

# A GEOMETRIAI NEMLINEARITÁS HATÁSA LAPOS ELLIPTIKUS PARABOLOIDHÉJ VIZSGÁLATAKOR

NAGY TAMÁS\*

[Beérkezett: 1973. december 3-án]

A geometriai nemlinearitás hatását lapos héjak esetén az egyensúlyi és a kompatibilitás differenciálegyenletekben egy-egy többlettag képviseli. A cikk a többlettag viselkedését — lapos izotróp elliptikus paraboloid esetén — analitikus és numerikus módszerekkel vizsgálja és rámutat arra, hogy 0,06-nál kisebb nyílmagasság—támaszköz viszony esetében célszerű a geometriai nemlinearitás hatását figyelembe venni. A számszerű vizsgálatok eredményeit grafikonok mutatják be.

A Budapesti Műszaki Egyetem Építőmérnökkari Mechanika Tanszékén az elmúlt év óta foglalkozunk az ortotróp lapos héj gépi számításával [5]. A kidolgozott algoritmus és program segítségével nagyszámú konkrét példát számoltunk ki izotróp lapos elliptikus paraboloidhéjra. A számítások során többek között arra a kérdésre kerestük a választ, hogy a lapos héjakra vonatkozó Vlaszov—Marguerre egyenletek alkalmazása milyen érvényességi határok között jogosult. Ennek során a geometriai nemlinearitás hatásának vizsgálata igen lapos héjaknál érdekes eredményekre vezetett, erről számolunk be jelen cikkben.

## 1. A lapos héj differenciálegyenlete

Az egyszerűség kedvéért az izotróp héj esetére szorítkozva, a lapos héj differenciálegyenletei (Vlaszov — Marguerre egyenletek):

$$K\Delta\Delta w - \Delta_P F = p, \quad (1/a)$$

$$\Delta\Delta F + E\delta\Delta_P w = 0, \quad (1/b)$$

\* Dr. Nagy Tamás, 1091 Budapest, Üllői-út 71.

ahol	$w = w(x, y)$	a lehajlásfüggvény
	$F = F(x, y)$	a feszültség-függvény
	E	a rugalmassági modulus
	$\delta$	a héj vastagsága
	$K = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$	a lemezmerevségi tényező
	$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$	a „Laplace” operátor
	$\Delta_P = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$	a „Pucher operátor”
	$z = z(x, y)$	a héj középfelületének egyenlete.

Figyelembe véve, hogy  $\Delta$  és  $\Delta_P$  lineáris operátorok, tehát egymás után alkalmazva őket sorrendjük felcserélhető, a Vlaszov egyenletekből mind a lehajlás, mind a feszültség-függvény kifejezhető a terhelés függvényeként:

$$K\Delta\Delta\Delta\Delta w + E\delta\Delta_P\Delta_P w = \Delta\Delta p \quad (2/a)$$

$$\frac{K}{E\delta} \Delta\Delta\Delta\Delta F + \Delta_P\Delta_P F = -\Delta_P p \quad (2/b)$$

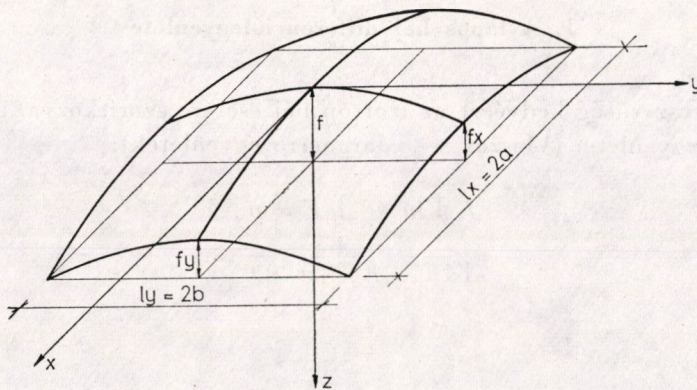
Elliptikus paraboloidhéj esetében (1. ábra)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = k_2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = k_1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad (3)$$

s így a Pucher-operátor leegyszerűsödik:

$$\Delta_P = k_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Az egyszerűsítés következtében a nyolcadrendű parciális differenciálegyenletek csak párosrendű differenciál-operátorokat tartalmaznak. A numerikus megoldásra a differencia-módszer a C másodrendű differencia-operátor spekt-



1. ábra

ráfelbontását alkalmazó változatát használva fel [1], [7], [4], [5], a megoldás

$$\mathbf{W} = \mathbf{U}_m \{ \mathbf{M} \wedge (\mathbf{U}_m \mathbf{P} \mathbf{U}_n) \} \mathbf{U}_n \quad (5/a)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}_m \{ \mathbf{N} \wedge (\mathbf{U}_m \mathbf{P} \mathbf{U}_n) \} \mathbf{U}_n \quad (5/b)$$

alakban adódik, ahol

$$[m_{j,k}] = \left[ \frac{\left( \frac{\lambda_j}{a^2} + \frac{\lambda_k}{b^2} \right)^2}{K \left( \frac{\lambda_j}{a^2} + \frac{\lambda_k}{b^2} \right)^4 + E\delta \left( \frac{k_1}{a^2} \lambda_j + \frac{k_2}{b^2} \lambda_k \right)^2} \right] \quad (6/a)$$

$$[n_{j,k}] = \left[ \frac{- \left( \frac{k_1}{a^2} \lambda_j + \frac{k_2}{b^2} \lambda_k \right)^2}{\left( \frac{k_1}{a^2} \lambda_j + \frac{k_2}{b^2} \lambda_k \right)^2 + \frac{K}{E\delta} \left( \frac{\lambda_j}{a^2} + \frac{\lambda_k}{b^2} \right)^4} \right] \quad (6/b)$$

Fenti képletekben

$\mathbf{U}_m$  és  $\mathbf{U}_n$  az  $m$ -ed rendű  $\mathbf{C}_m$ , illetve  $n$ -ed rendű  $\mathbf{C}_n$  differencia-operátor mátrix modálmátrixa,  
 $\lambda_j$  a  $\mathbf{C}_m$  mátrix  $j$ -edik sajátértéke,  
 $\lambda_k$  a  $\mathbf{C}_n$  mátrix  $k$ -edik sajátértéke,  
 $\lambda$  a mátrixok logikai szorzásának jele.

Az (5) formulákban megadott megoldás közvetlenül, homogén peremfeltételek esetén érvényes, ami statikailag a peremén egyszerűen támaszkodó, oldalnyomásmentes héjnak felel meg.

## 2. A másodrendű hatás figyelembevétele

A „másodrendű hatás” jelen esetben a rugalmas alakváltozás visszahatásának figyelembevételét jelenti, részleteiben:

a) a geometriai egyenletekben figyelembe vesszük a másodrendű tagot is:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &\approx \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_y &\approx \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} w + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &\approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} w + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}; \end{aligned} \quad (7)$$

b) a héjelem harmadik egyensúlyi egyenletében ( $z$ -irányú vetületi egyenlet) figyelembe vesszük a rugalmas lehajlás hatását is:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ Q_x + N_x \frac{\partial(z+w)}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial(z+w)}{\partial y} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ Q_y + N_{xy} \frac{\partial(z+w)}{\partial x} + N_y \frac{\partial(z+w)}{\partial y} \right] + P = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

A levezetés eredménye (részleteket lásd BELEŞ—SOARE [2], vagy FILIN [3] könyveit)

$$K\Delta\Delta w - \Delta_p F = P + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (9/a)$$

$$\frac{1}{E\delta} \Delta\Delta F + \Delta_p w = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (9/b)$$

vagy operátor-jelöléssel:

$$K\Delta\Delta w - \Delta_p F = P + \mathfrak{L}(F, w), \quad (10/a)$$

$$\frac{1}{E\delta} \Delta\Delta F + \Delta_p w = -\frac{1}{2} \mathfrak{L}(w, w). \quad (10/b)$$

Tehát a geometriai nemlinearitás hatása az egyensúlyi és az összeférhetőségi egyenletben egyaránt egy többlettag bevonásával vehető tekintetbe, amelyet célszerű többletterheként kezelni.

Különböző vastagságú és nyílmagasságú héjakra végzett számításaink azt mutatták, hogy míg az összeférhetőségi egyenlet többletterhének értékei síklemeznél a legnagyobbak, de ott is kicsinyek, s a nyílmagasság növelésével gyorsan a számítási pontosság alá csökkennek (gyakorlatilag zérussá válnak), addig az egyensúlyi egyenlet többletterhe síklemeznél zérus, igen lapos héjaknál viszont a sarkokban és a középben jelentős értéket vesz fel, s a nyílmagasság növelésével lassabban csökken. A jelenséget elméletileg, trigonometrikus sorok alkalmazásával tisztáztuk.

### 3. Az egyensúlyi egyenlet többlettagjának viselkedése

A szabadon felfekvő, oldalnyomásmentes elliptikus paraboloidhéj megoldása trigonometrikus sorokkal való közelítés esetén BELEŞ—SOARE [2] szerint állítható elő. Ha a teher

$$z = \sum_m \sum_n z_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}, \quad (11)$$

akkor

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}, \quad (12/a)$$

$$F = \sum_m \sum_n F_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b}. \quad (12/b)$$

Behelyettesítve és a deriválásokat elvégezve:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(w, F) = & \left( \sum_m \sum_n \frac{m^2 \pi^2}{4a^2} F_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \right) \left( \sum_m \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{4b^2} w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cdot \right. \\ & \cdot \cos \frac{n\pi y}{2b} \left. \right) + \left( \sum_m \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{4b^2} F_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \right) \left( \sum_m \sum_n \frac{m^2 \pi^2}{4a^2} \cdot w_{mn} \cdot \right. \\ & \cdot \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \left. \right) - 2 \left( \sum_m \sum_n \frac{mn \pi^2}{4ab} F_{mn} \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} \right) \cdot \\ & \cdot \left( \sum_m \sum_n \frac{mn \pi^2}{4ab} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Látható, hogy a (13) kifejezésnek szélsőértéke van a héj közepén ( $x = 0, y = 0$ ):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(w, F)_{0,0} = & \left( \sum_m \sum_n \frac{m^2 \pi^2}{4a^2} F_{mn} \right) \left( \sum_m \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{4b^2} w_{mn} \right) + \\ & + \left( \sum_m \sum_n \frac{n^2 \pi^2}{4a^2} F_{mn} \right) \left( \sum_m \sum_n \frac{m^2 \pi^2}{4b^2} w_{mn} \right) = \\ & = \frac{\pi^4}{16a^2 b^2} \left[ \left( \sum_m \sum_n m^2 F_{mn} \right) \left( \sum_m \sum_n n^2 w_{mn} \right) + \right. \\ & \left. + \left( \sum_m \sum_n n^2 F_{mn} \right) \left( \sum_m \sum_n m^2 w_{mn} \right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Ezenkívül szélsőértéke van a héj sarokpontjaiban, vagyis az  $x = a, y = b; x = -a, y = b; x = -a, y = -b; x = a, y = -b$  helyeken is:

$$\mathfrak{L}(w, F)_s = -2 \frac{\pi^4}{16a^2 b^2} \left( \sum_m \sum_n mn F_{mn} \right) \left( \sum_m \sum_n mn w_{mn} \right). \quad (15)$$

A (14) és (15) kifejezés struktúrája igen hasonló, ezért elegendő a (15) kifejezés részletes elemzése. Behelyettesítve BELEŞ és SOARE alapján [2] az  $F_{mn}$  és  $w_{mn}$  értékeit:

$$F_{mn} = \frac{2z_{mn}a^2b^2}{\pi^2f_y} \frac{\beta\alpha^4(m^2 + \lambda n^2)}{(m^2 + \alpha^2n^2)^4 + \beta\alpha^4(m^2 + \lambda n^2)^2} = \frac{2z_{mn}a^2b^2}{\pi^2f_y} \beta \xi_{m,n}, \quad (16)$$

$$w_{mn} = \frac{16z_{mn}a^4}{K\pi^4} \frac{(m^2 + \alpha^2n^2)^2}{(m^2 + \alpha^2n^2)^4 + \beta\alpha^4(m^2 + \lambda n^2)^2} = \frac{16z_{mn}a^4}{K\pi^4} \zeta_{m,n}, \quad (17)$$

ahol

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \lambda = \frac{f_x}{f_y}, \quad \beta = \frac{768(1 - \nu^2)}{\pi^4} \left( \frac{f_y}{\delta} \right)^2.$$

Mint ismeretes, a  $C_m$  primitív kontinuáns mátrix (más szempontból a másodrendű differenciaoperátor-mátrix) spektrálmatrixa az  $m$ -tagú Fourier-polinom tömör megfogalmazása.

A (16) és (17) kifejezést behelyettesítve (15)-be:

$$\mathfrak{L}(w, F) = - \frac{\pi^4}{8a^2b^2} \left( \sum_m \sum_n mn \frac{2z_{mn}a^2b^2}{\pi^2f_y} \beta \xi_{mn} \right) \left( \sum_m \sum_n mn \frac{16z_{mn}a^4}{K\pi^4} \zeta_{m,n} \right). \quad (18)$$

A konstansok kiemelése és átrendezés után:

$$\mathfrak{L}(w, F) = - \frac{36864}{\pi^2} \frac{f_y}{\delta} a^4 \frac{(1 - \nu^2)}{E\delta^4} \left( \sum \sum mn z_{mn} \xi_{mn} \right) \left( \sum \sum mn z_{mn} \zeta_{mn} \right). \quad (19)$$

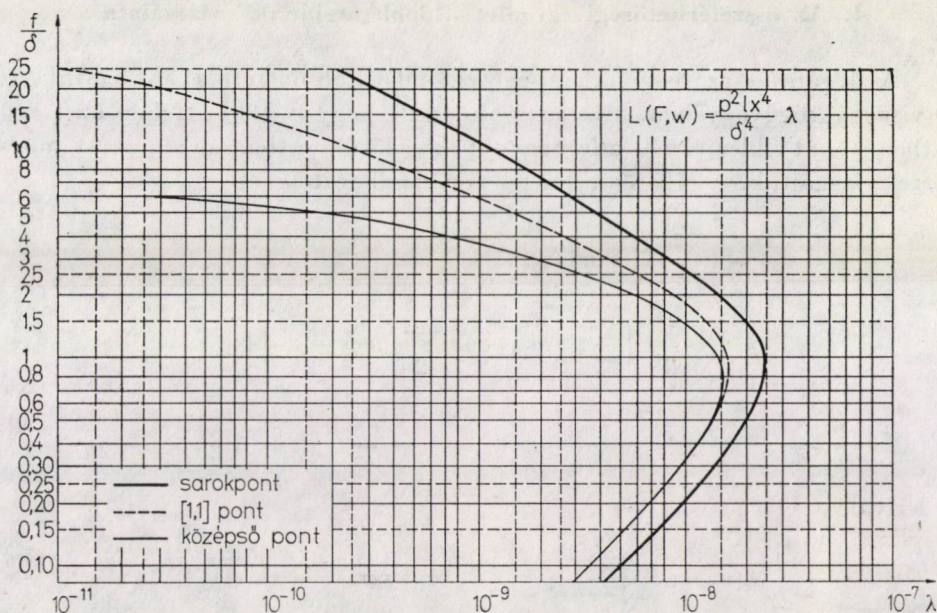
Ha figyelembe vesszük azt a tényt is, hogy tetszőleges teherelrendezés esetén a teherfüggvény  $z_{mn}$  együtthatói lineárisan függenek a  $p$  teherintenzitástól, a (19) kifejezésből  $\mathfrak{L}(w, F)$ -re vonatkozóan az alábbi lényeges összefüggéseket olvashatjuk ki:

– síklemeznél ( $f_y = 0$ ) értéke zérus,  $f_y < 0$  esetében  $f_y$ -ra folytonosan változik,

– a teherintenzitástól négyzetesen függ,

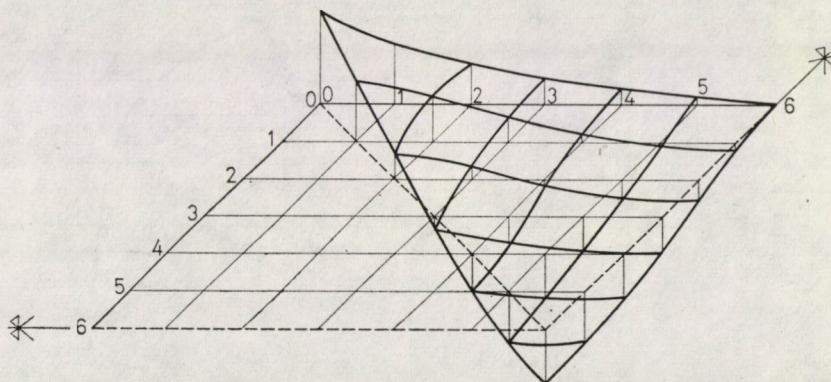
– a héj fesztávolságának negyedik hatványával egyenes, a héj-vastagság negyedik hatványával fordított arányban van.

Az  $\mathfrak{L}(w, F)$  függvény szélsőértékét  $f_y/\delta$  függvényében zárt alakban számítani nem tudtuk, mert az  $f_y/\delta$  hányados a szummációk alatt a nevezőben is szerepel. Így a szélsőértéket különböző vastagságú héjak sorozatának gépi számításával kerestük meg.



2. ábra

A számítást  $10 \times 10$  m alaprajzi méretű héjra végeztük el  $m = n = 11$  osztással ( $E = 2\,500\,000$  Mp/m<sup>2</sup>,  $\nu = 0$ ),  $f_x = f_y = 0 \dots 1,5$  m határok között változott. Az eredményt a 2. ábrán mutatjuk be, kétszeres logaritmikus koordinátarendszerben. Az egyik ordináta az  $(f_x + f_y)/\delta = f/\delta$  viszony, a másik az  $\mathcal{L}(w, F)$  funkcionál értéke. Felraktuk az értékeket a sarokpontokban, a sarokponthoz legközelebbi belső pontban [(1,1) pont] és a középpontban. Az ábrából leolvashatóan a  $\mathcal{L}(w, F)$  többletterhel értéke  $f/\delta = 1$  esetén a legnagyobb. Erre az  $f/\delta$  értékre ábráztuk a  $\mathcal{L}(w, F)$  függvény felületét a 3. ábrán, szimmetria viszonyok miatt csak a tartomány egy nyolcadán.



3. ábra

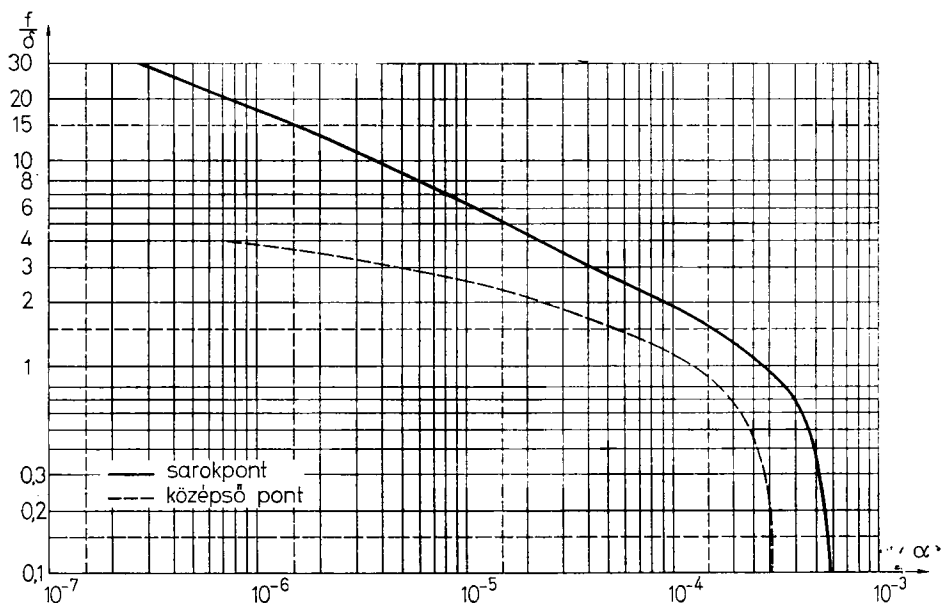
#### 4. Az összeférhetőségi egyenlet „többlettagjának” vizsgálata

A 4. ábrán az összeférhetőségi egyenlet többletterhét ábrázoltuk az  $f/\delta$  viszony függvényében. Azt az eredményt, hogy a többletterh az  $f = 0$  esetben (tehát síklemeznél) a legnagyobb, az előző pontban alkalmazott módszerrel vizsgáltuk. A (12) összefüggés figyelembevételével

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \mathfrak{L}(w, w) &= \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \\
 &= \left[ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \sum_m \sum_n w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \right) \right]^2 - \\
 &- \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_m \sum_n w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \sum_m \sum_n w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \right). \quad (20)
 \end{aligned}$$

A deriválást elvégezve,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \mathfrak{L}(w, w) &= \left( \sum_m \sum_n \pi^2 \frac{mn}{4ab} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{2a} \sin \frac{n\pi y}{2b} \right)^2 - \\
 &- \left( \sum_m \sum_n \frac{\pi^2 m^2}{4a^2} w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \right) \left( \sum_m \sum_n \frac{\pi^2 n^2}{4b^2} w_{mn} \frac{m\pi x}{2a} \cos \frac{n\pi y}{2b} \right). \quad (21)
 \end{aligned}$$



Megjegyzés: 
$$-\frac{1}{2} L(w, w) = \frac{P^2 \lambda^4}{K^2} \alpha.$$

4. ábra

Mint látható, a függvénynek szélsőértékei vannak a középpontban ( $x = y = 0$ ):

$$-\frac{1}{2} \mathfrak{L}(w, w)_{0,0} = - \left( \sum_m \sum_n \frac{\pi^2 m^2}{4a^2} w_{mn} \right) \left( \sum_m \sum_n \frac{\pi^2 n^2}{4b^2} w_{mn} \right), \quad (22)$$

és a sarokpontokban (pl.  $x = a, y = b$ ):

$$-\frac{1}{2} \mathfrak{L}(w, w)_{\text{sarok}} = \left( \sum_m \sum_n \frac{\pi^2 mn}{4ab} w_{mn} \right)^2 \quad (23)$$

A két, hasonló viselkedésű függvény közül részletesebben a (23)-at vizsgálva, (17) figyelembevételével

$$-\frac{1}{2} \mathfrak{L}(w, w) = \left[ \sum_m \sum_n \frac{\pi^2 mn}{4ab} \frac{16z_{mn} \alpha^4}{K\pi^4} \frac{(m^2 + \alpha^2 n^2)^2}{(m^2 + \alpha^2 n^2)^4 + \beta \alpha^4 (m^2 + \lambda n^2)^2} \right]^2. \quad (24)$$

A konstansokat kiemelve,

$$-\frac{1}{2} (w, w) = \frac{16\alpha^4 \alpha^2}{K^2 \pi^4} \left[ \sum_m \sum_n mn z_{mn} \frac{(m^2 + \alpha^2 n^2)^2}{(m^2 + \alpha^2 n^2)^4 + \beta \alpha^4 (m^2 + \lambda n^2)^2} \right]^2. \quad (25)$$

Emlékeztetve arra, hogy

$$\beta = \frac{768(1 - \nu^2)}{\pi^4} \left( \frac{f}{\delta} \right)^2,$$

megállapíthatjuk, hogy az  $f/\delta$  viszony négyzete a nevező egyik tagjának szorzója, tehát igazolt, hogy az

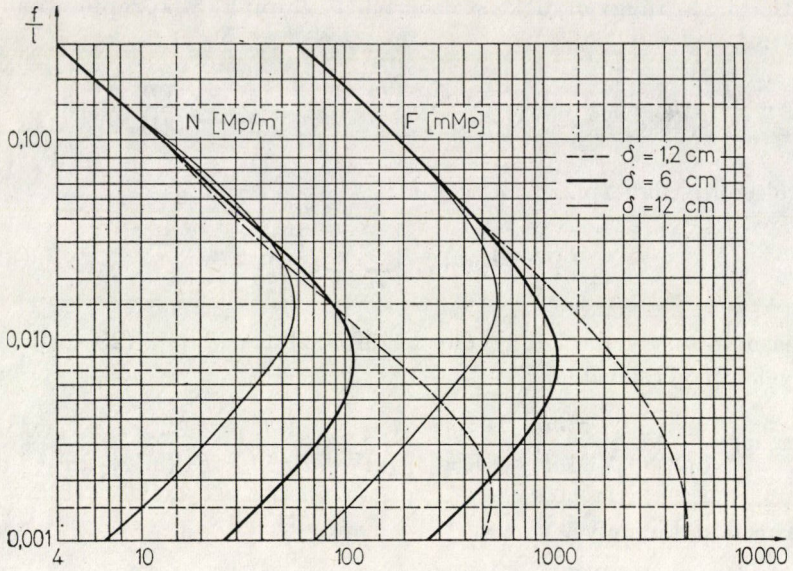
$$\frac{1}{2} \mathfrak{L}(w, w)$$

kifejezésnek  $f/\delta$  függvényében az  $f = 0$  helyen maximuma van.

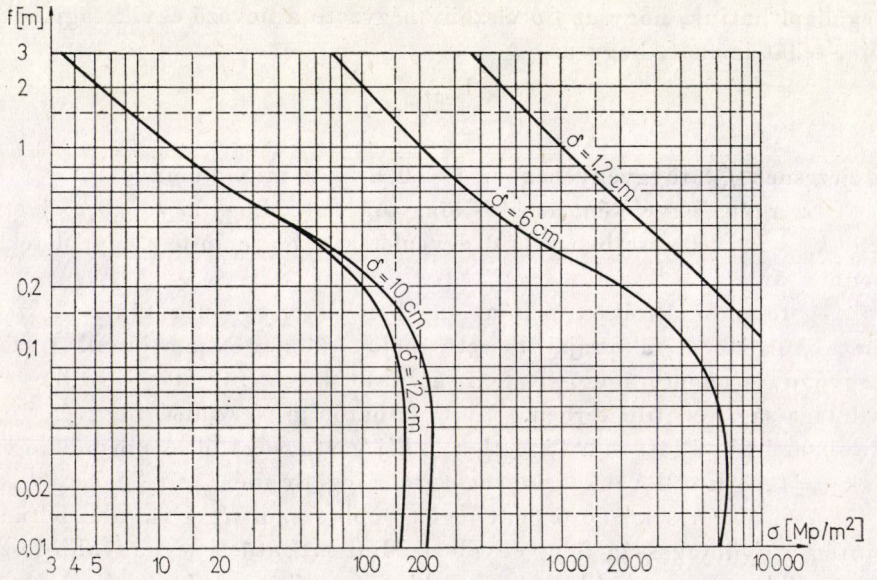
Ez a tény egyébként azzal is magyarázható, hogy az  $f = 0$ , (következésként  $k_1 = k_2 = 0$ ) esetben a (10) egyenletek a Kármán-féle egyenletekbe [4] mennek át.

A további ábrákon néhány egyéb eredményt mutatunk be. Az 5. ábrán a  $10 \times 10$  m alaprajzi méretű héjak középső pontjának feszültségfüggvény és membránérő-értékeit ábrázoltuk. A függőleges ordináta az  $f$  nyílmagasság, centiméterben. Mint látható, a feszültségfüggvény értéke  $f/l = 0,06$  érték fölött már független a héj vastagságától. A normálérő viszont csak  $= 0,15$  körül válik a vastagságtól függetlenné.

A 6. ábrán a középső pont legnagyobb feszültségei vannak feltüntetve, szintén a nyílmagasság függvényében. Mint látható, a legnagyobb feszültség nem a síklemeznél adódik, hanem a kicsiny nyílmagasságú héjaknál.



5. ábra



6. ábra

### 5. Az eredmények összefoglalása, következtetések

A bemutatott számítási eredmények és elméleti megfontolások alapján néhány következtetést vonhatunk le.

1. Vékony lemezek és vékony, igen lapos héjak (görbült lemezek) számításánál a geometriai nemlinearitás hatását célszerű számításba venni.

2. A síklemezek héjba való átmeneténél a geometriai nemlinearitás hatását jellemző többlettagok folytonos függvénnyel írhatók le, melyeknek részint a síklemeznél (az összeférhetőségi egyenlet többlettagja), részint a héjvastagsággal azonos nyílmagasság esetén (az egyensúlyi egyenlet többlettagja) van szélsőértéke. Ez utóbbi eredmény FILIN szóbeli közlése szerint egyezik a Szovjetunióban igen lapos ívek esetére kapott eredményekkel.

3. A geometriai nemlinearitás hatása már elhanyagolható, ha a nyílmagasság eléri a héjvastagság négyszeresét, de a hajlító igénybevétel részaránya még jelentős. Ha a nyílmagasság meghaladja a héjvastagság tízszeresét, a membránerők válnak uralkodó jellegűvé.

A kutatást tovább folytatjuk. Közvetlen célunk a geometriai nemlinearitás hatásának vizsgálata a síklemez és kis nyílmagasságú lapos héj lehajlásaira és igénybevételeire.

#### IRODALOM

1. EGERVÁRY Jenő: Páronként felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokról és azok alkalmazásáról a rácsdinamikában. *MTA Alk. Mat. Int. Közl.* 3 (1954).
2. BELEŞ, A.—SOARE, M.: Das elliptische und hyperbolische Paraboloid im Bauwesen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin.
3. FILIN, A. P.: Elementü teorii obolochek. Izd. literaturi po stroitelstvo Leningrad, 1966.
4. KÁRMÁN, T.: lásd: „Encyklopädie der Math. Wiss.” (1910) N/4 kötet, 3490.
5. NAGY Tamás: Matrix Equation Analysis in the Finite Element Method. *Per. Pol., Civ. Eng.* 14. (1970) No. 1—2, pp. 173—192.
6. NAGY Tamás: Ortotróp lapos héjak gépi számítása. Doktori értekezés. Budapest 1973.
7. SAORE, M.: Application of Finite Difference Equation to Shell Analysis. Pergamon Press, 1967.
8. SZABÓ János: Ein neues Verfahren zur unmittelbaren numerischen Lösung der Dirichlet-schen Randwertaufgaben. *ZAMM*, 38, H. 718 Juli/August 1958.
9. SZMODITS Kázmér: Héjszerkezetek méretezése. *ÉTI Tud. Közl.* 47. Budapest 1965.

Effect of Geometrical Non-linearity on Elliptic Paraboloidal Shallow Shells. In the case of shallow shells, the effect of non-linear geometry is represented by an excess term each in equilibrium and compatibility differential equations. The behaviour of the excess term — in case of shallow, isotropic elliptical paraboloid shells — is analysed by both analytic and numerical methods, and the effect of non-linear geometry is demonstrated to be advisably taken into consideration for rise to span ratios below 0,06. Numerical results are presented on diagrams.

Die Wirkung der geometrischen Nichtlinearität bei der Untersuchung von flachen, elliptischen Paraboloidschalen. Die Wirkung der geometrischen Nichtlinearität zeigt sich bei flachen Schalen durch je ein zusätzliches Glied in den Gleichgewichts- und Kompatibilitäts-Differentialgleichungen. Im Beitrag wird das Verhalten dieses zusätzlichen Gliedes — für den Fall eines flachen, isotropen, elliptischen Paraboloids — nach analytischen und numerischen Methoden untersucht und es wird darauf hingewiesen, daß es bei einem Verhältnis Pfeilhöhe zu Stützweite unter 0,06 zweckmäßig sei, die Wirkung der geometrischen Nichtlinearität zu berücksichtigen. Die Ergebnisse der numerischen Untersuchungen sind in Diagrammen dargestellt.