ÜZLETEK ÁRUELLÁTÁSÁVAL KAPCSOLATOS SZÉLSŐÉRTÉKFELADATOK

RÉNYI ALFRÉD és ZIERMANN MARGIT

Bevezetés

E dolgozatban a következő problémával foglalkozunk: egy boltban, amely egy vagy több árucikket árul, és amelyben az egyes árucikkek iránti várható keresletet ismertnek tételezzük fel, mekkora az a minimális készlet az egyes árucikkekből, amellyel a raktár következő feltöltéséig előírt kielégítési biztonsággal ki lehet elégíteni a fogyasztókat?

A „kielégítési biztonság" fogalmának szemléletes közgazdasági tartalma nyilvánvalóan az, hogy a vevők túlnyomó része megtalálja a boltban azt az árut, amire szüksége van (feltéve, hogy ez az áru egyáltalán a bolt által árusított cikkek egyike). A „kielégítési biztonságnak" azonban több, e közgazdasági tartalommal összhangban levő definíciója adható meg még egyetlen árucikk esetében is és a fenti kérdésre adott válasz természetesen nagy mértékben függni fog attól, hogy ezt a fogalmat hogyan definiáljuk; ha a bolt többféle árucikket árul (márpedig a reális helyzetnek ez felel meg), akkor az a kérdés is felmerül, hogy az egyes árucikkekre vonatkozó kielégítési biztonságokat hogyan egyesítjük egyetlen mérőszámmá?

E dolgozatban a fenti problémát a kielégítési biztonság több számbajövő értelmezése mellett oldjuk meg. Azt, hogy egy konkrét esetben melyik értelmezés veendő alapul, elsősorban közgazdasági meggondolások alapján kell eldönteni, azonban figyelembe veendő a számolástechnikai szempont is. A tárgyalt alternatív felfogások ugyanis más és más numerikus feladatra vezetnek, és a számítások egyszerű vagy bonyolult voltát a gyakorlati felhasználásnál szükségképpen figyelembe kell venni.

A probléma megoldása során figyelembe vesszük azt a kárt is, amelyet a feleslegesen nagy készletek felhalmozása okoz.

A fenti probléma eredetileg cipőboltok raktárkészletével kapcsolatban merült fel, azonban a kérdést olyan általánosságban vizsgáltuk, hogy az elvileg bármilyen, az egyéni vásárlók nagy tömegét kiszolgáló boltra alkalmazmazható.

Az 1. § egy árucikket árusító bolt esetével foglalkozik. E § eredményei több árucikket árusító bolt esetében is alkalmazhatók, ha a biztonságos raktárkészletet az egyes árucikkekből egymástól függetlenül akarjuk megállapítani. A 2. §-ban foglalkozunk több terméket árusító boltokkal azon feltevés mellett, hogy a bolt által árult összes árucikkből a raktárkészlet beszerzésére korlátozott pénzmennyiség áll rendelkezésre és így az egyes árucikkekből raktáron tartandó mennyiségek nem határozhatók meg egymástól függetlenül. A 3. §-ban néhány kiegészítő megjegyzést teszünk; többek között megmutatjuk, hogy mennyiben indokolt az a feltevés, hogy a kereslet közelítőleg normális eloszlású. A 4. § néhány utalást tartalmaz a kérdéskör irodalmára.

A téma felvetése az Országos Tervhivataltól ered. Az ott folyó közgazdasági kutatómunka kapcsán merült fel a minimális készlet matematikai úton való megközelítésnek igénye. Köszönettel tartozunk Dr. Ajtai Miklósnak, az Országos Tervhivatal elnökhelyettesének, aki az e dolgozat tárgyát képező problémára figyelmünket felhívta, továbbá munkánkat tanácsaival is támogatta.

Reméljük, hogy ezen dolgozat segítséget nyújthat a közgazdaságtudományban előretörő egzakt irányzatok megerősödésében.

1. §. Egy árucikket árusító bolt esete

Képzeljünk el egy boltot, amely csak egyetlen árucikket árul. Válasszuk meg valahogyan a szóban forgó cikk egységét.

Jelölje T a raktár két egymásutáni feltöltése közötti időtartamot. Feladatunk annak meghatározása, hogy a T hosszúságú időtartam elején a raktárkészletet milyen szintre kell feltölteni ahhoz, hogy ebből a készletből a T hosszúságú időtartam alatt, tehát a raktárkészlet következő kiegészítéséig a kellő biztonsággal ki lehessen elégíteni a keresletet. A keresletet, amely ezen időtartam alatt fel fog lépni, ζ-val jelöljük. ζ nyilván valószínűségi változó amelynek eloszlásfüggvényét (az előző időszakok forgalmára vonatkozó adatok alapján) ismertnek tételezzük fel, és $F(x)$-szel jelöljük. Tehát

$$F(x) = \mathbf{P}(\zeta < x), \tag{1}$$

annak a valószínűségét jelöli, hogy a szóban forgó időszakban a bolt által árusított árucikk iránti kereslet az x egységet nem fogja meghaladni. Jelölje R a szóban forgó időszak elején a boltban levő raktárkészletet.

A kereslet kielégítése biztonságának értelmezésére a következő alternatív definíciók látszanak alkalmasnak:

1. definíció. Azt mondjuk, hogy a kereslet α biztonsággal van kielégítve, ha $\mathbf{P}(\zeta < R) = \alpha$, vagyis, ha α valószínűséggel *minden*, a szóban forgó időszakban a boltba vásárolni bejövő vevő megkapja a kívánt árut. Az α számot a *teljes kielégítés biztonságá*nak fogjuk nevezni.

A kielégítési biztonság ezen definíciója igen plauzibilis, gyakorlati szempontból azonban nem teljesen megfelelő.

Ha ugyanis az α biztonsági szintet 1-hez igen közelinek választjuk (pl. 0,99-nek), akkor ilyen biztonság eléréséhez rendkívül nagy raktárkészlet szükséges, amelynek jelentős része nagy valószínűséggel nem fog eladásra kerülni; ha viszont α értékét alacsonyabbnak választjuk (pl. 0,9-nek), akkor nem tudjuk áttekinteni, hogy abban az esetben, amikor egyes vevőket áru hiányában el kell küldeni — s ennek már nem elhanyagolható (0,1) a valószínűsége —, a vevők hányadrésze távozik dolgavégezetlenül a boltból. Ezért látszik célszerűnek a következő alternatív definíció.

2. definició. Azt mondjuk, hogy a kereslet β biztonsággal van kielégítve, ha a kielégíthető kereslet és a teljes kereslet hányadosának várható értéke β-val egyenlő. Tehát, ha R a raktárkészlet, akkor

$$\beta = \mathbf{M}\left(\frac{\min(\zeta, R)}{\zeta}\right) = F(R) + R\int_R^\infty \frac{dF(x)}{x}. \tag{2}$$

A β számot a kereslet *relatív kielégítési biztonságá*nak fogjuk nevezni. Ha előírjuk a teljes, illetve a relatív kielégítési biztonságot, egyértelműen meghatározhatjuk azt a raktárkészletet, amellyel ezt az előírt biztonságot el lehet érni. Könnyen belátható, hogy ha ugyanahhoz az α számhoz határozzuk meg azt az R_1 ill. R_2 készletet, amely mellett a teljes, ill. a relatív kielégítési biztonság α-val egyenlő, akkor mindig $R_2 < R_1$.

Vizsgáljuk meg közelebbről azt az esetet, amikor a kereslet közelítőleg normális eloszlású, ami a gyakorlatban első közelítésben legtöbbször teljesül. (Erre a kérdésre a 3. §-ban még visszatérünk.) Jelölje M a kereslet várható értékét és D a szórását, akkor tehát azt tesszük fel, hogy

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-M}{D}\right), \tag{3}$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \tag{4}$$

Az R raktárkészletet írjuk $R = M + \lambda D$ alakba. Feltehetjük, hogy $R > M$, hiszen ellenkező esetben 50%-nál nagyobb valószínűséggel a raktárkészlet nem lesz elegendő a kereslet kielégítésére. Az $R = M + \lambda D$ kifejezésben szereplő két tagot a következőképpen értelmezhetjük: M a „törzskészlet", λD pedig a „biztonsági készlet" ; a λ faktort *biztonsági faktor*nak fogjuk nevezni. A kielégítési biztonság első definíciója szerint a λ számra a

$$\Phi(\lambda) = \alpha \tag{5}$$

egyenlet, míg a kielégítési biztonság második definíciója alapján a

$$\Phi(\lambda) + (M + \lambda D) \int_{\lambda}^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}(M + uD)} du = \beta \tag{6}$$

egyenlet adódik.

A (6) egyenletből adott M, D és β mellett λ értéke meghatározható, bár a számítás meglehetősen bonyolult. Ezzel szemben az (5) egyenletből adott α-hoz λ értéke a standard normális eloszlás táblázatából egyszerű visszakereséssel adódik; például, ha $\alpha = 0{,}95$, akkor $\lambda = 1{,}645$.

A 2. definíció adott β mellett az M és D számok nem minden értékéhez ad helyes eredményt. BÉKÉSSY ANDRÁS hívta fel a figyelmünket arra, hogy adott β mellett lehet M és D értékét úgy megválasztani, hogy (6)-ból λ-ra negatív érték, azaz $R < M$ adódjék, ami nyilván gyakorlatilag nem fogadható el. Ez az első pillantásra paradox eredmény érthetővé válik, ha figyelembe vesszük, hogy ha a várható kereslet, M igen nagy és ugyanakkor D értéke M-hez képest elhanyagolhatóan kicsiny, akkor a tényleges kereslet igen nagy valószínűséggel rendkívül közel lesz M-hez, tehát a kielégíthető kereslet és a teljes kereslet hányadosa csak akkor lesz pl. 0,9-cel egyenlő, ha R lényegesen kisebb M-nél. Ezen paradoxon kiküszöbölésére bevezetjük a 2. definició egy módosítását, amely abban áll, hogy nem a kielégíthető keresletet viszonyítjuk a teljes kereslethez, hanem a kielégíthető keresletnek a várható keresletet meghaladó részét (a kielégíthető „túlkeresletet") a teljes keresletnek a várható keresletet meghaladó részéhez (a teljes „túlkereslethez").

3. definició. Azt mondjuk, hogy a kereslet γ biztonsággal van kielégítve, ha a várható kaesleten túlmenő kielégíthető kereslet (kielégíthető túlkereslet) és a várható keresleten túlmenő teljes kereslet (teljes túlkereslet) hányadosának várható értéke γ. Tehát, ha R a raktárkészlet és M a várható kereslet, akkor

$$\gamma = \mathbf{M}(\varrho) \quad \text{ahol} \quad \varrho = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad \zeta \leqq R \\ \dfrac{R-M}{\zeta - M}, & \text{ha} \quad \zeta > R. \end{cases} \tag{2a}$$

Vagyis

$$\gamma = F(R) + \int_R^{+\infty} \frac{R-M}{x-M} dF(x). \tag{2b}$$

A γ számot a *várakozáson felüli kereslet relatív kielégítési biztonságának* nevezhetjük.

A 3. definició nemcsak kiküszöböli a 2. definició említett hiányosságait, hanem meglepő egyszerűen kezelhető.

Vizsgáljuk meg ezt közelebbről abban az esetben, amikor a kereslet közelítőleg normális eloszlású, tehát $F(x) = \Phi\left(\dfrac{x-M}{D}\right)$, ahol $\Phi(x)$ a (4) alatti normális eloszlásfüggvény. Akkor, ha az R raktárkészletet újból $R = M + \lambda D$ alakban keressük,

$$\gamma = \Phi(\lambda) + \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_\lambda^\infty \frac{e^{-v^2/2}}{v} dv. \tag{2c}$$

Adott γ mellett λ értékét a (2c) egyenlet megoldásával határozhatjuk meg. Igen nagy előnye a 3. definiciónak, hogy λ értéke nem függ sem M-től, sem D-től, kizárólag γ-tól. A (2c) egyenlet megoldásában semmi másra nincs szükség, mint egy táblázatra, amely γ értékét λ függvényeként adja meg; e táblázatból visszakereséssel határozhatjuk meg adott γ-hoz a hozzátartozó λ értéket.

Ha meg akarjuk határozni, hogy mekkora a leggazdaságosabb raktárkészlet, figyelembe kell vennünk azt a kárt, amely azáltal adódik, hogy egyes vevők kielégítetlenül távoznak és azt a kárt, amely azáltal jön létre, hogy felesleges készlet hever raktáron. Az elsőnek említett kár nyilván a kielégítetlenül maradó kereslettel, míg a második az el nem adott készlettel arányos. Ha az arányossági tényezőket a-val és b-vel jelöljük (az a kártényezőt kézenfekvő az áru egy egységének eladásából származó haszonnal arányosnak venni, a b kártényező meghatározása nem ilyen egyértelmű), akkor a várható kár

$$K = a\,\mathbf{M}(\max(0, \zeta - R)) + b\,\mathbf{M}(\max(0, R - \zeta)). \tag{7}$$

Ha újból $R = M + \lambda D$, $F(x) = \Phi\left(\frac{x - M}{D}\right)$, vagyis a kereslet közelítőleg normális eloszlású M várható értékkel és D szórással, és λ jelöli a biztonsági tényezőt, akkor

$$K = D\left(a \int_{\lambda}^{\infty} (1 - \Phi(u))\, du + b \int_{-\infty}^{\lambda} \Phi(u)\, du\right) \tag{8}$$

$$\frac{dK}{d\lambda} = D\big(b\Phi(\lambda) - a(1 - \Phi(\lambda))\big), \tag{9}$$

tehát az optimális raktárkészlet

$$M + \lambda^* D, \tag{10}$$

ahol λ^* a

$$\Phi(\lambda^*) = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{a}{a + b} \tag{11}$$

egyenlet gyöke. Nem meglepő, hogy a megoldás csak az a és b ,,kártényezők'' arányától függ. Azt, hogy λ^* tényleg minimalizálja a kárt, abból láthatjuk be' hogy

$$\frac{d^2 K}{d\lambda^2} = \frac{D(a + b)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} > 0, \tag{12}$$

vagyis K a λ biztonsági tényező konvex függvénye.

Például, ha $a = 4b$, akkor $\frac{a}{a + b} = 0{,}8$, tehát $\lambda^* = 0{,}842$, míg ha $a = 9\,b$, akkor $\frac{a}{a + b} = 0{,}9$, tehát $\lambda^* = 1{,}282$ és ha $a = 19b$, akkor $\frac{a}{a + b} = 0{,}95$, tehát ez esetben $\lambda^* = 1{,}645$. Általában tehát azt mondhatjuk, hogy ha előírjuk, hogy a teljes kielégítési biztonság értéke α legyen, ez ugyanahhoz a raktárkészlethez vezet, mintha azt tesszük fel, hogy az a és b kártényezők úgy aránylanak egymáshoz, mint α és $1-\alpha$, és úgy határozzuk meg a biztonsági tényezőt, hogy a kár minimális legyen (feltéve, hogy a kereslet közelítőleg normális eloszlású).

2. §. Több árucikket árusító bolt esete

Ha egy bolt több cikket árusít, akkor a raktárkészlet megállapításánál elvben eljárhatnánk úgy is, hogy minden egyes árucikkre előírjuk a teljes (vagy relatív) kielégítési biztonság (esetleg árucikkenként más-más) értékét, vagy megállapíthatjuk árucikkenként az a és b kártényezőket, és az 1. §-ban ismertetett számítási eljárást minden egyes cikkre egymástól függetlenül elvégezve, kiszámíthatjuk, hogy az egyes cikkekből mekkora raktárkészlet szükséges.

Ez az eljárás azonban nem felel meg teljesen a gyakorlati követelményeknek. Sokkal reálisabb a következő eljárás: feltesszük, hogy a raktárkészlet beszerzésére rendelkezésre álló teljes pénzösszeg adva van, és a kérdés az, hogyan kell ezt az összeget az egyes árucikkek beszerzésére a leggazdaságosabban elosztani. A raktárkészlet gazdaságosságát a következőképpen értelmezzük: melyik árucikkből mennyit rendeljünk, hogy a ki nem elégíthető kereslet folytán kieső bevétel okozta kár és az el nem adott áruk raktáron heveréséből származó kár összege minimális legyen?

Tegyük fel, hogy a vizsgált üzlet N féle árucikket árusít; ezeket számozzuk meg 1-től N-ig, és a k-adik sorszámot kapott árut nevezzük röviden a k-adik árunak. Tegyük fel, hogy az egyes árucikkekből a keresletek rendre közelítőleg normális eloszlásúak, továbbá, hogy a k-adik áruból a kereslet várható értéke M_k és szórása D_k. Akkor, ha a kártényezők a k-adik árura vonatkozólag a_k és b_k és a k-adik áruból a raktárkészlet megrendelésénél λ_k biztonsági faktort alkalmazunk, akkor az 1. § (9) képlete szerint a teljes kár

$$K = \sum_{k=1}^{N} D_k\Big(a_k \int_{\lambda_k}^{\infty} (1 - \Phi(u))\, du + b_k \int_{-\infty}^{\lambda_k} \Phi(u)\, du\Big). \tag{13}$$

A λ_k biztonsági faktorok továbbá alá vannak vetve a

$$\sum_{k=1}^{N} c_k(M_k + \lambda_k D_k - r_k) = E \tag{14}$$

mellékfeltételnek, ahol c_k a k-adik áru egy egységének beszerzési (nagykereskedelmi) ára, és E a raktár felújítására rendelkezésre álló teljes pénzösszeg, míg r_k a k-adik áruból a rendelés előtt még raktáron levő (az előző rendelésből fennmaradt) készlet. Feladatunk tehát a (13) alatti K kárösszeg minimalizálása a λ_k biztonsági tényezők olyan megválasztásával, hogy azok a (14) feltételnek eleget tegyenek. Ilyenmódon egy feltételes szélsőértékfeladattal állunk szemben, amelyet az ún. Lagrange-féle multiplikátor-módszerrel oldhatunk meg.

Ez a módszer a

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda_k} + \mu c_k D_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

egyenletrendszerre vezet. (9)-re való tekintettel a λ_k számokra a

$$(a_k + b_k)\, \Phi(\lambda_k) - a_k + \mu c_k = 0 \tag{16}$$

egyenletrendszert kapjuk, ahonnan

$$\lambda_k = \Phi^{-1}\left(\frac{a_k - \mu c_k}{a_k + b_k}\right). \tag{17}$$

A (17)-ben szereplő μ ismeretlent úgy kell meghatározni, hogy a (14) összefüggés fennálljon, tehát μ a

$$\sum_{k=1}^{N} c_k D_k \Phi^{-1}\left(\frac{a_k - \mu c_k}{a_k + b_k}\right) = E' \tag{18a}$$

egyenletből számítandó ki, ahol

$$E' = E - \sum_{k=1}^{N} c_k(M_k - r_k)\,. \tag{18b}$$

Az E' mennyiségnek egyszerű jelentése van: E' az a pénzösszeg, amely a raktárkészlet kiegészítésére rendelkezésre álló összegből még marad, miután minden áruból a készletet a törzskészletre egészítettük ki.

Mivel az a_k, b_k, c_k, D_k számok mind pozitívak, a (18) baloldalán álló kifejezés μ-nek monoton csökkenő függvénye, amely minden valós értéket felvesz, tehát a (18) egyenletnek egy és csak egy megoldása van.

A (17) és (18) egyenletek tartalmazzák a tárgyalt szélsőértékfeladat általános megoldását. Vizsgáljunk meg néhány érdekesebb speciális esetet. Vizsgáljuk meg például azt az esetet, amikor az a_k és b_k kártényezők arányosak c_k-val, azaz a k-adik árucikk egységárával, és az arányossági tényező nem függ k-tól, azaz

$$a_k = ac_k \quad \text{és} \quad b_k = bc_k . \tag{19}$$

Ez esetben a λ_k ismeretlenek mind egyenlők, közös értéküket λ-val jelölve, λ-ra a

$$\lambda = \Phi^{-1}\left(\frac{a-\mu}{a+b}\right) \tag{20}$$

kifejezést kapjuk, ahol $x = \Phi^{-1}(y)$ az $y = \Phi(x)$ függvény inverz függvényét jelöli. A μ ismeretlen értékére ez esetben a

$$\mu = a - (b+a)\,\Phi\left(\frac{E'}{\sum_{k=1}^{N} c_k D_k}\right) \tag{21}$$

explicit képlet adódik, és így a λ biztonsági faktorra az igen egyszerű

$$\lambda = \frac{E'}{\sum_{k=1}^{N} c_k D_k} \tag{22}$$

képletet nyerjük. A (22) képlet persze közvetlenül levezethető abból a feltevésből, hogy a λ_k számok mind egyenlők egymással; a fenti meggondolás azonban ennél többet ad, mert megmutatja, hogy az $a_k = ac_k$ és $b_k = bc_k$ speciális esetben akkor lesz a kár minimális, ha a λ_k számok mind egyenlők egymással és közös értékük a (22) alatti λ szám, amely *független az a és b kártényezőktől*. Ezt közvetlenül is be lehet látni, a Lagrange-multiplikátor-módszer nélkül, a Jensen-féle egyenlőtlenség segítségével. Ugyanis, bevezetve a

$$K(\lambda) = a\int_{\lambda}^{\infty}\bigl(1-\Phi(u)\bigr)\,du + b\int_{-\infty}^{\lambda}\Phi(u)\,du \tag{23}$$

jelölést, mint azt az 1. §-ban láttuk, $k(\lambda)$ λ-nak konvex függvénye, és így a Jensen-egyenlőtlenség miatt

$$\sum_{k=1}^{N} D_k c_k K(\lambda_k) \geq \left(\sum_{k=1}^{N} D_k c_k\right) K\left(\frac{\sum_{k=1}^{N} D_k c_k \lambda_k}{\sum_{k=1}^{N} D_k c_k}\right) = \left(\sum_{k=1}^{N} D_k c_k\right) K(\lambda)\,, \tag{24}$$

ahol λ (22) által van definiálva, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az összes λ_k számok egyenlők λ-val.

Vizsgáljuk még meg a következő speciális esetet: ha a szóban forgó árukról feltesszük, hogy minden egyes vevő egy egységet vásárol (cipőboltokban pl. ez első közelítésként feltehető, ha egy pár cipő az egység), akkor, ha a_k értékét 1-nek, b_k értékét 0-nak választjuk, akkor K egyszerűen a ki nem elégített vevők számát fogja jelenteni, azon vevők számát tehát, akik azt az árut, amit kerestek, a boltban nem találták meg. A ki nem elégített vevők száma tehát akkor lesz minimális, ha

$$\lambda_k = \Phi^{-1}(1 - \mu c_k), \tag{25}$$

ahol μ a

$$\sum_{k=1}^{N} c_k D_k \Phi^{-1}(1 - \mu c_k) = E' \tag{26}$$

egyenletnek tesz eleget. A μ konstans nyilvánvalóan pozitív (hiszen $\Phi^{-1}(1) = +\infty$) és így azt kapjuk, hogy az olcsóbb áruból nagyobb biztonsági faktort kell alkalmazni. Ez szemléletesen is evidens, hiszen az, hogy az olcsóbb áruból kellő biztonságot nyújtó készletet szerezzen be a bolt, kisebb összeget igényel, és így, ha a raktárkészlet vásárlására rendelkezésre álló teljes összeg korlátozott és a kielégítetlen vevők összszámát akarjuk minimalizálni, kézenfekvő, hogy az olcsóbb áruknál nagyobb biztonsági faktorral dolgozzunk.

3. §. Kiegészítő megjegyzések

Befejezésül vizsgáljuk meg azt, hogy mennyiben indokolt az a feltevésünk, hogy a kereslet normális eloszlású. Jelölje ξ_j azt, hogy a vizsgált időszakban a szóban forgó boltot felkereső és a vizsgált árucikkből vásárolni kívánó j-edik vevő mekkora mennyiséget kíván vásárolni (az illető árucikk választott egységével kifejezve). Feltehetjük, hogy a ξ_j valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlásúak. Jelölje ν az illető árucikket a szóban forgó (a raktár két feltöltése közötti) időszakban vásárolni kívánó vevők számát; nyilván ν maga is valószínűségi változó. Ilyen módon a teljes keresletet ζ-val jelölve

$$\zeta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu, \tag{27}$$

vagyis a teljes kereslet véletlentől függő számú független és egyforma eloszlású valószínűségi változó összegével egyenlő. Ha ν nagy valószínűséggel nagy értékeket vesz fel, akkor ismert tételek szerint ζ még akkor is igen általános feltevések mellett közelítőleg normális eloszlású lesz, ha nem tesszük fel, hogy a ν valószínűségi változó független a ξ_j változóktól (lásd pl. [1], [2]).

A minket érdeklő esetben pedig még általában azt is feltehetjük, hogy ν független a ξ_k változóktól; nem jelent ugyanis lényeges megszorítást, ha feltesszük, hogy $\xi_j = 1$ minden j értékére, vagyis hogy minden vevő pontosan egy egységet vesz az illető árucikkből. Ez esetben $\zeta = \nu$, vagyis a kereslet azonos az illető árucikket kereső vevők számával. Bizonyos elméleti meggondolások arra mutatnak, hogy ν közelítőleg Poisson-eloszlású lesz. Ez abból a feltevésből következik, hogy a vizsgált bolt a vásárlók széles körét szolgálja ki, és a nagyszámú potenciális vásárló a szóban forgó időszakban egymástól függetlenül ugyanazzal a (kicsiny) p valószínűséggel keresi fel a boltot. Ez esetben, mint jól ismeretes (lásd pl. [4]) ν közelítőleg Poisson-eloszlású $M = np$ várható értékkel, ahol n a lehetséges vásárlók száma. Ha most M nagy szám, akkor az M várható értékű Poisson-eloszlás jól közelíthető az M várható értékű és $D = \sqrt{M}$ szórású normális eloszlással. Ez a meggondolás arra mutat, hogy azon túlmenőleg, hogy a kereslet közelítőleg normális eloszlású, még azt is feltehetjük, hogy a kereslet szórása a kereslet várható értékének négyzetgyökével egyenlő, vagyis az 1. §-ban D helyett $\sqrt{M}$, a 2. §-ban D_k helyett $\sqrt{M_k}$ írható ($k = 1, 2, \ldots, N$). Természetesen mind a kereslet eloszlásának közelítőleg normális voltát, mind pedig a $D = \sqrt{M}$ hipotézist, amelyeket elméleti meggondolásokból vezettünk le, tapasztalati adatok megvizsgálása útján ellenőrizni kell. Olyan esetekben, amikor a $D = \sqrt{M}$ hipotézis megfelel a tapasztalatoknak, a számítások némileg egyszerűsödnek, mivel a kereslet eloszlása csak egy paramétertől függ. Így például a (6) egyenlet megoldása a $D = \sqrt{M}$ esetben táblázat vagy nomogram segítségével sokkal egyszerűbb, mint az általános esetben, hiszen ekkor (6) nem 4, hanem csak 3 mennyiség közötti összefüggést fejez ki. A 2. §-ban felmerült numerikus probléma (a (18) egyenlet megoldása μ-re) nem egyszerűsödik a $D_k = \sqrt{M_k}$ feltevés által, hiszen ebben az egyenletben az egyes M_k értékek nem szerepelnek, csak az E' kiszámításánál van rájuk szükség.

Ha figyelembe vesszük, hogy egy vevő esetleg több egységet is vásárol a szóban forgó árucikkből, de feltesszük, hogy a vásárolt mennyiség mindig az egységnek egészszámú többszöröse, ún. összetett Poisson-eloszlások lépnek fel a Poisson-eloszlás helyett. (Lásd pl. [3].) A normális eloszlással való közelíthetőség szempontjából azonban ez nem jelent lényeges különbséget, ez esetben azonban a $D = \sqrt{M}$ reláció már nem áll fenn.

E dolgozatban nem foglalkoztunk azzal a kérdéssel, amikor a boltban kapható árucikkek közül egyesek helyettesithetik egymást, vagyis elképzelhető, hogy egy vevő, aki a j-edik árucikket kivánta megvásárolni, ha az éppen nincs raktáron, esetleg ehelyett egy másik (pl. a k-adik) árucikket veszi meg. Ez azonban visszavezethető az általunk tárgyalt esetre oly módon,hogy azokat az árucikkeket, amelyek egymást helyettesíthetik (pl. azonos nagyságú, csak a fazonban különböző cipők) összevontan kezeljük. Ez esetben azonban, miután az egyes összevont árucikk-csoportokra mghatároztuk a megfelelő raktárkészletet, el kell dönteni, hogy ezen a csoporton belül hogyan osztjuk fel a csoportba tartozó árucikkek között a rendelést.

E dolgozat eredményeinek gyakorlati alkalmazása esetén természetesen mindenekelőtt meg kell határozni a szóban forgó paraméterek, így a várható kereslet (azaz M_k) számszerű értékét. Ezt a megelőző időszakra vonatkozó kereseti adatok alapján, a matematikai statisztika módszereivel lehet elvégezni. E módszerek jól ismertek, ezért azokkal itt nem foglalkozunk, csak azt húzzuk alá nyomatékosan, hogy az üzletek leggazdaságosabb raktárkészleteinek matematikai módszerrel való meghatározásának nélkülözhetetlen előfeltétele az egyes árucikkek iránti keresletre vonatkozó pontos feljegyzések vezetése, lehetőleg több éven keresztül. Ennek során, különösen ruházati cikkeknél, nagy figyelmet kell fordítani a keresletnek az évszakoktól való függésére, és a keresletnek az életszínvonal emelkedésétől való függésére.

Befejezésül még csak azt jegyezzük meg, hogy a nyert eredmények nemcsak arra használhatók fel, hogy a bolthálózatot adottnak tekintve hogyan lehet minden egyes boltra nézve kiszámítani, hogy mekkora készletet tartson raktáron, hanem felhasználhatók annak vizsgálatánál is, hogy indokolt-e a bolthálózat átszervezése, pl. több kisebb bolt összevonása. Ebbe a bonyolult kérdésbe itt nem kívánunk részletesen belemenni, csak rámutattunk e két problémakör szoros kapcsolatára.

4. §. Összehasonlítás más vizsgálatokkal

A raktározási problémáknak igen kiterjedt irodalma van, amely túlnyomórészt az elmúlt 10—15 évben jelent meg. Jó képet ad a raktározási problémák matematikai elméletének mai állásáról az [5] kötet, amely számos összefoglaló tanulmányt közöl. Az e kötetben használt terminológia szerint az általunk vizsgált raktározási modell *statikus* típusú. Statikusnak nevezik azokat a modelleket, amelyek csak egy alkalommal való készletbeszerzésre, vagyis egyetlen, két egymásutáni rendelés közötti időtartamra vonatkoznak; ezzel szemben dinamikusnak nevezik azokat a modelleket, amelyek sorozatos készletbeszerzésekre vonatkoznak, vagyis a raktár feltöltésének és kiürülésének váltakozásából álló folyamatot írják le. (Ilyen dinamikus modellekkel foglalkoznak pl. a [7] és [8] dolgozatok.) A statikus modellekre vonatkozó alapvető dolgozat ARROW, HARRIS és MARSCHAK [6] munkája.

Az általunk vizsgált raktármodell az ARROW—HARRIS—MARSCHAK-féle modelltípusba tartozik.

A relatív kielégítési biztonságnak, valamint a túlkereslet relatív kielégítése biztonságának az 1. §-ban bevezetett fogalma tudomásunk szerint új. Ugyancsak nem foglalkoztak eddig, tudomásunk szerint azzal a kérdéssel sem, amelyet a 2. §-ban vizsgálunk meg, hogy ha több árucikk raktárkészletének feltöltésére együttvéve korlátozott összeg áll rendelkezésre, mi az optimális felosztása ennek az összegnek.

(Beérkezett: 1961. január 10.)

IRODALOM

[1] RÉNYI, A.: „On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **8** (1957) 193—199.
[2] RÉNYI, A.: „On the central limit theorem for the sum of a random number of independent random variables". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11** (1960) 97—102.
[3] RÉNYI A.: „Összetett Poisson-eloszlásokról, II." *MTA III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **1** (1951) 329—341.
[4] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
[5] ARROW, K. J.—KARLIN, S.—SCARF, H.: *Studies in the mathematical theory of inventory and production*. Stanford Mathematical Studies in the Social Sciences, I. Stanford University Press, 1958.
[6] ARROW, K. J.—HARRIS, T.—MARSCHAK, I.: „Optimal inventory policy". *Econometrica* **19** (1951) 250—272.
[7] PALÁSTI I.—RÉNYI A.—SZENTMÁRTONY F.— TAKÁCS L.: „A raktárkészlet pótlásáról, I." *MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 187—202.
[8] L. ZIERMANN M.: „A raktárkészlet pótlásáról, II." *MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 203—216.

ON SOME INVENTORY PROBLEMS OF SHOPS

A. RÉNYI and M. ZIERMANN

Abstract

The authors define the *relative safety of satisfying the demand* in a shop concerning a certain commodity as the mean value of $\min\left(1, \frac{R}{\zeta}\right)$ where R is the stock level and ζ the demand in the shop concerning the commodity in question. If $F(x) = \mathbf{P}(\zeta \leqq x)$ is the cumulative distribution function of the demand during a given time interval and the relative safety of satisfying the demand is prescribed to be equal to the number β $(0 < \beta < 1)$ then the least stock R ensuring this can be determined by solving the equation

$$F(R) + R \int_R^\infty \frac{dF(x)}{x} = \beta .$$

The *relative safety of satisfying the unexpected demand* is defined as the number γ defined by

$$\gamma = F(R) + (R - M) \int_R^\infty \frac{dF(x)}{x - M}$$

where M is the average demand and it is supposed that $R > M$.

In § 2 the case is considered when a shop which sells N different commodities has a fixed amount E of money available for raising the stock levels of the N commodities, and the problem is considered which is the optimal ordering policy under this restriction, i. e. the ordering policy which minimizes the loss. Two types of loss are considered: the first being proportional to the mean excess of the demand over the stock, the second with the mean excess of the stock over the demand, that is the loss function is supposed to be of the form

$$a\,\mathbf{M}\bigl(\max(0, \zeta - R)\bigr) + b\,\mathbf{M}\bigl(\max(0, R - \zeta)\bigr).$$

О ПРОБЛЕМАХ, СВЯЗАННЫХ СО СНАБЖЕНИЕМ МАГАЗИНОВ ТОВАРАМИ

A. RÉNYI и M. ZIERMANN

Резюме

Работа занимается определением минимального складового запаса отдельных товаров в магазине, необходимого для удовлетворения покупателей с некоторой заданной уверенностью удовлетворения до следующего пополнения склада.

Авторы определяют *относительную уверенность β удовлетворения спроса* на некоторой товар как математическое ожидание частного $\frac{\min(\zeta, R)}{\zeta}$, где ζ обозначает спрос на данный товар в магазине, а R запас этого товара

на складе. Тогда для заданного β $(0 < \beta < 1)$ минимальное R будет решением уравнения

$$F(R) + R \int_R^\infty \frac{dF(x)}{x} = \beta ,$$

где $F(x) = \mathbf{P}(\xi \leqq x)$ функция распределения спроса за некоторый промежуток времени.

Авторы определяют *относительную уверенность* γ *удовлетворения неожиданного спроса* как число

$$\gamma = F(R) + (R - M) \int_R^\infty \frac{dF(x)}{x - M} ,$$

где M обозначает ожидание спроса, и предположено, что $R > M$.

В § 2 авторы рассматривают случай, когда магазин торгует N (не заменяющими друг друга) видами товара и сумма E, которую можно использовать для пополнения склада, есть заданная величина. В этом случае — при некоторых условиях — они определяют, какого товара сколько надо заказать, чтобы убыток, вызванный отсутствием дохода из-за неудовлетворенного спроса, и ущерб, вызванный находящимся на складе непроданным товаром оказался минимальным, если рассматривается следующая функция убытка

$$a \, \mathbf{M} \big(\max(0, \zeta - R)\big) + b \, \mathbf{M} \big(\max(0, R - \zeta)\big) ,$$

где a и b неотрицательные числа.