l} (h\mathbf{I})^l (f\mathbf{I}^0 + g\mathbf{I})^{x-1-2l} \quad (x-1-2l \geq 0).$$

Setzt man nun

$$(425) \quad \Lambda(k) = [\lambda_{i-j}(k)] = \sum_l \binom{k-l}{l} (h\mathbf{I})^l (f\mathbf{I}^0 + g\mathbf{I})^{k-2l} \quad (k-2l \geq 0),$$

so sind $P_0(\mathbf{A}_r) = \Lambda(x-2)$ und $R_1(\mathbf{A}_r) = \Lambda(x-1)$, wo sich die Matrizen-elemente $\lambda_{i-j}(k)$ nach dem binomischen Lehrsatz bestimmen lassen:

$$(426) \quad \Lambda(k) = [\lambda_{i-j}(k)] = \sum_l \binom{k-l}{l} f^{k-2l} h^l \left(\sum_{v=0}^{k-2l} \binom{k-2l}{v} \left(\frac{g}{f} \right)^v \mathbf{I}^{l+v} \right).$$

Mit der Bezeichnung

$$(427) \quad l + v = n, \text{ d. h. } v = n - l$$

wird der Beiwert von $\mathbf{I}^n$ ($n = 0, 1, \dots$)

$$(428) \quad \lambda_n(k) = \sum_l \binom{k-l}{l} f^{k-2l} h^l \binom{k-2l}{n-l} \left(\frac{g}{f} \right)^{n-l},$$

oder unter Anwendung von

$$(429) \quad \binom{k-l}{l} \binom{k-2l}{n-l} = \binom{n}{l} \binom{k-l}{n}$$

ergibt sich

$$(430) \quad \lambda_n(k) = \sum_l \binom{n}{l} \binom{k-l}{n} f^{k-2l} h^l \left(\frac{g}{f} \right)^{n-l} = f^k \left(\frac{g}{f} \right)^n \sum_l \binom{n}{l} \binom{k-l}{n} \left(\frac{h}{gf} \right)^l.$$

Endlich gelangt man nach (422) zur Lösung von (49)–(410) wie folgt:

$$u(x, y) = \mathbf{e}_y^* \{h \alpha [\lambda_{i-j}(x-2)] + \beta [\lambda_{i-j}(x-1)]\} \mathbf{e}_1 = h \alpha \lambda_{y-1}(x-2) + \beta \lambda_{y-1}(x-1) =$$

$$(431) \quad \begin{aligned} &= \alpha h f^{x-2} \left(\frac{g}{f} \right)^{y-1} \sum_{(x-2-2l \geq 0)} \binom{y-1}{l} \binom{x-2-l}{y-1} \left(\frac{h}{gf} \right)^l + \\ &+ \beta f^{x-1} \left(\frac{g}{f} \right)^{y-1} \sum_{(x-1-2l \geq 0)} \binom{y-1}{l} \binom{x-1-l}{y-1} \left(\frac{h}{gf} \right)^l; \quad x > 1, y > 0 \end{aligned}$$

(Eingegangen 4. November, 1958.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] MEDGYESSY, P.—RÉNYI, A.—TETTAMANTI, K.—VINCE, I.: „Mathematische Diskussion der chemischen fraktionierten Verteilung im Falle einer nicht vollständigen Diffusion“ (Ungarisch). *Publications de l'Institut des Mathématiques Appliquées de l'Académie des Sciences de Hongrie* **3** (1954) 81—97.
- [2] JORDAN, CH.: *Calculus of finite differences*. Budapest, 1939.
- [3] RÉDEI, L.: *Algebra I*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
- [4] GELFAND, I. M.: *Előadások a lineáris algebraról*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

А. РЕТНО

Резюме

В работе показывается применение матричного исчисления к решению задачи Коши для линейных уравнений в конечных (обычно частных) разностях в случаях, когда коэффициенты не зависят от одной переменной. Сначала получается явное решение обыкновенных уравнений с постоянными коэффициентами (§ 2), после чего даётся конструктивный метод, с помощью которого решение уравнения в частных разностях может быть определено, если известно общее решение обыкновенных уравнений (вообще с переменными коэффициентами) (§ 3). В § 4 в качестве примера рассматривается явное решение задачи Коши одной системы уравнений с частными разностями и постоянными коэффициентами, встречающейся в одной проблеме химии.

В решениях используются лишь элементарные средства матричного исчисления и тот факт, что в коммутативном кольце треугольных матриц $[\lambda_{i-j}]$ ($\lambda_{i-j} = 0, i < j; i, j = 1, 2, \dots$) справедливы те же правила, что и в кольце многочленов $\sum \lambda_k z^k$ над вещественными числами и что в случае $\lambda_0 \neq 0$ эти матрицы обратимы и обратные матрицы также являются элементами кольца (§ 1).