SUR UN PROCÉDÉ D'APPROXIMATION AVEC DES CONDITIONS AUX LIMITES

par

MELANIE SALLAY

Soit $\mathcal{C}$ la classe des fonctions $g(x)$ continues dans l'intervalle $[0, 1]$ et satisfaisant aux conditions

(1) $$a_i\, g(0) + b_i\, g(1) = 0 \qquad i = 1, 2.$$

Désignons par $\mathcal{C}_2$ la classe des fonctions admettant une seconde dérivée continue et appartenant à la classe $\mathcal{C}$. De plus soit H une transformation linéaire définie sur $g \in \mathcal{C}$ qui transforme la classe $\mathcal{C}$ dans l'espace de Banach B de telle manière, que

$$\|\mathrm{Hg}\|_B \leqq \alpha \|g\| \quad (g \in \mathcal{C})$$

$$\|\mathrm{Hg}\|_B \leqq \beta \|g''\| \quad (g \in \mathcal{C}_2).$$

Dans son travail [1] M. G. FREUD a démontré que pour tous les $\nu \geqq 1$ ν entier)

$$\|\mathrm{Hg}\|_B \leqq (\alpha + 8\, \beta \nu^2)\, \omega_2(g; \nu^{-1})$$

où

$$\omega_2(g, \delta) = \max_{h \leqq \delta} |g(x + h) - 2\, g(x) + g(x - h)|.$$

Dans notre ouvrage nous examinerons le problème précédant au cas où les fonctions $g(x)$ sont dérivables aux extrémités de l'intervalle $[0, 1]$ et $g(x)$ satisfait au lieu de (1) aux conditions ci-dessous:

(2) $$a_i\, g(0) + b_i\, g(1) + c_i\, g'(0) + d_i\, g'(1) = 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4\cdot$$

Précisément nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème. *Soit $\mathcal{C}^*$ la classe des fonctions pour lesquelles*

a) *$g(x)$ est continue dans l'intervalle $[0, 1]$ et dérivable aux extrémités de l'intervalle,*

b) *$g(x)$ satisfait aux conditions* (2).

La transformation linéaire H applique $\mathcal{C}^*$ dans l'espace de Banach B de telle manière, que

(3) $$\|\mathrm{Hg}\|_B \leqq \alpha \|g\| \quad (g \in \mathcal{C}^*)$$
$$\|\mathrm{Hg}\|_B \leqq \beta \|g''\| \quad (g \in \mathcal{C}_2).$$

Alors pour tous les $\nu \geqq 1$ (ν entier)

$$\|\mathrm{Hg}\|_B \leqq (5\,\alpha + 32\,\beta\nu^2)\,\omega_2(g_1\,\nu^{-1}) + (2\,\alpha + 20\,\beta\nu^2)\,\frac{1}{\nu}\max_{i=0,1}|\delta^{(i)}|\,, \tag{4}$$

où

$$\delta^{(0)} = 2\,\nu\left[g\left(\frac{1}{2\,\nu}\right) - g(0)\right] - g'(0)$$

$$\delta^{(1)} = 2\,\nu\left[g(1) - g\left(1 - \frac{1}{2\,\nu}\right)\right] - g'(1)\,.$$

Remarques. 1) Si dans (2) $c_i \equiv d_i \equiv 0$, les conditions concernant la dérivée de la fonction $g(x)$ n'existent pas, ainsi $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}$. Dans ce sans notre théorème est une généralisation du théorème de M. G. FREUD.

2) Si nous choisissons pour H une série de transformations linéaires $\{H_\nu\}$, notre théorème est plus interessant au cas où dans les conditions (3) α est borné et β est au plus d'ordre $O(\nu^{-2})$.

Soit par exemple $H = \{E - A_n f\}$, — où $\{A_n\}$ est une série de transformations linéaires transformant la classe $\mathcal{C}^*$ à la classe des polynomes de la forme $\sum_{k=0}^{n} C_k \cos 2\,k\,\pi$ et E est la transformation identique, — et qui satisfait aux conditions:

$$\|E - A_n f\| \leqq \alpha\,\|f\| \qquad \text{pour} \quad f \in \mathcal{C}^*$$

$$\|E - A_n f\| \leqq \beta\,n^{-2}\,\|f''\| \quad \text{pour} \quad f \in \mathcal{C}_2^*\,.$$

Si nous supposons, que $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ d'après notre théorème nous pouvons facilement constater que $\|\,Hf\,\| = O(n^{-\alpha})$. De plus, si $f(x)$ est dérivable et $f'(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ il en résulte que $\|\,Hf\,\| = O(n^{-(1+\alpha)})$.

Démonstration du théorème. Divisons l'intervalle $[0, 1]$ en $4\,\nu$ parties égales et déterminons les fonctions

$$g_\nu(x) \text{ et } p_\nu(x)$$

de telle façon que

1) Soit $g_\nu(x)$ l'arc de la parabole qui passe par les points $\left[\frac{k}{2\,\nu}\,;\; g\left(\frac{k}{2\,\nu}\right)\right]$; $\left[\frac{k+1}{2\,\nu}\,;\; g\left(\frac{k+1}{2\,\nu}\right)\right]$ $k = 1, \ldots 2\,\nu$, et dont les tangents sont les droites passant par les points $\left[\frac{k}{2\,\nu}\,; g\left(\frac{k}{2\,\nu}\right)\right]$; $\left[\frac{2\,k+1}{4\,\nu}\,; g\left(\frac{2\,k+1}{4\,\nu}\right)\right]$ resp. $\left[\frac{2\,k+1}{4\,\nu}\,; g\left(\frac{2\,k+1}{4\,\nu}\right)\right]$; $\left[\frac{k+1}{2\,\nu}\,;\; g\left(\frac{k+1}{2\,\nu}\right)\right]$.

2) De plus soit

$$p_\nu(x) = \begin{cases} p_\nu^{(0)}(x) & 0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2\nu} \\[2ex] g_\nu(x) & \dfrac{1}{2\nu} < x < 1 - \dfrac{1}{2\nu} \\[2ex] p_\nu^{(1)}(x) & 1 - \dfrac{1}{2\nu} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

où $p_\nu^{(0)}(x)$ et $p_\nu^{(1)}(x)$ sont les arcs de la parabole du troisième ordre pour lesquels

$$p_\nu^{(0)}(0) = g(0) \qquad p_\nu^{(0)\prime}(0) = g'(0)$$

$$p_\nu^{(0)}\left(\frac{1}{2\nu}\right) = g\left(\frac{1}{2\nu}\right) \qquad p_\nu^{(0)\prime}\left(\frac{1}{2\nu}\right) = g_\nu'\left(\frac{1}{2\nu}\right)$$

resp.

$$p_\nu^{(1)}(1) = g(1) \qquad p_\nu^{(1)\prime}(1) = g'(1)$$

$$p_\nu^{(1)}\left(1 - \frac{1}{2\nu}\right) = g\left(1 - \frac{1}{2\nu}\right) \qquad p_\nu^{(1)\prime}\left(1 - \frac{1}{2\nu}\right) = g_\nu'\left(1 - \frac{1}{2\nu}\right).$$

Nous démontrerons tout d'abord que

$$|g_\nu(x) - p_\nu(x)| \leqq 4\,\omega_2\big(g(x)\,;\nu^{-1}\big) + \frac{2}{\nu}\max_{i=0,1}|\delta^{(i)}|. \tag{4}$$

Soient

$$\varDelta_2^{(0)} = g(0) - 2g\left(\frac{1}{4\nu}\right) + g\left(\frac{1}{2\nu}\right)$$

$$\varDelta_2^{(1)} = g(1) - 2g\left(1 - \frac{1}{4\nu}\right) + g\left(1 - \frac{1}{2\nu}\right).$$

Les calculs faites, nous pouvons déterminer les fonctions $g_\nu(x)$ et $p_\nu(x)$ sous la forme

$$g_\nu(x) = \begin{cases} 4\nu^2 x^2 \varDelta_2^{(0)} + 4\nu\left[g\left(\dfrac{1}{4\nu}\right) - g(0)\right]x + g(0)\,; \quad 0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2\nu} \\[2ex] 4\nu^2\left(x - \dfrac{k}{2\nu}\right)^2 \varDelta_2^{(k)} + 4\nu\left(x - \dfrac{k}{2\nu}\right)\left[g\left(\dfrac{2k+1}{4\nu}\right) - g\left(\dfrac{k}{2\nu}\right)\right] + \\[2ex] \qquad + g\left(\dfrac{k}{2\nu}\right); \quad \dfrac{k}{2\nu} \leqq x \leqq \dfrac{k+1}{2\nu} \\[2ex] [4\nu^2(x-1)^2 + 4\nu(x-1)]\varDelta_2^{(1)} + 4\nu\left[g\left(\dfrac{4\nu-1}{4\nu}\right) - g\left(\dfrac{2\nu-1}{2\nu}\right)\right](x-1) + \\[2ex] \qquad + g(1)\,; \quad 1 - \dfrac{1}{2\nu} \leqq x \leqq 1. \end{cases} \tag{5}$$

$$p_\nu^{(0)}(x) = \Delta_2^{(0)}(8\,\nu^3 x^3 - 4\,\nu^2 x^2) + \delta^{(0)}(-4\,\nu^2 x^3 + 4\,\nu\, x^2) + \tag{6}$$
$$+ g'(0)\,x + g(0)$$

$$p_\nu^{(1)}(x) = \Delta_2^{(1)}[-8\,\nu^3(x-1)^3 - 4\,\nu^2(x-1)] + \delta^{(1)}[-4\,\nu^2(x-1)^3 - 4\,\nu(x-1)^2] + \tag{7}$$
$$+ g'(1)\,(x-1) + g(1)\,.$$

D'après (5) et (6) nous obtenons:

$$|g_\nu(x) - p_\nu^{(0)}(x)| \leqq |\Delta_2^{(0)}|\,|-8\,\nu^3 x^3 + 8\,\nu^2 x^2 - 2\,\nu\, x| +$$
$$+ |\delta^{(0)}||-4\,\nu^2 x^3 + 4\,\nu\, x^2 + x| \leqq 4|\Delta_2^{(0)}| + \frac{2}{\nu}|\delta^{(0)}|, \quad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2\,\nu}\,.$$

Par analogie d'après (5) et (7)

$$|g_\nu(x) - p_\nu^{(1)}(x)| \leqq 4|\Delta_2^{(1)}| + \frac{2}{\nu}|\delta^{(1)}|, \qquad 1 - \frac{1}{2\,\nu} \leqq x \leqq 1\,.$$

En considérant que $\max\limits_{i=0,1} |\Delta_2^{(i)}| \leqq \omega_2(g\,;\,\nu^{-1})$, à l'aide des estimations précédentes nous obtenons (4).

D'après (5), (6) et (7) pour $|p_\nu''(x)|$ l'estimation suivante est valable:

$$|p_\nu''(x)| \leqq 32\,\nu^2\,\omega_2(g, \nu^{-1}) + 20\,\nu \max_{i=0,1}|\delta^{(1)}|\,. \tag{8}$$

L'idée suivante de la démonstration analoguement à [1] sera:

En considérant que $p_\nu(0) = g(0)$; $p_\nu(1) = g(1)$; $p_\nu'(0) = g'(0)$ et $p_\nu'(1) = g'(1)$, $p_\nu(x) \in \mathscr{C}^*$.

Il en résulte que pour tout les $\varepsilon > 0$ nous pouvons choisir une fonction $\gamma_\nu \in \mathscr{C}_2$ pour laquelle

$$|p_\nu - \gamma_\nu| \leqq \varepsilon \quad \text{et} \quad |\gamma_\nu''| \leqq |p_\nu''| + \varepsilon\,.$$

D'après (3)

$$\|Hg\|_B \leqq \|H(g - g_\nu)\|_B + \|H(g_\nu - p_\nu)\|_B + \|H(p_\nu - \gamma_\nu)\|_B +$$
$$+ \|H\,\gamma_\nu\|_B \leqq \alpha(|g - g_\nu| + |g_\nu - p_\nu| + |p_\nu - \gamma_\nu|) + \beta\,|\gamma_\nu''|\,.$$

Étant donné que $|g_\nu(x) - g(x)| \leqq \omega_2(g_1\,\nu^{-1})$ (voir [1]), en appliquant les formules (4) et (8) nous obtenons

$$\|Hg\|_B \leqq \alpha[5\,\omega_2(g, \nu^{-1}) + \frac{2}{\nu}\max_{i=0,1}|\delta^{(i)}|] + \beta\nu^2[32\,\omega_2(g, \nu^{-1}) +$$
$$+ \frac{20}{\nu}\max_{i=0,1}|\delta^{(i)}|] + (\alpha + 1)\,\varepsilon\,,$$

ce qui établit notre théorème pour $\varepsilon \to 0$.

(Reçu le 4 juin 1960.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] FREUD, G.: «Sui procedimenti lineari d'approssimazione». *Rendiconti dell' Academia Nazionale dei Lincei. (Classe di Scienze fisiche, mathematiche e naturali.)* seri VIII. **26** (1959) 5, 641–643.
[2] JACKSON, D.: *The theory of approximation*. American Math. Soc. Coll. Publ. XI., 1930.

ОДНА АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

M. SALLAY

Резюме

В работе доказывается следующая теорема:

Обозначим через $\mathcal{C}^*$ класс функций, непрерывных на отрезке [0, 1], дифференцируемых на его концах и удовлетворяющих условиям (2). Пусть H есть определенное на $\mathcal{C}^*$ линейное преобразование, удовлетворяющее условиям (3) и отображающее класс функций $\mathcal{C}^*$ на Банахово пространство B. Тогда имеет место соотношение

$$\|Hg\|_B \leqq (5\,\alpha + 32\,\beta\nu^2)\,\omega_2(g\,;\nu^{-1}) + (2\,\alpha + 20\,\beta\nu^2)\,\frac{1}{\nu}\max_{i=0,1}|\delta^{(i)}|\,.$$