ÜBER GEWISSE ELEMENTENFOLGEN DES HILBERTSCHEN RAUMES

von

KÁROLY KONCZ[1]

§ 1.

Definition. *Eine abzählbare Einheitsvektorenmenge* $\{v_n\}$ *des Hilbertschen Raumes heisst eine u-Menge, wenn die Norm der Differenz von jedem Vektorenpaar grösser als* $\sqrt{2}$ *ist ; und heisst eine g-Menge, wenn die Norm der Differenz von jedem Vektorenpaar nicht kleiner als* $\sqrt{2}$ *ist, aber mindestens für ein Vektorenpaar* $\| v_n - v_m \| = \sqrt{2}$ *gilt* $(n \neq m)$.

J. CZIPSZER und P. ERDŐS haben in *Matematikai Lapok* **8** (1957) S. 313 die folgende Aufgabe gestellt:

Es soll bewiesen werden, dass man auf der Oberfläche der Einheitskugel des Hilbertschen Raumes eine unendliche Punktmenge geben kann, in welcher die Entfernung von zwei beliebigen Punkten grösser als $\sqrt{2}$ ist, und wenn eine unendliche Teilmenge der festen Einheitskugel des Hilbertschen Raumes mindestens einen Punkt der Inneren der Kugel enthält, so enthält sie zwei Punkte, deren Entfernung kleiner als $\sqrt{2}$ ist.

Es ist klar, dass diese Aufgabe auf die Existenz von u-Mengen hinweist. Die vorliegende Arbeit geht aus dieser Aufgabe aus, und untersucht die Frage, ob bei u-Mengen bzw. g-Mengen die Entfernungen von $\sqrt{2}$ *bedeutend* abweichen können oder nicht, bzw. wann diese Abweichung von gewissem Gesichtspunkt aus am grössten ausfällt.

§ 2.

Ist $A = \{v_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ eine g- oder eine u-Menge, so ist — mit der Bezeichnung $\alpha_{mn} = \| v_m - v_n \| - \sqrt{2}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ n \neq m)$ — bei festem m $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_{mn} = 0$. (Dies ist ein Korollar unseres Satzes 4, den wir unten beweisen werden.) Es wäre also natürlich die Summe der Doppelreihe $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}$ als Mass der Abweichung von $\sqrt{2}$ zu wählen, vorausgesetzt, dass diese für jede g- bzw. u-Menge konvergieren würde, was aber nicht der Fall ist. ((m) bedeutet neben dem $\sum$-Zeichen, dass das m-te Glied der Reihe fehlt, d. h. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} c_{mn} = \sum\limits_{n=0}^{m-1} c_{mn} + \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} c_{mn}$.) Es besteht nämlich:

[1] Technische Hochschule, Budapest.

Satz 1. *Es gibt eine g-Menge, für welche* $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^{l} = \infty$, *wie auch der Exponent* $l > 0$ *gewählt wird.*

Beweis. Setzen wir

$$v_n = (x_{n0}, x_{n1}, \ldots, x_{ni}, \ldots) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit

$$x_{ni} = 0 \qquad \text{für } i \neq n, n+1$$

und

$$x_{nn} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x_{n,n+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dann gilt für jedes m

$$\alpha_{m,m+1} = \sqrt{3} - \sqrt{2},$$

ferner $\alpha_{mn} = 0$, wenn $|m - n| \geqq 2$. Also $\{v_n\}$ ist die gesuchte g-Menge.

Nach dem Vorangehenden ist es natürlich zu fragen: Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}$ für alle g- bzw. u-Mengen, oder wenn dies nicht der Fall ist, ist es möglich einen solchen Exponent $\varepsilon > 0$ zu finden, für welchen $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^{1+\varepsilon}$ für alle g- bzw. u-Mengen konvergiert. Die Antwort wird auf diese Frage durch folgende Sätze gegeben:

Satz 2. *Man kann eine u-Menge konstruieren, für welche* $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^{1+\varepsilon} < \infty$ *für jedes* m *und jedes* $\varepsilon > 0$ *ist.*

Satz 3. *Zu jedem* $0 < \varepsilon < 1$ *lässt sich aber auch eine g-Menge konstruieren, für welche* $\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^{1+\varepsilon} = \infty$ *für jedes* m *ist.*

Beweis von Satz 2. Es sei

(1) $$v_n = (x_{n0}, x_{n1}, \ldots, x_{ni}, \ldots) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

(2) für $n = 0$ setzen wir $x_{00} = 1$ und $x_{0i} = 0$, wenn $(i = 1, 2, 3, \ldots)$;

(3) $$\begin{cases} \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots \text{ erklären wir } x_{ni} = -\dfrac{1}{n+1}, \\ \text{wenn } i = 0, 1, \ldots, n-1 \text{ und} \end{cases}$$

(4) $$x_{nn} = \sqrt{1 - \frac{n}{(n+1)^2}},$$

(5) ferner $x_{ni} = 0$, wenn $i > n$.

Es folgt aus (1) bis (5), dass

$$\alpha_{0n} = \| v_0 - v_n \| - \sqrt{2} = \sqrt{(1 - x_{n0})^2 + (n-1)\, x_{n0}^2 + x_{nn}^2} - \sqrt{2} =$$

$$= \sqrt{1 - 2\, x_{n0} + x_{n0}^2 + n\, x_{n0}^2 - x_{n0}^2 + 1 - n\, x_{n0}^2} - \sqrt{2},$$

das heisst

$$\alpha_{0n} = \sqrt{2}\,(\sqrt{1 - x_{n0}} - 1) = \frac{-\sqrt{2}\,x_{n0}}{\sqrt{1 - x_{n0}} + 1}. \tag{6}$$

Aus (6) folgt $0 < \alpha_{0n} < \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$, so dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_{0n}^{1+\varepsilon} < +\infty$ für $\varepsilon > 0$ besteht. Ähnlich zu den Vorangehenden haben wir für

$$\alpha_{mn} = \sqrt{(x_{m0} - x_{n0})^2\, m + (x_{mm} - x_{n0})^2 + x_{n0}^2\,(n - m - 1) + x_{nn}^2} - \sqrt{2} =$$

$$= \sqrt{x_{m0}^2 m + x_{n0}^2\, m - 2 x_{m0} x_{n0} - 2\, x_{mm} x_{n0} + x_{n0}^2 + x_{mm}^2 + x_{n0}^2 (n - m - 1) + x_{nn}^2} - \sqrt{2}.$$

Ferner folgt aus $\| v_m \| = \| v_n \| = 1$

$$\alpha_{mn} = \sqrt{2 - 2\, x_{n0}\,(x_{mm} + m\, x_{m0})} - \sqrt{2} =$$

$$= \sqrt{2}\, \frac{-x_{n0}\,(x_{mm} + m\, x_{m0})}{\sqrt{1 - x_{n0}(x_{mm} + m\, x_{m0})} + 1}.$$

Auf Grund von (3) sieht man leicht, dass

$$c_m = x_{mm} + m\, x_{m0} = \sqrt{1 - \frac{m}{(m+1)^2}} - \frac{m}{m+1} > 0, \tag{7}$$

also

$$0 < \alpha_{mn} < \frac{c_m \sqrt{2}}{n+1},$$

und daraus ergibt sich $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \alpha_{mn}^{1+\varepsilon} < +\infty$ $(\varepsilon > 0)$. Damit haben wir den Beweis von Satz 2 beendet.

Beweis von Satz 3.

Hilfssatz 1. *Die Einheitsvektorenmenge* $\{v_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *des Hilbertschen Raumes ist dann und nur dann eine g-Menge, wenn* $(v_m, v_n) \leqq 0$ *für* $m \neq n$; $m = 0, 1, 2, \ldots$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ *und für mindestens ein Vektorenpaar* $(v_m, v_n) = 0$ *ist; und dann und nur dann eine u-Menge, wenn für jedes Vektorenpaar* $(m \neq n)$ $(v_m, v_n) < 0$ *gilt.*

Beweis. Tatsächlich hat man

$$\| v_m - v_n \|^2 = \| v_m \|^2 + \| v_n \|^2 - 2\,(v_m, v_n) = 2 - 2\,(v_m, v_n), \tag{8}$$

was zu beweisen war.

Wir setzen nun $\beta_{mn} = -(v_m, v_n)$. Dann besteht

Hilfssatz 2. *Es gilt*

$$\beta_{mn} = \frac{1}{2}(\alpha_{mn}^2 + 2\sqrt{2}\,\alpha_{mn}) \tag{9}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots;\; n = 0, 1, 2, \ldots;\; m \neq n).$$

Beweis.

$$\alpha_{mn}^2 + 2\sqrt{2}\,\alpha_{mn} = \|v_m - v_n\|^2 - 2\sqrt{2}\,\|v_m - v_n\| + 2 +$$

$$+ 2\sqrt{2}\,\|v_m - v_n\| - 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 2 - 2(v_m, v_n) + 2 - 4 = 2\,\beta_{mn},$$

was zu beweisen war.

Ferner wird uns noch nützlich sein der folgende

Hilfssatz 3. *Wenn $\{v_n\}$ eine g-Menge oder eine u-Menge ist, so besteht*

$$\frac{2\,\beta_{mn}}{1 + 2\sqrt{2}} < \alpha_{mn}. \tag{10}$$

Beweis. Wenn $\{v_n\}$ eine g-Menge oder eine u-Menge ist, so gilt

$$\alpha_{mn}^2 \leqq \alpha_{mn} \leqq 2 - \sqrt{2} < 1,$$

so dass (10) folgt aus (9), was zu beweisen war.

Um also eine g-Menge mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^{1+\varepsilon} = \infty$ zu erhalten, genügt es eine solche zu konstruieren, für welche $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^{1+\varepsilon} = \infty$ gilt. Eine derartige g-Menge ist die folgende: Es sei $0 < \delta < 1$ und

$$c_k = \frac{d}{k^{\frac{1}{2}+\gamma}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo

$$0 < \gamma < \frac{1-\varepsilon}{2(1+\varepsilon)},$$

und $d > 0$ so gewählt wird, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 2\,\delta - \delta^2$ besteht.

Die Vektoren der Menge seien:

$$\left\{\begin{array}{ll} v_n = (x_{n0}, x_{n1}, \ldots, x_{ni}, \ldots) & (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ \text{wo } x_{nn} = 1 - \delta, & \\ x_{ni} = -c_{k+1}, \text{ wenn } i = 2^{n+1} \cdot k + 2^n & (k = 0, 1, 2, \ldots); \\ \text{sonst setzen wir} & \\ x_{ni} = 0. & \end{array}\right. \tag{11}$$

Man sieht leicht, dass

$$(v_m, v_{2^m + k \cdot 2^{m+1}}) = -(1-\delta)\,c_{k+1}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

und sonst $(v_m, v_n) = 0$ gilt $(m < n)$. Es folgt also $\beta_{mn} \geqq 0$ und

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_{mn}^{1+\varepsilon} = (1-\delta)^{1+\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{1+\varepsilon} = (1-\delta)^{1+\varepsilon} d^{1+\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(\frac{1}{2}+\gamma)(1+\varepsilon)}} = \infty,$$

denn $\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)(1+\varepsilon) < 1$ besteht nach der Voraussetzung. Damit haben wir den Beweis von Satz 3 beendet.

§ 3.

Satz 4. *Für jede g- oder u-Menge gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^2 \leqq \frac{1}{2} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Beweis.

Hilfssatz 4. *Für jede g- oder u-Menge gilt die Ungleichung*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 \leqq 1 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{12}$$

Beweis. Betrachten wir eine beliebige g- oder u-Menge $\{v_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, und es sei $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ ein System von nichtnegativen Zahlen. Dann ist

$$\tag{13} \left\{ \begin{aligned} &\left(\sum_{n=1}^{k}{}^{(m)} \mu_n \beta_{mn}\right)^2 = \left(v_m, \sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \mu_n v_n\right)^2 \leqq \\ &\leqq \left\| \sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \mu_n v_n \right\|^2 = \sum_{p=0}^{k}{}^{(m)} \sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \mu_n \mu_p (v_n, v_p) \leqq \\ &\leqq \sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \mu_n^2 (v_n, v_n) = \sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \mu_n^2 . \end{aligned} \right.$$

Inmitten haben wir $(v_m, v_n) \leqq 0$ benützt. Wenn wir $\mu_n = \beta_{mn}$ setzen, so kommt aus (13)

$$\left(\sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \beta_{mn}^2\right)^2 \leqq \sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \beta_{mn}^2,$$

und daraus

$$\sum_{n=0}^{k}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 \leqq 1 .$$

k ist hier beliebig, so dass sich die Behauptung von Hilfssatz 4 ergibt.

Um den Beweis von Satz 4 zu vollenden, erwähnen wir noch

Hilfssatz 5. *Wenn $\{v_n\}$ eine g- oder u-Menge ist, so hat man*

$$\alpha_{mn} \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \beta_{mn} . \tag{14}$$

Beweis.[2] Wenn wir von der rechten Seite von (9) $a_{mn}^2 \geqq 0$ weglassen, so folgt augensichtlich (14) aus (9).

Zurückkehrend zum Beweis von Satz 4, aus (14) und (12) folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^2 \leqq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \beta_{mn}^2 \leqq \frac{1}{2},$$

was zu beweisen war.

Eine geringe Abänderung der Konstruktion im Beweis des Satzes 3 zeigt, dass die Behauptung des Satzes 4 im folgenden Sinne scharf ist:

Satz 5.[3] *Zu einer beliebigen, positiven, streng monoton wachsenden, gegen Unendlich strebenden, von unten konkaven Zahlenfolge* $\{f(n)\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ *kann man eine g-Menge konstruieren, für welche*

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^2 f(n) = \infty \qquad (m = 0, 1, 2, \dots) \tag{15}$$

ist.

Beweis. Es sei für $m = 0, 1, 2, \dots;\ k = 0, 1, 2, \dots$

$$g_m(k) = f([2k+1]\, 2^m) \tag{16}$$

und in den Intervallen $k \leqq x \leqq k+1$ sei $g_m(x)$ linear. Mit $h_m(x)$ bezeichnen wir die rechtsseitige Derivierte von $g_m(x)$. Offenbar ist $h_m(x)$ eine positive, monoton abnehmende Funktion.

Betrachten wir die Menge

$$\begin{cases} B = \{v_m\} = \{(x_{m0}, x_{m1}, \dots, x_{mi}, \dots)\} & (m = 0, 1, 2, \dots), \\ \text{wo} & \\ x_{mm} = \dfrac{1}{2}, & \\ x_{mi} = -c_{mk}, \quad \text{wenn} \quad i = 2^m(2k+1) & (k = 0, 1, 2, \dots), \\ \text{sonst} & \\ x_{mi} = 0 & \end{cases} \tag{17}$$

gesetzt wurde.

Die Zahlen $c_{mk} > 0$ werden mit der Formel

$$c_{mk} = \frac{\sqrt{h_m(k)}}{\sigma_m \cdot g_m(k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots;\quad m = 0, 1, 2, \dots) \tag{18}$$

bestimmt, und ferner werde

[2] Diese Abkürzung meines ursprünglichen, längeren Beweises stammt von Prof. B. Sz.-Nagy.

[3] Auf das Bestehen dieses Satzes hat mich Prof. G. Alexits aufmerksam gemacht.

$$(19) \qquad \sigma_m = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_m(k)}{[g_m(k)]^2}} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

gesetzt.

Es ist evident, dass $\| v_m \| = 1$ ist, sobald die in der Definition von σ_m stehende Reihe konvergent ist. Diese Konvergenz ist aber, wegen der monotonen Abnahme von $\frac{h_m(x)}{[g_m(x)]^2}$ und wegen $\lim\limits_{x \to +\infty} g_m(x) = +\infty$, eine Folge der Gleichheit

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_m(x)}{[g_m(x)]^2} d x = \left[- \frac{1}{g_m(x)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{g_m(0)}.$$

Es ist auch klar, dass

$$(v_m, v_{[2k+1]2^m}) = -\frac{1}{2} c_{mk} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots ; \; k = 0, 1, 2, \ldots),$$

und sonst im Falle $n > m$ $(v_m, v_n) = 0$ gilt. Deswegen ist B tatsächlich eine g-Menge, da $\beta_{mn} \geqq 0$ und zum Beispiel $\beta_{23} = 0$ ist.

Endlich ist

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \beta_{mn}^2 f(n) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} c_{mk}^2 f([2k+1] 2^m) =$$

$$= \frac{1}{4 \sigma_m^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_m(k)}{[g_m(k)]^2} g_m(k) = +\infty,$$

da auch $\frac{h_m(x)}{g_m(x)}$ monoton abnehmend ist und

$$\int_0^{+\infty} \frac{h_m(x)}{g_m(x)} dx = [\ln g_m(x)]_0^{+\infty} = +\infty$$

besteht. Auf Grund von der Ungleichheit (10) ergibt sich die Behauptung des Satzes 5.

§ 4.

Bezeichnen wir jetzt das System aller g-Mengen mit $\mathfrak{G}$, das System aller u-Mengen mit $\mathfrak{U}$, ferner die Abweichungssummen für eine Menge A (wo $A \in \mathfrak{G}$ oder $A \in \mathfrak{U}$) mit $s_m(A) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^2$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Der Satz 4 sagt, dass *die Menge der Abweichungssummen von oben beschränkt ist und zwar ist* $\frac{1}{2}$ *gewiss eine obere Schranke, d. h.*

$$s_m(A) \leq \frac{1}{2}, \quad \text{wenn} \quad A \in \mathfrak{G} \quad \text{oder} \quad A \in \mathfrak{U}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Weiterhin ist die Frage natürlich, ob es für die $s_m(A)$ eine kleinere obere Schranke als $\frac{1}{2}$ gibt. Es ist einzusehen, dass die Antwort negativ ist, es ist nämlich leicht eine Menge $A \in \mathfrak{G}$ bei gegebenem $\varepsilon > 0$ zu konstruieren, mit $s_m(A) > \frac{1}{2} - \varepsilon$ für ein einziges m.

Weiterhin können wir noch fragen: Existiert es eine solche Menge A ($A \in \mathfrak{G}$ oder $A \in \mathfrak{U}$), bei welcher für mehrere m oder für jedes m die $s_m(A)$ sich beliebig zu $\frac{1}{2}$ nähern? Auf diese Frage gibt der nachfolgende Satz in gewisser Hinsicht eine Antwort:

Satz 6. *Zur beliebig vorgegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Menge $A \in \mathfrak{G}$, für welche bei $m = 0, 1, 2, \ldots$*

$$s_{2m}(A) > \frac{1}{2} - \varepsilon \tag{20}$$

ist.

Beweis. Es sei A eine Vektorenfolge $A = \{r_k : k = 0, 1, 2, \ldots\}$, und setzen wir

$$r_{2m} = v_m, \quad r_{2m+1} = w_m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

So ist

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{ll} & A = \{v_m : m = 0, 1, 2, \ldots\} \cup \{w_m : m = 0, 1, 2, \ldots\}, \\ \text{wo} & \\ & v_m = (x_{m0}, x_{m1}, \ldots, x_{mi}, \ldots) \\ \text{und} & \\ & x_{mi} = c_k \text{ für } i = 2^{m+1}k + 2^m - 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \\ & x_{mi} = 0 \text{ für } i \neq 2^{m+1}k + 2^m - 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \\ \text{ferner} & \\ & w_m = (y_{m0}, y_{m1}, \ldots, y_{mi}, \ldots), \\ \text{wo} & \\ & y_{mm} = -1, \\ & y_{mi} = 0 \text{ für } i \neq m; \end{array}\right.$$

die Zahlen $c_k > 0$ sind so gewählt, dass $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = 1$ ist und

$$c_k < \left(\frac{2}{\sqrt{1 - 2\varepsilon}} - 1\right)^2 - 1 = \delta$$

besteht.

Es ist klar, dass $A \in \mathfrak{G}$. Betrachten wir jetzt

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} s_{2m}(A) = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} (\|v_m - v_n\| - \sqrt{2})^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (\|v_m - w_n\| - \sqrt{2})^2 \\ (m = 0, 1, 2, \ldots). \end{array}\right.$$

Aus (21) folgt, da $\| v_m - v_n \| - \sqrt{2} = 0$ ist, wenn $n = 0, 1, 2, \ldots;$ $m = 0, 1, 2, \ldots;$ $n \neq m$,

$$s_{2m}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\| v_m - w_n \| - \sqrt{2})^2 = [\sqrt{(c_0+1)^2 + 1 - c_0^2} - \sqrt{2}]^2 +$$

$$+ [\sqrt{(c_1+1)^2 + 1 - c_1^2} - \sqrt{2}]^2 + \ldots + [\sqrt{(c_n+1)^2 + 1 - c_n^2} - \sqrt{2}]^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [\sqrt{2 c_n + 2} - \sqrt{2}]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 c_n^2}{[\sqrt{c_n + 1} + 1]^2} >$$

$$> \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 c_n^2}{(\sqrt{\delta + 1} + 1)^2} = \frac{2}{(\sqrt{\delta+1} + 1)^2} = \frac{1}{2} - \varepsilon .$$

Damit haben wir den Beweis von Satz 6 beendet.

Zum Schluss möchte ich den Herren Prof. G. Alexits, Prof. Á. Császár, Prof. P. Erdős, Prof. B. Sz.-Nagy und Adj. D. Králik für ihre bereitwillige und herzliche Hilfe, die sie mir bei der Fertigstellung dieser Arbeit dargebieten haben, aufrichtigen Dank sagen.

(Eingegangen: 7. März, 1960.)

О НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ЭЛЕМЕНТОВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

K. KONCZ

Резюме

В § 1 дается следующее

Определение: Множество единичных векторов гильбертова пространства $\{v_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ называется u-множеством, если $\|v_m - v_n\| > \sqrt{2}$ для каждого $m \neq n$; и g-множеством, если $\|v_m - v_n\| \geqq \sqrt{2}$ для каждого $m \neq n$, но по крайней мере для одной пары векторов $\|v_m - v_n\| = \sqrt{2}$.

J. Czipszer и P. Erdős в 1957 году поставили задачу, в которой содержится указание на существование u-множества.

Настоящая работа в сущности занимается исследованием того, может ли быть уклонение $\|v_m - v_n\| - \sqrt{2}$ (обозначаемое через α_{mn}) значительным.

§ 2 изучает вопрос, что целесообразно было бы выбрать за меру уклонений. Мы доказываем, что $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^l$ $(l>0)$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^{1+\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ негодны, потому что эти ряды могут расходится ((m) обозначает, что отсутствует член, который имеет индекс m; т. е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} c_{mn} = \sum\limits_{n=0}^{m-1} c_{mn} + \sum\limits_{n=m+1}^{\infty} c_{mn}$).

В § 3 доказывается, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^2$ пригодная мера, потому что

$\sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^2 < \frac{1}{2}$ для всех g- или u-множеств и что эта теорема сходимости остра в некотором смысле.

В § 4 для g- или u-множества A мы употребляем обозначение

$$s_m(A) = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{(m)} \alpha_{mn}^2$$

и доказываем, что к каждому $\varepsilon > 0$ можно найти такое g-множество A, для которого

$$s_{2m}(A) > \frac{1}{2} - \varepsilon \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$