VÁLTOZÓ KERESZTMETSZETŰ KONZOLOS KÉTTÁMASZÚ TENGELY LEGKEDVEZŐBB CSAPÁGYTÁMASZKÖZE ÉS A TENGELY JELLEMZŐ PARAMÉTEREI KÖZÖTTI KAPCSOLATOK

LIPKA ISTVÁN*

Lakcím: 1119 Budapest XI. Szakasits Árpád u. 43.

[Beérkezett: 1973. november 19-én]

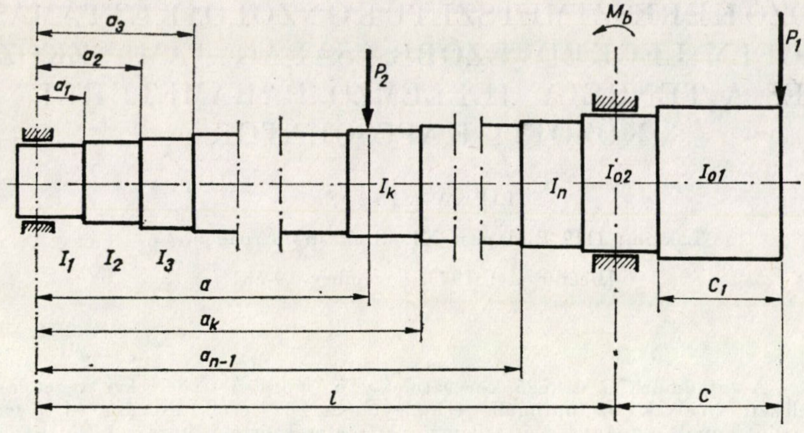
A tanulmány a változó keresztmetszetű (lépcsős) tengelyekre vezet le olyan tételeket, amelyek az optimális csapágytámaszköz értékváltozása és a tengelyt valamint annak csapágyazását jellemző paraméterek értékváltozása közötti kapcsolatokat fejeznek ki. A levezetett tételek összefüggéseket mondanak ki az optimális csapágytámaszköz hossza, a tengely lépcsőzése (tengelyszakaszok hosszai és átmérői, a konzolhossz, valamint a csapágy merevségek között; figyelembe véve még az általános hajtás esetét, amikor a tengelyt a támaszközén belül egy a hajtásból eredő hajlító erő is terheli. Foglalkozik továbbá az optimális orsómerevségnek az optimális csapágytávolság megváltozásánál fellépő relatív megváltozásával, valamint e változásnak egy a tengely lépcsőzését jellemző számmal való összefüggésével. A tételek levezetése a legáltalánosabb feltételek mellett, numerikus számítások nélkül, tisztán analitikus módszerekkel történik.

1. Bevezetés

Ebben a tanulmányban változó keresztmetszetű (lépcsős), konzolos kéttámaszú tengelyek ill. orsók jellemző paraméterei (tengelyszakaszok hosszai és átmérői, konzolhossz, csapágymerevségek) és az optimális csapágytávolság közötti összefüggésekre, valamint a csapágytávolság-változás és az optimális orsómerevség-változás kapcsolatára vezetünk le általános tételeket. Ezek a vizsgálatok tulajdonképpen azoknak az eredményeinknek az általánosításával foglalkoznak, amelyeket az állandó keresztmetszetű orsók jellemző paraméterei és az optimális csapágytávolság közötti összefüggésekre vonatkozóan közöltünk [1].

Vizsgálatainkban olyan változó keresztmetszetű tengelyt (orsót) tekintünk, amelynek a két csapágy közé eső szakasza n számú különböző keresztmetszetű részből áll (1. ábra). A tengely kinyúló része a konzol, két egymástól különböző átmérőjű részből áll. A P_1 terhelés a konzol végén hat, és a hajtás által kifejtett P_2 erő hatásvonala a k-ik tengelyszakaszba esik ($1 \leq k \leq n$): P_2 erő támadáspontját az a koordináta határozza meg. A mellső csapágy merevségét: s_1, a hátsó csapágyét s_2 jelöli.

* Lipka István, Szerszámgépipari Művek Fejlesztő Intézete, 2314 Halásztelek.



1. ábra

2. Az optimális csapágytámaszköz

A változó keresztmetszetű tengelyek optimális támaszközének a meghatározására egyik előbbi dolgozatunkban [2] egy harmadfokú egyenletet vezettünk le, amelynek egyetlen pozitív gyöke szolgáltatja az optimális csapágytávolságot (azt a csapágytávolságot, amelyre a P_1 erővel terhelt tengelyvég lehajlása minimális.) Ennek a harmadfokú egyenletnek módosított alakja arra az esetre, amikor a mellső és hátsó csapágy merevsége két egymástól különböző s_1, illetve s_2 érték, a következő:

$$Dl^3 - \left(B + \frac{2P_1 c}{s_1}\right) l - 2\left(A + P_1 c^2 \left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}\right)\right) = 0\,. \tag{1}$$

Itt l a csapágytámaszköz, c a konzolhossz, s_1 a mellső és s_2 a hátsó csapágy merevsége, az A együttható jelentése pedig a következő:

$$A = \frac{(1-\varkappa_0)P_1 c^2 + P_2 ac}{3E}\,S \tag{2}$$

Itt $\varkappa_0$ a csapágy szerkezetét jellemző állandó (egyszerű gördülő csapágyra $\varkappa_0 = 0$, sikló csapágyra és kétsoros hengergörgős csapágyra is $\varkappa_0 \approx 0{,}3$), E a tengely anyagának rugalmassági modulusa, az

$$S = \sum_{i-1}^{n-1} a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}}\right) \tag{2'}$$

összeg a tengely lépcsős szerkezetét jellemző számérték, mivel a_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) az egyes tengelylépcsőket meghatározó koordináták és $I_1, I_2, \ldots, I_n$ az egyes tengelylépcsők keresztmetszetének ekvatoriális másodrendű tehetetlenségi nyomatékai. Végül a B és D együtthatók értékei:

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{P_2 c}{E}\left\{\frac{a^3}{6I_k} + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{k-i} a_i^3\left(\frac{1}{I_{i+1}} - \frac{1}{I_i}\right) + \frac{a}{2}\sum_{i=k}^{n-1} a_i^2\left(\frac{1}{I_{i+1}} - \frac{1}{I_i}\right)\right\} \\
D &= \frac{P_1 c^2}{3EI_n}(1-\varkappa_0) - \frac{P_2 ac}{6EI_n}\,.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

A támaszközén belül terheletlen orsóra (tehermentesített hajtás), amikor $P_2 = 0$, a B együttható értéke nulla és az A és D együtthatók értékei a következőképpen egyszerűsödnek:

$$
A = \frac{(1-\varkappa_0)P_1 c^2}{3E} S\,; \quad D = \frac{P_1 c^2}{3EI_n}(1-\varkappa_0)\,, \quad B = 0\,.
$$

Ennélfogva az (1) egyenlet is egyszerűsödik.

3. Tételek az optimális csapágytámaszközre, általános hajtás esetében

Az alábbiakban kimondott és bebizonyított tételek az általános hajtás esetére vonatkoznak, amikor az orsót a támaszközén belül is terheli egy a hajtás által kifejtett P_2 hajlító erő. E tételek bizonyítása egy a harmadfokú polinomokra vonatkozó alábbi lemmán alapszik.

Tekintsük a következő alakú harmadfokú egyenletet:

$$
x^3 + a_1 x - a_0 = 0\,,
$$

ahol az a_1 együttható tetszésszerinti pozitív vagy negatív szám; az a_0 együttható azonban mindig pozitív, tehát:

$$
a_1 \gtrless 0\,, \quad a_0 > 0\,.
$$

Ennek az egyenletnek, mivel együtthatói sorozatában: $(1;\, a_1;\, -a_0)$ pontosan egy jelváltás lép fel, mindig van egy és csakis egy *pozitív* gyöke, amelyet jelöljünk ξ-vel. Tehát:

$$
\xi^3 + a_1 \xi - a_0 = 0
$$

vagy az egyenlet harmadfokú polinomját $\varphi(x)$-szel jelölve:

$$
\varphi(x) \equiv x^3 + a_1 x - a_0\,.
$$

Mivel ξ a $\varphi(x)$ polinom nullahelye, azért

$$
\varphi(\xi) = 0\,.
$$

Lemma. Ha az x-pozitív számra fennáll a

$$\varphi(x) > 0$$

egyenlőtlenség, akkor

$$x > \xi\,,$$

ha pedig

$$\varphi(x) < 0\,,$$

akkor

$$x < \xi\,.$$

Tehát a $\varphi(x)$ polinom értéke a ξ gyökhelynél nagyobb x-értékekre pozitív, a ξ-nél kisebb x-értékekre pedig negatív.

Ennek a lemmának a helyessége egyszerűen abból következik, hogy az $y = \varphi(x)$ görbe, mivel a $\varphi(x) = 0$ egyenletnek pontosan egy ξ pozitív gyöke van, egyszer metszi át az x-tengelyt a ξ-pontban. Ennélfogva a $\varphi(x)$ előjele a ξ-hely előtti pontokban ugyanolyan mint az $x = 0$ pontban: $\varphi(0) = -a_0 < 0$, tehát negatív, ennélfogva a ξ utáni pontokban a $\varphi(x)$ pozitív és ez éppen a lemmának az állítása.

1. tétel. Legyenek a tengelylépcsők értékei (az átmérők, a lépcsőhosszak és az a koordináta) rögzítettek, tehát az I_i másodrendű tehetetlenségi nyomatékok is rögzített értékek. Legyen továbbá a c konzolhossz és az s_1 csapágymerevségi érték is rögzített, és a hajtás által az orsóra kifejtett P_2 erőre álljon fenn a következő egyenlőtlenség:

$$2(1-\varkappa_0)P_1\frac{c}{a} > P_2\,, \tag{4}$$

akkor a hátsó csapágy s_2 merevségének a növelése csökkenti az optimális csapágytávolságot.

Bizonyítás. Tekintsük az (1) alatti harmadfokú egyenletet, amelynek gyöke az optimális csapágytávolság, az l_{opt}. Osszuk az egyenlet bal oldalát a D együtthatóval, amelynek értéke a P_2 erőre kirótt (4) alatti feltétel és D (3) alatti definíciója szerint pozitív:

$$l^3 - \left(\frac{B}{D} + \frac{2P_1c}{s_1D}\right)l - 2\left(\frac{A}{D} + \frac{P_1c^2}{D}\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}\right)\right) = 0\,.$$

Az egyenlet két együtthatójára vezessük be a következő rövidítő jelöléseket:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\left(\frac{A}{D} + \frac{P_1c^2}{D}\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}\right)\right) \\ a_1 &= -\left(\frac{B}{D} + \frac{2P_1c}{s_1D}\right)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Ekkor a fenti harmadfokú egyenlet, amelynek gyöke az $l_{\rm opt}$ (optimális csapágytávolság) a következő:

$$l^3_{\rm opt} + a_1 l_{\rm opt} - a_0 = 0 \,. \tag{1'}$$

Most már növeljük meg az a_0 együttható (5) alatti kifejezésében az s_2 értékét. Ekkor, mivel (2), (2') és (3) szerint az A, B, D kifejezések nem tartalmazzák az s_2 csapágymerevségi értéket és a D pozitív, az a_0 együttható értéke csökkenni fog az (5) alatti első képlet szerint. Az a_1 együttható értéke azonban (5) szerint változatlan marad, mert a B, D, s_1 és c változatlan rögzített értékek, amikor az s_2 értékét növeljük. Jelölje az a_0 együttható csökkentett értékét a_0', tehát:

$$a_0' < a_0.$$

Irjuk be a fenti (1') egyenletben a_0 helyébe a nála kisebb a_0' értéket. Ekkor az egyenlet bal oldalán a negatív tag abszolút értékét csökkentjük és ezért a bal oldal értéke megnövekszik, pozitív lesz. Tehát fennál, hogy

$$l^3_{\rm opt} + a_1 l_{\rm opt} - a_0' > 0 \,.$$

Eszerint az új

$$x^3 + a_1 x - a_0' = 0$$

harmadfokú egyenlet egyetlen pozitív gyöke, vagyis az új optimális csapágytávolság az $l'_{\rm opt}$ az előbbi lemma szerint kisebb lesz mint az eredeti optimális csapágytávolság azaz:

$$l'_{\rm opt} < l_{\rm opt} \,,$$

amit bizonyítanunk kellett.

2. tétel. Legyen az (1') alatti egyenlet a_1 együtthatójában (5) szerint fellépő B kifejezés értéke pozitív, illetve nem-negatív. Tehát B (3) alatti definíciója értelmében álljon fenn a következő egyenlőtlenség:

$$P_2 \left\{ \frac{a^3}{6I_k} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{k-1} a_i^3 \left(\frac{1}{I_{i+1}} - \frac{1}{I_i} \right) + \frac{a}{2} \sum_{i=k}^{n-1} a_i^2 \left(\frac{1}{I_{i+1}} - \frac{1}{I_i} \right) \right\} \geqq 0 \,, \tag{6}$$

továbbá a hajtásból származó P_2 erőre teljesüljön a (4) alatti

$$2(1 - \varkappa_0) P_1 \frac{c}{a} > P_2$$

feltétel. Ekkor, ha a c konzolhossz értéke, valamint a tengelylépcsők értékei is rögzítettek, az s_1 és s_2 csapágymerevségek megnövelése (akár az egyiknek, akár mind a kettőnek) csökkenti az optimális csapágytávolságot.

Bizonyítás. Mivel a B kifejezés feltétel szerint nemnegatív és (4) szerint D pozitív, az (1') alatti egyenlet a_1 együtthatója (5) szerint negatív. Tehát, ha az s_1 merevségi értéket megnöveljük az a_1 együttható abszolút értéke csökkenni fog. De a pozitív a_0 együttható értéke is csökken, ha az s_1 csapágymerevség értékét megnöveljük, valamint akkor is, ha az s_2 értékét növeljük. Tehát s_1 és s_2 értékét megnövelve, az egyenlet új a_0', a_1' együtthatóira fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$a_0' < a_0, \quad a_1' > a_1.$$

Eszerint, ha az (1') egyenletben a_0 helyébe a nála kisebb a_0' kivonandót írjuk, az a_1 helyébe pedig a nála nagyobb a_1' negatív értéket, akkor az egyenlet bal oldalát növeljük, tehát annak értéke pozitív lesz:

$$l_{\rm opt} + a_1' \, l_{\rm opt} - a_0 > 0.$$

Ennélfogva a lemma értelmében az új egyenlet gyöke, vagyis az új optimális l_{opt} csapágytávolság kisebb mint a régi, azaz:

$$'_{\mathrm{opt}} < l_{\mathrm{opt}}$$

és ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

A 2. tétel feltételében a (6) alatti egyenlőtlenség a következő kétféle módon teljesülhet. Ha a hajtás által kifejtett P_2 erő csökkenti a tengelyvég lehajlását, vagy legalább is nem növeli, tehát a P_2 iránya megegyezik a P_1 erő irányával: $P_2 > 0$ (vagy $P_2 = 0$), akkor a (6) alatti egyenlőtlenség teljesül, ha ott a kapcsos zárójelben álló kifejezés is nem negatív, tehát fennáll, hogy

$$\frac{a^3}{6I_k} + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{k-1} a_i^3 \left(\frac{1}{I_{i+1}} - \frac{1}{I_i}\right) + \frac{a}{2}\sum_{i=k}^{n-1} a_i^2 \left(\frac{1}{I_{i+1}} - \frac{1}{I_i}\right) \geq 0 . \qquad (6_1)$$

De, amint SZŐKE Béla megjegyezte (ld. [2] 69. old.), a P_2 erő iránya az előtét tengely elrendezésétől függ és így az is előfordulhat, hogy $P_2 < 0$, vagyis a P_2 erő felfelé irányul és növeli a tengelyvég lehajlását. Az utóbbi esetben azonban a (6) alatti feltétel akkor teljesül, ha fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{a^3}{6I_k} + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{k-1} a_i^3 \left(\frac{1}{I_{i+1}} - \frac{1}{I_i}\right) + \frac{a}{2}\sum_{i=k}^{n-1} a_i^2 \left(\frac{1}{I_{i+1}} - \frac{1}{I_i}\right) < 0 . \qquad (6_2)$$

Ezeknek a megállapításoknak az alapján kimondhatjuk a következő tételeket:

2_1. tétel. Legyenek a tengelylépcsők értékei, a c konzolhossz, valamint a hajtásból származó P_2 hajlító erő helyét meghatározó a koordináta, rögzített értékek, és a P_2 erőre teljesüljön a (4) alatti egyenlőtlenség. A tengely lépcsőzésére álljon fenn a (6_1) alatti egyenlőtlenség. Ekkor, ha a P_2 erő csökkenti a tengelyvég lehajlását, vagy legalább is nem növeli, az s_1 és s_2 csapágymerevségek megnövelése csökkenti az optimális csapágytávolságot.

Ugyanis ezeknek a feltételeknek a fennállása esetén teljesül a (6) alatti egyenlőtlenség, valamint a (4) alatti is, és így a 2. tételből következik a 2_1 tétel helyessége. Ugyanígy bizonyítható a

2_2. tétel. Ha a tengelylépcsők, a c konzolhossz, valamint a P_2 erő helyét meghatározó a koordináta rögzített értékek, továbbá teljesül a (6_2) alatti egyenlőtlenség, akkor, ha a P_2 erő iránya olyan, hogy növeli a tengelyvég lehajlását, az s_1 és s_2 csapágymerevségek növelése csökkenti a maximális csapágytávolságot.

Megjegyzés. A (6_1) alatti egyenlőtlenség midig teljesül az állandó keresztmetszetű tengelyre, mivel ebben az esetben a (6_1) alatti bal oldalán álló szummák értéke nulla. A 2_2 tétel feltételében a (4) alatti egyenlőtlenség azért nem szerepel, mert ott $P_2 < 0$ és így (4) alatti automatikusan teljesül.

3. tétel. Ha a tengelylépcsők értékei, valamint az s_1 és s_2 csapágymerevségek értékei rögzítettek, továbbá fennáll a (4) alatti egyenlőtlenség, vagyis

$$2(1-\varkappa_0)P_1\frac{c}{a} > P_2,$$

és a (3) alatti B kifejezés értéke nem negatív, akkor a c konzolhossz növelése csökkenti az optimális csapágytávolságot.

Bizonyítás. Írjuk fel az a_0 együttható (5) alatti előállításában fellépő A/D törtkifejezést (2) és (3) szerint; ez az egyszerűsítések után a következő alakú lesz

$$\frac{A}{D} = I_n \frac{(1-\varkappa_0)P_1c + P_2a}{(1-\varkappa_0)P_1c - \frac{P_2}{2}a} S.$$

A jobboldalon álló törtkifejezés a következő két összeadandóra bontható fel

$$\frac{(1-\varkappa_0)P_1c + P_2a}{(1-\varkappa_0)P_1c - \frac{P_2}{2}a} = 1 + \frac{\frac{3}{2}P_2a}{(1-\varkappa_0)P_1c - \frac{P_2}{2}a},$$

amelyeket A/D előbbi kifejezésébe írva

$$\frac{A}{D} = I_nS\left\{1 + \frac{\frac{3}{2}P_2a}{(1-\varkappa_0)P_1c - \frac{P_2}{2}a}\right\}.$$

Ebből a felírásból, mivel a kapcsos zárójelben álló tört nevezője a (4) alatti feltétel szerint pozitív, nyomban látható, hogy A/D értéke csökken, ha a c növekszik. Tehát az a_0 (5) alatti előállításában az A/D csökken, ha c növekszik, továbbá ebben az előállításban a

$$\frac{P_1c^2}{D}\left(\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}\right)$$

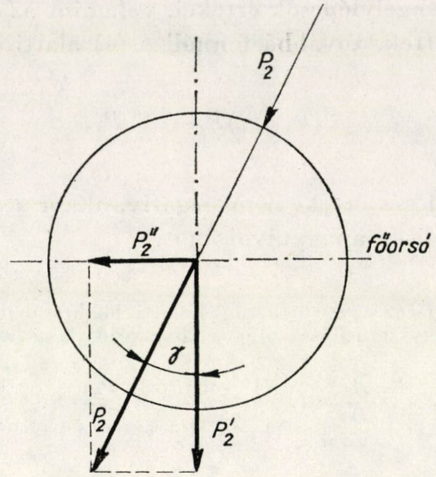
tag is csökken, ha a c növekszik. Ugyanis (3) szerint

$$\frac{P_1c^2}{D} = \frac{P_1}{\frac{P_1}{3EI_n}(1-\varkappa_0) - \frac{P_2\frac{a}{c}}{6I_nE}},$$

amelynek a nevezője feltétel szerint pozitív és értéke növekszik, ha a c növekszik.

Ezzel megmutattuk, hogy az a_0 együttható (5) alatti értéke csökken, ha a c növekszik. De az a_1 együttható értéke is csökken, ha a c növekszik, mert az (5) alatti előállításban az első tag (3) szerint:

$$\frac{B}{D} = \frac{3I_nP_2\left\{\frac{a^3}{6I_n} + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{k-1}{}' a_i^3\left(\frac{1}{I_{i+1}}-\frac{1}{I_i}\right) + \frac{a}{2}\sum_{i=k}^{n-1} a_i^2\left(\frac{1}{I_{i+1}}-\frac{1}{I_i}\right)\right\}}{P_1c(1-\varkappa)_0 - P_2a},$$



2. *ábra*

amelynek az értéke csökken, ha a c növekszik, mivel feltétel szerint ($B \geq 0$) a tört számlálója nemnegatív és nevezője nő, ha a c növekszik. Ugyanígy az a_1 együttható előállításának a második tagja:

$$\frac{2P_1 c}{s_1 D} = \frac{6EI_n P_1}{P_1(1-\varkappa_0)c - \dfrac{P_2 a}{2}}$$

szintén csökken, h a c növekszik, mivel ekkor a törtkifejezés nevezője nő. Tehát itt is ugyanaz az eset forog fenn, mint a 2. tétel bizonyításánál, vagyis az (1′) egyenlet bal oldala megnövekszik, tehát pozitív lesz, ha a c konzolhosszat megnöveljük és így a lemmából következik, hogy az optimális csapágytávolság csökken, ha a c értékét megnöveljük.

Megjegyzés. TERPLÁN Zénó professzor felhívta a szerző figyelmét arra, hogy „ritkán hatnak az orsót támadó radiális erők azonos síkban". Erre vonatkozóan megjegyzendő, hogy az előzőekben bebizonyított 1., 2., 2_1, és 3. tételek abban az esetben is érvényben maradnak, ha a P_1 és P_2 radiális erők nem hatnak egy síkban, hanem hatásvonaluk két a térben kitérő egyenes. Ebben az esetben ugyanis bontsuk fel a hajtásból származó P_2 hajlító erőt két olyan P_2' és P_2'' komponensre, ahol a P_2' a P_1 terhelő erővel most már egy síkban fekszik (2. ábra), a P_2'' komponens pedig az előbbi síkra merőleges síkban hat, tehát a tengelyvég lehajlását nem befolyásolja és így figyelmen kívül hagyható. Most már, ha teljesül az 1., 2., 2_1 és 3. tételekben szereplő (4) alatti feltétel, vagyis fennáll, hogy

$$2(1-\varkappa_0)P_1\frac{c}{a} > P_2,$$

akkor az egysíkban ható P_1 és P_2' radiális erőkre is teljesül a (4) alatti feltétel, mivel ezekre fennáll, hogy

$$2(1-\varkappa_0)P_1\frac{c}{a} > P_2',$$

mert

$$P_2' = P_2 \cos\gamma\,; \quad (0 < \cos\gamma < 1)$$

és így

$$P_2' < P_2\,.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a kimondott tételek nem egysíkban ható radiális erők esetében is érvényesek.

4. Tételek az optimális csapágytámaszközre a támaszközén belül terheletlen orsóra (tehermentesített hajtás)

Itt feltételezzük, hogy a hajtásból nem származik olyan hajlító erő, amely az orsóra hat, tehát most $P_2 = 0$.

4. *tétel.* Legyenek a tengelylépcsők értékei (az a koordináta is) és a c konzolhossz rögzítettek, akkor az optimális csapágytávolság csökken, ha az s_1 és s_2 csapágymerevségeket megnöveljük.

Bizonyítás. A 2. tételből következik. Ugyanis, mivel $P_2 = 0$, teljesül a 2. tétel (6) alatti feltétele és a (4) alatti feltételi egyenlőtlenség is nyilván fennáll, ennélfogva a 2. tétel állítása is teljesül.

5. *tétel.* Ha a tengelylépcsők értékei rögzítettek, valamint az s_1 és s_2 csapágymerevségek is, akkor a c konzolhossz növelése csökkenti az optimális csapágytávolságot.

Bizonyítás. A 3. tételből következik. Ugyanis, mivel $P_2 = 0$ a (3) alattiból B kifejezés értéke nulla, tehát nemnegatív és a (4) alatti feltétel is fennáll, vagyis teljesülnek a 3. tétel feltételei, amiből következik az 5. tétel állítása is.

6. *tétel.* Ha a tengelylépcsők értékei rögzítettek, akkor a csapágymerevségek értékeinek, valamint a konzolhossznak a megnövelése csökkenti az optimális csapágytámaszközt.

Bizonyítás. Rögzített c konzolhossznál, amikor a tengelylépcsők is rögzítettek, növeljük meg a csapágymerevséget (vagy merevségeket) a kívánt értékűre. Ekkor a 4. tétel szerint csökkent az optimális csapágytávolság. Ezután a megnövelt csapágymerevséget (vagy merevségeket) tekintsük rögzítettnek és növeljük meg a c konzolhosszat a kívánt értékűre. Ekkor az 5. tétel szerint az optimális csapágytávolság tovább csökken. Végeredményben tehát az optimális csapágytávolság kiinduló értékénél kisebbet kaptunk a csapágymerevség és a konzolhossz megnövelésével.

5. A változó keresztmetszetű orsó maximális merevségének változása az optimális csapágytávolság megváltoztatásánál

A konzol végén P_1 erővel terhelt változó keresztmetszetű orsónak a P_1 erő hatásvonalában való teljes besüllyedésére, egyenlőnek feltételezett mellső és hátsó csapágymerevség esetére a következő általános képletet vezettük le [2]:

$$y = Dl + C + \frac{B}{l} + \frac{A}{l^2} + \frac{P_1}{s}\left(1 + \frac{2c}{l} + \frac{2c^2}{l^2}\right), \tag{7}$$

ahol

$$C = \frac{P_1 c_1^3}{3EI_{01}} + \frac{P_1}{3EI_{02}}(c^3 - c_1^3);$$

B és D jelentése a (3) alatti, A jelentése a (2) alatti, s az egyenlőnek feltételezett mellső és hátsó csapágymerevség. A C kifejezésében I_{01} és I_{02} a konzolrészek másodrendű tehetetlenségi nyomatékai. A továbbiakban feltételezzük, hogy most a konzol csak egyrészes, tehát $I_{02} = 0$, $I_{01} = I_0$, ennélfogva $c_1 = c$ és így a C fenti kifejezése:

$$C = \frac{P_1 c^3}{3EI_0}. \tag{8}$$

Az alábbiakban a változó keresztmetszetű orsó merevségének a változását vizsgáljuk, változó csapágytámaszköz esetére. Az orsó merevségén a terhelő erőnek és a konzolvég lehajlásának a viszonyát, vagyis a P_1/y viszonyt értjük, amely (7)-szerint az l csapágytámaszköznek a függvénye és így $j(l)$-lel jelöljük:

$$j(l) = \frac{P_1}{y}.$$

Könnyen bebizonyítható, hogy az orsómerevség, vagyis a $j(l)$ függvény a legkedvezőbb, vagyis legnagyobb értékét az $l = l_{opt}$ optimális csapágytámaszközre éri el, amely az (1') alatti harmadfokú egyenletnek a gyöke. Tehát az optimális azaz a legnagyobb orsómerevség:

$$j_{opt} = j(l_{opt}),$$

amelynek értékváltozását vizsgáljuk a következőkben arra az esetre, amikor az l_{opt} optimális csapágytámaszköz helyett egy $(l_{opt} + \Delta l)$ támaszközt veszünk és erre tekintjük a

$$j(l_{opt} + \Delta l)$$

orsómerevség értékét, amely nyilván kisebb mint $j(l_{opt})$.

Ha az l csapágytámaszköz értéke megváltozik Δl-lel, akkor a teljes besüllyedés (7) alatti értéke is megváltozik valamilyen Δy-nal, és így az $(l + \Delta l)$ támaszközhöz tartozó orsómerevség a következő lesz:

$$\frac{P_1}{y + \Delta y}.$$

Mivel az l támaszközhöz a P_1/y orsómerevség tartozik, azért az orsómerevség megváltozásának az értéke, ha az l támaszköz megváltozik (Δl)-lel:

$$\frac{P_1}{y + \Delta y} - \frac{P_1}{y} = P_1 \frac{y - (y - \Delta y)}{y(y + \Delta y)};$$

vagy az orsómerevségre előbb bevezetett $j(l)$ függvénnyel felírva az orsómerevségeket:

$$j(l) = \frac{P_1}{y}, \quad j(l + \Delta l) = \frac{P_1}{y + \Delta y}.$$

A merevség megváltozása:

$$j(l + \Delta l) - j(l) = \frac{P_1}{y + \Delta y} - \frac{P_1}{y} = P_1 \frac{y - (y + \Delta y)}{y(y + \Delta y)}.$$

Az itt fellépő törtnek a számlálóját és nevezőjét osztva P_1-gyel:

$$j(l + \Delta l) - j(l) = \frac{\dfrac{y - (y + \Delta y)}{P_1}}{\dfrac{y}{P_1}\,\dfrac{y + \Delta y}{P_1}}. \tag{9}$$

Mivel a (7) alatti képlet szerint:

$$\frac{y}{P_1} = \frac{D}{P_1} l + \frac{C}{P_1} + \frac{B/P_1}{l} + \frac{A/P_1}{l^2} + \frac{1}{s}\left(1 + \frac{2c}{l} + \frac{2c^2}{l^2}\right)$$

és ugyancsak (7) szerint az $(l + \Delta l)$-hez tartozó megfelelő érték

$$\frac{y + \Delta y}{P_1} = \frac{D}{P_1}(l + \Delta l) + \frac{C}{P_1} + \frac{B/P_1}{l + \Delta l} + \frac{A/P_1}{(l + \Delta l)^2} +$$

$$+ \frac{1}{s}\left(1 + \frac{2c}{l + \Delta l} + \frac{2 \cdot c^2}{(l + \Delta l)^2}\right), \tag{10}$$

a kettőnek különbsége

$$\frac{y}{P_1}-\frac{y+\Delta y}{P_1}=-\frac{D}{P_1}\Delta l+\frac{B}{P_1}\frac{\Delta l}{l(l+\Delta l)}+\frac{A}{P_1}\frac{2l\Delta l+(\Delta l)^2}{l^2(l+\Delta l)^2}+$$

$$+\frac{1}{s}\left(\frac{2c\Delta l}{l(l+\Delta l)}+\frac{4c^2\Delta l}{l(l+\Delta l)^2}+\frac{2c^2(\Delta l)^2}{l^2(l+\Delta l)^2}\right).$$

Ezt a kifejezést a (9) alatti számlálójába írva, a merevség megváltozására azt kapjuk, hogy

$$j(l+\Delta l)-j(l)=\frac{M}{N},$$

ahol

$$M=-\frac{D}{P_1}\Delta l+\frac{B}{P_1}\frac{\Delta l}{l(l+\Delta l)}+\frac{A}{P_1}\frac{2\Delta l}{l(l+\Delta l)^2}+\frac{A}{P_1}\frac{(\Delta l)^2}{l^2(l+\Delta l)^2}+$$

$$+\frac{1}{s}\left(\frac{2c\Delta l}{l(l+\Delta l)}+\frac{4c^2\Delta l}{l(l+\Delta l)^2}+\frac{2c^2(\Delta l)^2}{l^2(l+\Delta l)^2}\right),$$

és

$$N=\frac{y}{P_1}\cdot\frac{y+\Delta y}{P_1}.$$

Az M kifejezés második és harmadik tagjába, valamint ugyanott a kerek zárójelben álló első és második tagba vigyük be a következő felbontásokat:

$$\frac{1}{l(l+\Delta l)}=\frac{1}{l^2}-\frac{\Delta l}{l^2(l+\Delta l)},$$

$$\frac{1}{l(l+\Delta l)^2}=\frac{1}{l^3}-\frac{2l\Delta l+(\Delta l)^2}{l^3(l+\Delta l)^2}.$$

Ekkor az orsómerevség változását előállító előbbi differenciát, mint két tört kifejezésnek az összegét felírva

$$j(l+\Delta l)-j(l)=\frac{M_1}{N}+\frac{M_2}{N},$$

ahol

$$M_1=-\frac{D}{P_1}\Delta l+\frac{B}{P_1}\Delta l\left(\frac{1}{l^2}-\frac{\Delta l}{l^2(l+\Delta l)}\right)+\frac{A}{P_1}2\Delta l\left(\frac{1}{l^3}-\frac{2l\Delta l+(\Delta l)^2}{l^3(l+\Delta l)^2}\right)+$$

$$+\frac{A}{P_1}\frac{(\Delta l)^2}{l^2(l+\Delta l)^2}$$

és

$$M_2 = \frac{1}{s}\left[2c\Delta l\left(\frac{1}{l^2} - \frac{\Delta l}{l^2(l+\Delta l)}\right) + 4c^2\Delta l\left(\frac{1}{l^3} - \frac{2l\Delta l + (\Delta l)^2}{l^3(l+\Delta l)^2}\right) + \frac{2c^2(\Delta l)^2}{l^2(l+\Delta l)^2}\right],$$

Az M_1 és M_2 kifejezésekben szereplő tagok más csoportosításával az előbbi differencia így is írható:

$$j(l+\Delta l) - j(l) = \frac{m'}{N} + \frac{m''}{N} + \frac{m'''}{N},$$

ahol

$$m' = -\frac{D}{P_1}\Delta l + \frac{B}{P_1}\frac{\Delta l}{l^2} + \frac{A}{P_1}\frac{2\Delta l}{l^3} + \frac{1}{s}\left(2c\frac{\Delta l}{l^2} + 4c^2\frac{\Delta l}{l^3}\right),$$

$$m'' = -\frac{B}{P_1}\frac{(\Delta l)^2 l}{l^2(l+\Delta l)} - \frac{A}{P_1}2\Delta l\frac{2l\Delta l + (\Delta l)^2}{l^3(l+\Delta l)^2} + \frac{A}{P_1}\frac{(\Delta l)^2}{l^2(l+\Delta l)^2},$$

$$m''' = \frac{1}{s}\left[-\frac{2c(\Delta l)^2}{l^2(l+\Delta l)} - 4c^2\Delta l\frac{2l\Delta l + (\Delta l)^2}{l^3(l+\Delta l)^2} + \frac{2c^2(\Delta l)^2}{l^2(l+\Delta l)^2}\right]$$

Itt m' a (7) alatti y-kifejezés l-szerinti differenciálhányadosát kiszámítva, a következő alakban írható fel:

$$-\frac{D}{P_1}\Delta l + \frac{B}{P_1}\frac{\Delta l}{l^2} + \frac{A}{P_1}\frac{2\Delta l}{l^3} + \frac{1}{s}\left(2c\frac{\Delta l}{l^2} + 4c^2\frac{\Delta l}{l^3}\right) =$$

$$= -\frac{\Delta l}{P_1}\left\{D - \frac{B}{l^2} - A\frac{2}{l^3} - \frac{P_1}{s}\left(\frac{2c}{l^2} + \frac{4c^2}{l^3}\right)\right\} = -\frac{\Delta l}{P_1}\cdot\frac{dy}{dl}.$$

Tehát, ha l az l_0 -lal jelölt optimális csapágytávolsággal egyenlő, akkor, mivel $l = l_0$-ra y-nak maximuma van, a differenciálhányadosa $l = l_0$-ra:

$$\frac{dy}{dl_{(l=l_0)}} = 0,$$

és így m' nulla, tehát az m'/N tört értéke is nulla. Eszerint a $j(l_0 + \Delta l) - j(l_0)$ differencia értéke

$$j(l_0+\Delta l) - j(l_0) = \frac{1}{N}\left\{-\frac{B}{P_1}\frac{(\Delta l)^2}{l_0^2(l_0+\Delta l)} + \frac{A}{P_1}\frac{3(\Delta l)^2}{l_0^3(l_0+\Delta l)^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{A}{P_1}\frac{2(\Delta l)^3}{l_0^3(l_0+\Delta l)^2} + \frac{1}{s}\left[\frac{2c(\Delta l)^2}{l_0^2(l_0+\Delta l)} + \frac{6c^2(\Delta l)^2}{l_0^3(l_0+\Delta l)^2} + \frac{4c^2(\Delta l)^3}{l_0^3(l_0+\Delta l)^2}\right]\right\} =$$

$$= -\frac{1}{N}\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2\left\{\frac{1}{s}\left[\frac{2c}{l_0+\Delta l} + \frac{6c^2}{(l_0+\Delta l)^2} + \frac{4c^2\Delta l}{l_0(l_0+\Delta l)^2}\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{B}{P_1}\frac{1}{l_0+\Delta l} + \frac{A}{P_1}\left(\frac{3}{l(_0+\Delta l)^2} + \frac{2\Delta l}{l_0(l_0+\Delta l)^2}\right)\right\}.$$

Ebből, mivel N értéke

$$\frac{y}{P_1} = \frac{1}{j(l_0)},$$

mivel továbbá az $(y + \Delta y)/P_1$ értéke a (10) alatti kifejezés, a maximális orsómerevség relatív megváltozásának abszolút értéke:

$$\frac{j(l_0) - j(l_0 + \Delta l)}{j(l_0)} = \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 \frac{G}{H},$$

ahol

$$\begin{aligned} G = {} & \frac{2c}{l_0 + \Delta l} + \frac{6c^2}{(l_0 + \Delta l)^2} + \frac{4c^2 \Delta l}{l_0(l_0 + \Delta l)^2} + \\ & + s\left(\frac{B}{P_1}\frac{1}{l_0 + \Delta l} + \frac{A}{P_1}\left[\frac{3}{(l_0 + \Delta l)^2} + \frac{2\Delta l}{l_0(l_0 + \Delta l)^2}\right]\right) \\ H = {} & \left(\frac{D}{P_1}(l_0 + \Delta l) + \frac{C}{P_1}\right)s + \frac{B/P_1}{l_0 + \Delta l}s + \frac{A/P_1}{(l_0 + \Delta l)^2}s + \\ & + 1 + \frac{2c}{l_0 + \Delta l} + \frac{2c^2}{(l_0 + \Delta l)^2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Itt a (2) és (3) alatti szerint

$$\frac{A}{P_1} = \frac{(1 - \varkappa_0)c^2 + \dfrac{P_2}{P_1}ac}{3E} S,$$

$$\frac{B}{P_1} = \frac{P_2 c}{P_1 E}\left[\frac{a^3}{6I_k} + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{k-1} a_i^3\left(\frac{1}{I_{i+1}} - \frac{1}{I_i}\right) + \frac{a}{2}\sum_{i=k}^{n-1} a_i^2\left(\frac{1}{I_{i+1}} - \frac{1}{I_i}\right)\right],$$

$$\frac{D}{P_1} = \frac{c^2}{3EI_n}(1 - \varkappa_0) - \frac{P_2 ac}{6P_1 I_n E},$$

és (8)-szerint

$$\frac{C}{P_1} = \frac{c^3}{3EI_0}.$$

A maximális orsómerevség relatív megváltozásának (11) alatti képletében, a számlálóban és a nevezőben is fellép az A/P_1 törtkifejezés, amely l i n e á r i s függvénye a tengely lépcsőzését jellemző S számnak. Ennélfogva a (11) alatti törtkifejezés felírható mint az S-változónak lineáris törtfüggvénye a következő alakban:

$$\frac{j(l_0) - j(l_0 + \Delta l)}{j(l_0)} = \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 \frac{b_1 + b_2 S}{b_3 + b_4 S}, \tag{12}$$

ahol a lineáris törtfüggvény együtthatói:

$$b_1 = \frac{2c}{l_0 + \Delta l} + \frac{6c^2}{(l_0 + \Delta l)^2} + \frac{4c^2 \Delta l}{l_0(l_0 + \Delta l)^2} + s\frac{B}{P_1(l_0 + \Delta l)},$$

$$b_2 = s\frac{(1 - \varkappa_0)c^2 + \frac{P_2}{P_1}ac}{3E}\left[\frac{3}{(l_0 + \Delta l)^2} + \frac{2\Delta l}{l_0(l_0 + \Delta l)^2}\right], \tag{12'}$$

$$b_3 = \left[\left(\frac{c^2}{3EI_n}(1 - \varkappa_0) - \frac{acP_2}{6EI_nP_1}\right)(l_0 + \Delta l) + \frac{c^3}{3EI_0}\right]s +$$

$$+ \frac{B/P_1}{l_0 + \Delta l}s + 1 + \frac{2c}{l_0 + \Delta l} + \frac{2c^2}{(l_0 + \Delta l)^2},$$

$$b_4 = \frac{(1 - \varkappa_0)c^2 + \frac{P_2}{P_1}ac}{3E(l_0 + \Delta l)^2}s.$$

A (12') alatti képletekben a B kifejezés (3) alatti értékét rövidség kedvéért nem írtuk ki.

6. A maximális orsómerevség relatív megváltozása tehermentesített hajtás esetében

Ebben az esetben $P_2 = 0$ és így B is eltűnik a (3) szerint, ennélfogva a (12) alatti lineáris törtfüggvény együtthatói a következő kifejezések lesznek:

$$b_1 = 2\frac{c}{l_0 + \Delta l} + 6\left(\frac{c}{l_0 + \Delta l}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{l_0 + \Delta l}\right)^2\frac{\Delta l}{l_0},$$

$$b_2 = s\frac{(1 - \varkappa_0)c^2}{3E}\left[\frac{3}{(l_0 + \Delta l)^2} + \frac{2\Delta l}{l_0(l_0 + \Delta l)^2}\right], \tag{13}$$

$$b_3 = \left(\frac{(1 - \varkappa_0)c^2}{3EI_n}(l_0 + \Delta l) + \frac{c^3}{3EI_0}\right)s + 1 + \frac{2c}{l_0 + \Delta l} + 2\left(\frac{c}{l_0 + \Delta l}\right)^2,$$

(13)

$$b_4 = \frac{s(1 - \varkappa_0)}{3E}\left(\frac{c}{l_0 + \Delta l}\right)^2.$$

7. *tétel.* Tehermentesített hajtásra a maximális orsómerevség relatív megváltozásának (12) alatti értéke az S paraméternek monoton növekvő függvénye.

Bizonyítás. Azt kell megmutatnunk, hogy a (12) alatti előállításban fellépő lineáris törtfüggvény az S változónak monoton növekvő függvénye, ha a lineáris törtfüggvény együtthatói a (13) alatti értékek.

Tekintsük a lineáris törtfüggvény következő felbontását

$$\frac{b_1 + b_2 S}{b_3 + b_4 S} = \frac{b_2}{b_4} + \frac{b_1 b_4 - b_2 b_3}{b_4(b_3 + b_4 S)}. \tag{14}$$

A (14) alatti felbontás jobb oldalán álló második tört számlálójáról, azaz a lineáris törtfüggvény $(b_1 b_4 - b_2 b_3)$ determinánsáról kimutatjuk, hogy annak értéke negatív, tehát

$$b_1 b_4 - b_2 b_3 < 0,$$

vagyis fennáll a következő egyenlőtlenség

$$b_2 b_3 > b_1 b_4.$$

Ha ide b_2, b_3 és b_1, b_4 (13) alatti értékét beírjuk, akkor a bebizonyítandó egyenlőtlenségünk a következő lesz:

$$\left[\left(\frac{c^2(1-\varkappa_0)}{3EI_n}(l_0 + \Delta l) + \frac{c^3}{3EI_0}\right) s + 1 + 2\frac{c}{l_0 + \Delta l)} + 2\left(\frac{c}{l_0 + \Delta l}\right)^2\right] \times$$

$$\times\, s\frac{(1-\varkappa_0)c^2}{3E}\left[\frac{3}{(l_0 + \Delta l)^2} + \frac{2\Delta l}{l_0(l_0 + \Delta l)^2}\right] >$$

$$> \left[2\frac{c}{l_0 + \Delta l} + 6\left(\frac{c}{l_0 + \Delta l}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{l_0 + \Delta l}\right)^2 \frac{\Delta l}{l_0}\right]\frac{s(1-\varkappa_0)}{3E}\left(\frac{c}{l_0 + \Delta l}\right)^2,$$

vagy az

$$\frac{s(1-\varkappa_0)}{3E}\left(\frac{c}{l_0 + \Delta l}\right)^2$$

értékkel mindkét oldalon egyszerűsítve:

$$\left[\left(\frac{c^2}{3EI_n}(1-\varkappa_0)(l_0 + \Delta l) + \frac{c^3}{3EI_0}\right) s + 1 + \frac{2c}{l_0 + \Delta l} + 2\left(\frac{c}{l_0 + \Delta l}\right)^2\right]\left[3 + \frac{2\Delta l}{l_0}\right] >$$

$$> \frac{2c}{l_0 + \Delta l} + \left(\frac{c}{l_0 + \Delta l}\right)^2\left(6 + 4\frac{\Delta l}{l_0}\right).$$

Az utóbbi egyenlőtlenség bal oldalát két összeadandóra bontva, azt a következő alakban is felírhatjuk:

$$\left[\left(\frac{c^2(1-\varkappa_0)}{3EI_n}(l_0 + \Delta l) + \frac{c^3}{3EI_0}\right) s + 1 + \frac{2c}{l_0 + \Delta l}\right]\left(3 + \frac{2\Delta l}{l_0}\right) + \left(6 + \frac{4\Delta l}{l_0}\right)\left(\frac{c}{l_0 + \Delta l}\right)^2 >$$

$$> \frac{2c}{l_0 + \Delta l} + \left(6 + 4\frac{\Delta l}{l_0}\right)\left(\frac{c}{l_0 + \Delta l}\right)^2,$$

amely szerint végül is a következő egyenlőtlenségnek kell fennállnia:

$$\left[\left(\frac{c^2(1-\varkappa_0)}{3EI_n}(l_0 + \Delta l) + \frac{c^3}{3EI_0}\right) s + 1 + \frac{2c}{l_0 + \Delta l}\right]\left(3 + 2\frac{\Delta l}{l_0}\right) > 2\frac{c}{l_0 + \Delta l}.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség azonban nyilván triviálisan teljesül, mivel a baloldalon a szorzás elvégzése után fellép a $6c/l_0 + \Delta l$ tag, amelynek értéke nagyobb mint az egyenlőtlenség jobb oldala. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $(b_1 b_4 - b_2 b_3) < 0$, vagyis, hogy a (14) előállításban a második tag negatív, amelynek abszolút értéke csökken, ha a nevezőjében fellépő S változó növekszik. Eszerint a (14) előállításban a

$$\frac{b_1 b_4 - b_2 b_3}{b_4(b_3 + b_4 S)}$$

kivonandó értéke csökken, ha S növekszik, és így a (14) alatti lineáris törtfüggvény növekszik, ha az S változó nő. Ebből következik, hogy tehermentesített hajtás esetében a maximális orsómerevség relatív megváltozásának (12) alatti értéke növekszik, ha az S paraméter értéke nő és ezzel a 7. tételt bebizonyítottuk.

Ennek az eredménynek az alapján megvizsgálhatjuk azt, hogy milyen mértékben változik az orsómerevség, ha az orsó lépcsőzésére jellemző S paraméter értéke változik.

8. *tétel.* Növeljük meg az egyes tengelylépcsők átmérőit, kivéve a legnagyobb átmérőjű n-ik lépcsőét, amelynek átmérőjét hagyjuk változatlanul. Ekkor a maximális orsómerevség relatív megváltozásának a (12) alatti értéke csökken.

Bizonyítás. Írjuk fel a lépcsőzésre jellemző S szám értékét a következő átrendezett alakban:

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}} \right) = a_1^3 \frac{1}{I_1} + (a_2^3 - a_1^3) \frac{1}{I_2} + (a_3^3 - a_2^3) \frac{1}{I_3} + \ldots +$$

$$+ (a_{n-1}^3 - a_{n-2}^3) \frac{1}{I_{n-1}} - \frac{a_{n-1}^3}{I_n}.$$

Ebből a felírásból közvetlenül látható, hogy az S értéke csökken, ha az $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$ másodrendű tehetetlenségi nyomatékok növekednek, ami bekövetkezik akkor, ha az első $(n - 1)$ tengelylépcső átmérőjét megnöveljük, ellenben az utolsó átmérőjét változatlanul hagyjuk. Most már, mivel az S értéke csökken, a 7. tételből következik, hogy a maximális orsómerevség relatív megváltozásának (12) alatti értéke is csökken, ami bizonyítandó volt.

9. *tétel.* A maximális orsómerevség relatív megváltozásának (12) alatti értéke az állandó keresztmetszetű orsóra a legkisebb.

Bizonyítás. A 7. tételből következik, hogy a legkisebb S értékre a legkisebb a maximális orsómerevség megváltozásának az értéke, tehát $S = 0$-ra, amely az S (2') alatti definíciója szerint az állandó keresztmetszetű orsó esetében következik be. Ekkor u.i. $I_1 = I_2 = \ldots = I_n$.

Ebben az esetben a (12) alatti képlet így alakul:

$$\frac{j(l_0) - j(l_0 + \Delta l)}{j(l_0)} = \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 \frac{b_1}{b_3},$$

ahol b_1 és b_3 értéke a (13) alatti (Vö. még [3]).

Vizsgáljuk meg, hogy a maximális orsómerevség relatív megváltozásának értéke mekkorára növekedhetik, mekkora a felső korlátja, ha az S paraméter értéke növekszik. Az S paraméter legnagyobb értéke elméletileg $S = \infty$ lehet, amelyre a (14) alatti lineáris törtfüggvény a

$$\frac{b_1 + b_2 S}{b_3 + b_4 S_{(S=\infty)}} = \frac{b_2}{b_4}$$

értéket veszi fel, amely b_2 és b_4 (13) alatti meghatározása szerint a következő

$$\frac{b_2}{b_4} = 3 + 2 \frac{\Delta l}{l_0}.$$

A (12) képlet második tört tényezőjéről bebizonyítottuk, hogy $b_2b_3 > b_1b_4$ miatt (14)-ben a második tört negatív, eszerint a (12) alatti képletben a lineáris törtkifejezés értéke mindig kisebb mint $3 + 2\Delta l/l_0$ és így a maximális orsómerevség relatív megváltozására mindig fennáll, hogy

$$\frac{j(l_0) - j(l_0 + \Delta l)}{j(l_0)} < \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)^2 \left(3 + 2\,\frac{\Delta l}{l_0}\right).$$

Pl. ha $\Delta l/l_0 = 0{,}4$ (az optimális csapágytávolság 40%-kal megváltozik), akkor a maximális orsómerevség relatív megváltozása kisebb mint:

$$0{,}4^2(3 + 2 \cdot 0{,}4) = 0{,}608 \equiv 60{,}8\%.$$

7. A maximális orsómerevség relatív megváltozása általános hajtás esetében

A változó keresztmetszetű orsó optimális (azaz maximális) merevségének a relatív megváltozását, abban az esetben, amikor a két csapágy távolsága az optimálistól különböző értékű az 5. pont (12) alatti képlete szolgáltatja, ha abban a b_1, b_2, b_3, b_4 együtthatók a (12') alatti értékek, ahol általános hajtás esetében: $P_2 \neq 0$. Az optimális orsómerevség relatív megváltozásának mértékét a következő példán tanulmányozzuk.

A változó keresztmetszetű négy lépcsős ($n = 4$) orsót (csőtengely) meghatározó adatok legyenek a következők (l. [2] Example 4.)

$c = 13$ cm; $a_1 = 2{,}5$ cm; $a_2 = 21{,}5$ cm; $a_3 = 25{,}5$ cm; $I_1 = 3{,}0776$ cm^4; $I_2 = 4{,}9572$ cm^4; $I_3 = 11{,}8276$ cm^4; $I_4 = 13{,}1564$ cm^4; $I_0 = 64{,}800$ cm^4. $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kp/cm^2. A $P_2 = 75$ kp-os erő hatásvonalának koordinátája: $a = 20$ cm és a terhelő erő $P_1 = 100$ kp. Mivel a főcsapágy kétsoros hengergörgős, azért $\varkappa_0 = 0{,}3$. A csapágymerevség: $s = 80000$ kp/cm.

Az optimális csapágytávolság kiszámított értéke (l. [2] 77. oldal).

$$l_0 = 63 \text{ cm}$$

Ha most ezt a csapágytávolságot 40%-kal csökkentjük, akkor a csapágytávolság:

$$l_0 + \Delta l = 37{,}8 \text{ cm}$$

lesz és így

$$\Delta l = -25{,}2.$$

Ezekkel az adatokkal a (12) alatti lineáris törtfüggvény együtthatói, mivel még $B = -0{,}1526110$, a következő értékek lesznek:

$$b_1 = -2{,}02161, \qquad b_2 = 0{,}00613,$$

$$b_3 = -0{,}11608, \qquad b_4 = 0{,}00278.$$

Mivel a tengely lépcsőzését jellemző (2') alatti számérték most: (l. [4] 40. old.)

$$S = \sum_{i=1}^{3} a_i^3 \left(\frac{1}{I_i} - \frac{1}{I_{i+1}}\right) = 1307{,}644\,,$$

a 40%-kal csökkentett tengelytávon a maximális orsómerevség relatív csökkenése a (12)-szerint a következő lesz:

$$\frac{j(l_0) - j(l_0 + \Delta l)}{j(l_0)} = 0{,}4^2\,\frac{-2{,}02161 + 0{,}00613 \cdot 1307{,}644}{-0{,}11608 + 0{,}00278 \cdot 1307{,}644} =$$

$$= 0{,}16\,\frac{5{,}99425}{3{,}51917} = 0{,}16 \cdot 1{,}70331 = 0{,}272 \approx 27\%$$

Tehát 27%-os merevségcsökkenést okoz az, ha az optimális csapágy támaszköznél 40%-kal kisebb csapágytámaszközt veszünk. Ezzel szemben állandó keresztmetszetű tengelynél egy 40%-os csapágytávolság csökkentés kb. csak 9%-os merevségcsökkenést okoz, a merevségcsökkenés értékét a (12) és (12′) szerint $S=0$-ra számítva.

IRODALOM

1. LIPKA I.: Összefüggések a konzolos kéttámaszú tengely legkedvezőbb csapágytámaszköze és a tengelynek, valamint a csapágyaknak bizonyos paraméterei között. *Műszaki Tudomány* **44** (1971).
2. LIPKA, I.: On the Determination of the Optimum Bearing Distance of Cantilever Shafts with two Supports. *Acta Techn. Hung.* **45** (1964).
3. LIPKA I.: Változó keresztmetszetű orsók merevségének vizsgálata. *SZIM Közlemények* **9** (1969).
4. LIPKA, I.: Investigation into the Deformation of Shafts and the Problem of Minimizing Deformation. *Acta Techn. Hung.* **21** (1958).

Relations between the Optimum Bearing Distance of Cantilever Two-support Shafts with Variable Cross-sections and the Shaft Characteristics. The author presents relations between the optimum bearing distance, the configuration (diameters and step lengths) and the characteristic parameters of stepped shafts and bearing rigidity. He also takes into account the case of a general drive, when the shaft is attached between the supports by a bending force deriving from the drive. Furthermore, the paper deals with the variation of the optimum shaft rigidity as a function of optimum bearing distance variation and the connection of this variation with number expressing the stepping of he shaft. The theorems have been deduced without numerical calculations, while considering the most general conditions.

Zusammenhänge zwischen dem optimalen Lagerabstand einer gestuften, zweifach gelagerten auskragenden Welle und ihren Kennwerten. Der Verfasser leitet für Wellen mit veränderlichem Querschnitt (Stufenwellen) Zusammenhänge zwischen Wellenstufung (Länge und Durchmeßer der Wellenabschnitte) und optimaler Stützweite, Auskragung sowie den Parametern der Wellenlagerung (Wellensteifigkeit) ab. Auch der Fall des allgemeinen Antriebs wird berücksichtigt, wenn innerhalb der Stützweite die Welle auch durch eine vom Antrieb herrührende Biegekraft belastet wird. Des weiteren bespricht der Aufsatz die relative Änderung der optimalen Wellensteifigkeit bei Änderung der optimalen Lagerentfernung sowie den Zusammenhang dieser Änderung mit einer Kennzahl für die Stufung der Welle. Die Sätze werden für die allgemeinsten Bedingungen rein analytisch, ohne numerische Berechnungen, abgeleitet.