SUR UN ÉTAT PSEUDO-STATIONNAIRE INTERVENANT DANS LA THÉORIE DU MÉLANGE

par

G. ADLER

§ 1. Introduction

M. A. Rényi s'occupe dans son travail [2] de la détermination de la partie d'une matière s'écoulant à travers un réservoir, resp. à travers un système de réservoirs couplés en série, qui passe dans le réservoir, resp. dans le système de réservoirs un temps plus court qu'une durée donnée. M. A. Rényi résoud le problème à l'aide du calcul des probabilités. Mais il examine le processus du mélange stationnaire, en faisant abstraction de la période initiale se réalisant au commencement du mélange.

Dans ce travail nous résolvons le problème discuté par M. A. Rényi à l'aide de la théorie des équations aux dérivées partielles, dans une forme plus générale. Il résultera de notre solution que dans le problème spécial considéré par M. A. Rényi on rencontre un cas extraordinairement surprenant et tout à fait propre aux processus initiaux, à savoir, immédiatement après le commencement du mélange il se produit un état stationnaire dans un certains sens. Cet état stationnaire, nous l'appellerons pseudo-stationnaire.

§ 2. Établissement du problème

La matière pénétrant dans le réservoir T subit une certaine modification qualitative pendant son séjour dans le réservoir, modification qui peut être caractérisée par une fonction strictement monotone du temps passé dans le réservoir. Nous l'experimerons de telle manière que la matière est assujettie dans le réservoir à un „vieillissement" continu. Étant donné que la fonction caractérisant la modification qualitative est une fonction strictement monotone, on peut caractériser la qualité des parties respectives de la matière simplement par le temps passé dans le réservoir, par „l'âge" de la partie considérée. Donc la matière ne vieillit que pendant son séjour dans le réservoir, en dehors du réservoir son âge ne varie pas.

Nous désignons le temps par t, l'âge de la matière par τ. Naturellement τ ne peut pas être négative.

Dans le réservoir au moment initial $t = 0$ il se trouve une quantité V_0 de matière d'âge $\tau = 0$. Au moment t on introduit dans le réservoir durant le temps dt la quantité $v(t)\,dt$, resp. on en retire la quantité de matière $w(t)\,dt$.

Soient

$$a(t, \tau) = \frac{\text{la quantité de la matière d'âge} \geqq \tau \text{ introduite par unité de temps}}{\text{la quantité totale de la matière introduite par unité de temps}},$$

$$b(t, \tau) = \frac{\text{la quantité de la matière d'âge} \geqq \tau \text{ retirée par unité de temps}}{\text{la quantité totale de la matière retirée par unité de temps}}$$

et finalement

$$A(t, \tau) = \frac{\text{la quantité de la matière d'âge} \geqq \tau \text{ se trouvant dans le réservoir}}{\text{la quantité totale de la matière se trouvant dans le réservoir}}.$$

L'équation engendrant le processus du mélange peut se déduire par le raisonnement qui suit: la quantité de la matière d'âge $\geqq \tau + dt$ se trouvant dans le réservoir au moment $t + dt$ est égale à la quantité de matière d'âge $\geqq \tau$ se trouvant dans le réservoir au moment t, augmentée resp. diminuée de la quantité de matière d'âge $\geqq \tau + dt$ introduite resp. retirée pendant la durée dt:

$$V(t + dt)\, A(t + dt, \tau + dt) =$$
$$= V(t)\, A(t, \tau) + a\,(t, \tau + dt)\, v\,(t)\, dt - b\,(t, \tau + dt)\, w\,(t)\, dt\,,$$

où $V(t)$ signifie la quantité totale de la matière se trouvant dans le réservoir au moment t:

$$V(t) = V_0 + \int_0^t [v(t) - w(t)]\, dt\,.$$

D'ici, après un arrangement et une division par dt, on obtient pour $dt \to 0$ l'équation cherchée:

$$\frac{\partial}{\partial t}(AV) + \frac{\partial}{\partial \tau}(AV) = a(t, \tau)\, v(t) - b(t, \tau)\, w(t)\,.$$

Supposons le mélange idéal, ce qui veut dire que

$$b(t, \tau) = A(t, \tau).$$

Pour simplifier, supposons que $V(t)$ est indépendante du temps: $V(t) \equiv V_0$. Alors notre équation peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial \tau} = [-A(t, \tau) + a(t, \tau)]\, \frac{v(t)}{V_0}\,. \tag{1}$$

C'est une équation aux dérivées partielles de premier ordre. La solution $A(t, \tau)$ ne possède de signification physique que dans le quadrant $(t \geqq 0,\ \tau \geqq 0)$ du plan (t, τ). Si $a(t, \tau) \equiv 0$ pour $\tau > t$, alors dans la partie satisfaisant à l'inégalité $\tau > t$ de ce quadrant $A(t, \tau) = 0$, parce qu'au moment t il n'existe pas de matière d'âge plus grand que t en aucun lieu. Pourtant dans le reste satisfaisant à l'inégalité $\tau \leqq t$ du quadrant $(t \geqq 0,\ \tau \geqq 0)$, comme on le verra dans le § 2, la solution est univoquement déterminée par la condition

$$A(t, 0) = 1 \qquad (t \geqq 0)\,.$$

Cette condition exprime que chacune des parties de la matière se trouvant dans le réservoir est d'âge $\geqq 0$.

§ 2. Solution du problème

Le système d'équations paramètrique des caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles (1) (voir [1]), en prenant pour paramètre la variable τ, est le suivant:

$$\frac{dt}{d\tau} = 1\,,$$

$$\frac{dA}{d\tau} = [-A + a(t, \tau)]\frac{v(t)}{V_0}\,.$$

On obtient de la première équation

$$t = \tau + t_0\,. \tag{3$_1$}$$

En le remplaçant dans la seconde équation:

$$\frac{dA}{d\tau} = [-A + a(\tau + t_0, \tau)]\frac{v(\tau + t_0)}{V_0}\,.$$

D'ici

$$A = \left[A_0 + \frac{1}{V_0}\int_0^\tau a(\eta + t_0, \eta)\, v(\eta + t_0) \cdot e^{\frac{1}{V_0}\int_0^\eta v(x+t_0)dx}\, d\eta\right] e^{-\frac{1}{V_0}\int_0^\tau v(x+t_0)dx}\,. \tag{3$_2$}$$

Dans l'équation (3_2) la constante d'intégration A_0 peut être déterminée à partir de la condition $A(t, 0) = 1$, et il en résulte

$$A_0 = 1\,.$$

En exprimant la constante d'intégration t_0 de l'équation (3_1):

$$t_0 = t - \tau\,,$$

et en la remplaçant dans l'expression (3_2), on en obtient la solution cherchée:

$$A(t, \tau) = \left[1 + \frac{1}{V_0}\int_0^\tau a(\eta + t - \tau, \eta)\, v(\eta + t - \tau) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot\, e^{\frac{1}{V_0}\int_0^\eta v(x+t-\tau)dx}\, d\eta\right] e^{-\frac{1}{V_0}\int_0^\tau v(x+t-\tau)dx} \qquad (\tau \leqq t)\,. \tag{4$_1$}$$

La fonction $A(t, \tau)$ possède une discontinuité sur la droite $t = \tau$, et comme nous l'avons déjà mentionné, pur $\tau > t$ on a

$$A(t, \tau) = 0 \qquad (\tau > t)\,. \tag{4$_2$}$$

Cette solution devient essentiellement plus simple, si nous l'employons pour le cas spécial discuté par M. A. Rényi. Alors

$$a(t, \tau) = \begin{cases} 0, \text{ si } \tau > 0 \\ 1, \text{ si } \tau = 0, \end{cases}$$

et

$$v(t) = c \qquad \text{(constante)}.$$

Dans ce cas on obtient:

$$A(t, \tau) = \begin{cases} e^{-\frac{c}{V_0}\tau}, & \text{si } \tau \leqq t \\ 0, & \text{si } \tau > t. \end{cases}$$

Nous avons obtenu le résultat surprenant que la fonction $A(t, \tau)$ est indépendante du temps t dans l'intervalle $0 \leqq \tau \leqq t$ où elle ne s'annule pas. Donc à chaque moment t_2 la distribution de la matière se trouvant dans le réservoir et ne surpassant pas l'âge $\tau = t_1$ $(t_2 > t_1)$ est la même distribution qu'au moment t_1. Ce résultat peut être aussi interpreté d'une autre manière: la quantité de matière d'âge $\geqq \tau$, en supposant qu'il existe déjà une telle matière dans le réservoir, est indépendante du temps. Ce phénomène sera appelé état pseudo-stationnaire.

Après cela, nous passons à la discussion du cas où les réservoirs $T_1, T_2, \ldots, T_r$ en nombre r sont couplés en série. Le couplage en série signifie que la matière retirée du réservoir T_i sera introduite dans le réservoir T_{i+1}. Les données relatives au réservoir T_i seront indiquées par les notations déjà employées, affectées de l'indice i.

Les réservoirs sont supposés identiques à tous les points de vue, et la matière assujettie à un vieillissement uniforme dans chacun des réservoirs. La matière s'écoulant emporte son âge de réservoir en réservoir et elle devient plus vieille dans chaque réservoir. Ces conditions peuvent se formuler de la manière suivante :

$$b_i(t, \tau) = A_i(t, \tau),$$
$$a_{i+1}(t, \tau) = b_i(t, \tau).$$

Au moment initial $t = 0$ supposons présente une quantité V_0 de matière d'âge $\tau = 0$ dans chaque réservoir. Alors chaque inconnue $A_i(t, \tau)$ peut-être déterminée à l'aide des formules (4), d'une manière telle que dans la détermination de $A_{i+1}(t, \tau)$ la fonction $a_{i+1}(t, \tau)$ soit remplacée par la fonction $a_{i+1}(t, \tau) = A_i(t, \tau)$, déterminée dans la période précédente.

Alimentons le premier réservoir d'une matière d'âge $\tau = 0$, c'est-à-dire soit

$$a_1(t, \tau) = \begin{cases} 0, \text{ si } \tau > 0 \\ 1, \text{ si } \tau = 0. \end{cases}$$

Alors en vertu de la formule récursive

$$A_{i+1}(t, \tau) = \begin{cases} \left[1 + \frac{c}{V_0} \int_0^\tau A_i(\eta + t - \tau, \eta)\, e^{\frac{c}{V_0}\eta}\, d\eta\right] e^{-\frac{c}{V_0}\tau}, & \text{si } \tau \leqq t \\ 0, & \text{si } \tau > t, \end{cases}$$

comme on peut le vérifier à l'aide du raisonnement par récurrence, on obtient:

$$A_n(t,\tau) = \begin{cases} e^{-\frac{c}{V_0}\tau} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{c}{V_0}\tau\right)^i}{i!}, & \text{si } \tau \leqq t \\ 0, & \text{si } \tau > t \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots, r).$$

Nous rencontrons de nouveau un cas pseudo-stationnaire : au moment t, dans aucun réservoir, la distribution de la matière d'âge $\leqq t$ ne dépend pas du temps t.

Enfin, pour la quantité totale $\mathfrak{A}_r(t, \tau)$ de la matière d'âge $\geqq \tau$ se trouvant dans le système de réservoirs en nombre r, on obtient:

$$\mathfrak{A}_r(t,\tau) = V_0 \sum_{n=1}^{r} A_n(t,\tau) = \begin{cases} V_0 e^{-\frac{c}{V_0}\tau} \sum_{i=0}^{r-1} (r-i) \frac{\left(\frac{c}{V_0}\tau\right)^i}{i!}, & \text{si } \tau \leqq t \\ 0, & \text{si } \tau > t. \end{cases}$$

Au cas où $t \to \infty$, quand la restriction $\tau \leqq t$ doit être considérée satisfaite pour chaque valeur τ finie, nos résultats se trouvent conformes aux solutions données par M. A. Rényi.

(Reçu le 18 Décembre 1959.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Courant, R.—Hilbert, D.: *Methoden der Mathematischen Physik,* II. Verlag Springer, Berlin (1937) 51—53.

[2] Rényi A.: „Autoklávok soros és párhuzamos kapcsolásáról és a keverés elméletéről." *MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **4** (1959) 155—165.

О ПСЕВДОСТАЦИОНАРНОМ СОСТОЯНИИ, ВСТРЕЧАЮЩЕМСЯ В ТЕОРИИ СМЕШИВАНИЯ

GY. ADLER

Резюме

Автор занимается решением проблемы исследованной A. Rényi в работе [2], в нестационарном случае. Эта проблема следующая : вещество, вступающее в резервуар T, непрерывно „устаряется". В резервуар в момент t вводится и выводится из него за единицу времени количество $v(t)$ вещества. В начальный момент $t = 0$ в резервуаре находится количество V_0 вещества возраста $\tau = 0$. Пусть

$$a(t,\tau) = \frac{\text{количество вещества введенного в } T \text{ за единицу времени, возраст которого не менее } \tau}{\text{количество всего вещества, введенного в } T \text{ за единицу времени}},$$

$$A(t,\tau) = \frac{\text{количество находящегося в } T \text{ вещества, возраст которого не меньше } \tau}{\text{количество всего находящегося в } T \text{ вещества.}}.$$

Пусть в резервуаре смешивание будет идеальным, т. е. введенное в резервуар вещество сразу же равномерно смешивается с находящимся там веществом. Тогда решение проблемы дается формулами (4_1) и (4_2).

В том случае, когда $v(t) = c$ (постоянная) и

$$a(t,\tau) = \begin{cases} 0, \text{ если } \tau > 0 \\ 1, \text{ если } \tau = 0, \end{cases}$$

решение дается формулой

$$A(t,\tau) = \begin{cases} e^{-\frac{c}{V_0}\tau}, \text{ если } \tau \leqq t \\ 0, \quad \text{если } \tau > t. \end{cases}$$

Мы получим неожиданный результат, согласно которому функция $A(t,\tau)$ на отрезке $0 \leqq \tau \leqq t$, где она не исчезает, не зависит от времени t. Это явление называется псевдостационарным состоянием.

В том случае, когда в ряд включено r резервуаров, во всех отношениях тождественных резервуару T, в полученной таким образом системе скорость протекания вещества снова равна постоянной величине c и во всех резервуарах в момент $t = 0$ имеется по количеству V_0 вещества возраста $\tau = 0$, то для количества вещества $\mathfrak{A}_r(t,\tau)$ в момент t, возраст которого не превосходит τ, получается формула

$$\mathfrak{A}_r(t,\tau) = \begin{cases} e^{-\frac{c}{V_0}\tau} \sum_{i=0}^{r-1} (r-i) \frac{\left(\frac{c}{V_0}\tau\right)^i}{i!}, & \text{если } \tau \leqq t \\ 0, & \text{если } \tau > t. \end{cases}$$

И в этом случае речь идет о псевдостационарном состоянии.