

# A MOIRÉ-MÓDSZER NÉHÁNY EGYSZERŰBB ALKALMAZÁSA AZ ALAKVÁLTOZÁSOK ÉS FESZÜLTSEGEK KÍSÉRLETI ANALÍZISÉBEN

KÖRÖNDI LÁSZLÓ\*

[Beérkezett 1974. január 8-án]

A szerkezeti elemeken vagy modelleken fellépő alakváltozások és feszültségek analízisében alkalmazott kísérleti eljárások területén a moiré-módszerek rohamosan fejlődnek. Ezek a módszerek közvetlenül — közvetítő fizikai tulajdonságok megmérése nélkül — többnyire igen egyszerű mérési alapelv felhasználásával határozzák meg a ráccsal lefedett terület összes pontjában a kísérleti elrendezési variációtól függően a különböző kívánt alakváltozáskomponenseket. A cikk előbb a moiré-effektus, a moirésávok létrejöttének folyamatát tárgyalja, majd tárcsa- és lemezfeladatokkal kapcsolatos néhány fontosabb kísérleti kombinációt ismertet.

## 1. Bevezetés

Az alakváltozások és feszültségek analízisében jelenleg ismeretes és alkalmazott kísérleti eljárások egyik legalapvetőbb mérési elvét használja a *moiré-módszer*: a deformáció lejátszódása előtti és utáni hosszak összehasonlításával határozza meg a kísérleti elrendezéstől függően a különböző alakváltozáskomponenseket (síkbeli vagy felületi elmozdulást, szögtorzulást, tárcsákon a főfeszültségek összegével arányos vastagságváltozást, lemezek szögforgását stb.). A módszer alapvetően kísérleti jellegű, bár számos elméleti megfontolással is szoros kapcsolatban áll.

A moiré-módszereket már több évtizede használják különböző laboratóriumokban modelleken, kismintákon és tényleges szerkezeti elemeken végrehajtott mérések segédeszközeként, de csak néhány éve annak, hogy megfelelően sűrű és pontos rácsok gyártása és felhasználása révén megnyílt a lehetőség szélesebb körű alkalmazásuk előtt. Az eljárás különösen alkalmasnak bizonyult egyes kísérleti feladatok megoldására, egyebek között nagy felületi deformációk és képlékeny alakváltozási eloszlásmezők (pl. inhomogén plasztikus alakváltozások hibátlan és hibás hegesztési varratok, repedések környezetében) meghatározása során, átlátszó anyagból készített modellek két- és háromdimenziós analízise esetében, valamint magas hőmérsékleten végrehajtott méréseknél.

\* Köröndi László, 1113 Budapest, Molnár E. u. 14/a

## 2. Rövid történeti visszatekintés

FOUCAULT [1] már 1859-ben javasolt egy olyan módszert lencsék és optikai rendszerek vizsgálatára, amely viszonylag ritka osztású, alacsony frekvenciájú rácsok alkalmazásán alapult. A moiré-jelenséget Lord RAYLEIGH [2] írta le elsőként; ő különböző rácsok pontosságának ellenőrzésére a moiré-sávok felhasználását ajánlotta. RIGHI [3] párhuzamos vonalrácsokkal, illetve koncentrikus kör- és sugársorozatból álló rácsokkal keltett interferenciajelenségekkel, valamint a relatív rácselmozdulásoknak mérési célokra való alkalmazásával foglalkozott. Bár a szóbanforgó jelenség mérés technikai felhasználása igen sok előnyt ígért, a megfelelő rácsok előállításával és reprodukciójával, valamint a módszer használatával kapcsolatos számtalan nehézség sokáig meggátolta a fenti szerzők és néhány követőjük elképzeléseinek kiterjedt gyakorlati megvalósulását.

A moiré-jelenségnek a geometriai optikán alapuló magyarázatát TOLLENAAR [4] adta meg. WELLER és SHEPARD [5] módszere szintén síkbeli rácselmozdulások és rácsdeformációk meghatározására alkalmas. LIGTENBERG [6] eljárása reflexiós rácsképek interferenciáját használja fel hajlított lemezek szögforgáseloszlásának megállapítására. Az utóbbi egy-két évtizedben a módszer elméleti és technikai oldala is nagymértékben fejlődött. Kidolgozták a jóminőségű, finom és nem nagyon drága rácsok előállítási és reprodukálási technológiáját, továbbá sok új mérés technikai alkalmazási lehetőséget is feltártak; így kiterjedten alkalmazzák a módszert rugalmas és képlékeny alakváltozások mérésére, de programozott megmunkáló folyamatok automatikus vezérlésére is.

E modern kísérleti módszer népszerűségét és elterjedtségét nyilvánvalóan igazolja az a tény, hogy ma már sokszázra tehető a moiré-sávok mérési alkalmazásaival foglalkozó fontosabb publikációk száma. Az elmúlt néhány évben megjelent művek közül feltehetőleg THEOCARIS [7] könyve adja a legátfogóbb leírást azokról a módszerekről, amelyek a moiré-jelenséget a deformált testeken és mérnöki szerkezeteken keletkező alakváltozások mérésére használják.

A továbbiakban ismertetjük a moiré-jelenség létrejöttének folyamatát és leírunk a modellek és tényleges szerkezeti elemek deformációjának meghatározására szolgáló néhány egyszerűbb alkalmazási módszert.

## 3. A moiré-effektus

### 3.1. A moiré-effektus keletkezése

A moiré-effektusok körébe olyan jelenségek tartoznak, amelyek — később részletezendő egyéb körülmények között — akkor keletkeznek, ha a fényáram egymás után legalább két tökéletesen vagy közelítőleg periodikus

struktúrán (pl. rácson) halad át, amelyek közül az egyik alakzat frekvenciája vagy annak egész számú többszöröse teljesen vagy közel azonos a másik alakzat frekvenciájával.

A mindennapi életben gyakran találkozunk a moiré-jelenséggel, például akkor, ha egymás mögött elhelyezett két párhuzamos síkú rács, korlát vagy kerítés függőleges elemeit bizonyos távolságból szemléljük, vagy ha egy hálószerű anyagból készült függőnyt összehajtunk. Az ún. moiré-mintás selyem gyártása során is e hatás tudatos létrehozásával és alkalmazásával érnek el egyfajta jellegzetes hullámos, erezett mintázatot.

A kísérleti alakváltozás-, ill. feszültséganalízisben alkalmazott moiré-módszerek eredetileg periodikus struktúrák használatát tételezik fel. Ha mindkét alakzat periodikus, akkor a moiré-jelenség is periodikus. Mivel a különböző vizsgált felületek mentén az alakváltozások eloszlása többnyire nem egyenletes, így a jelenség általában nem periodikus, ugyanis legalább az egyik felhasznált alakzat eltér a periodikustól, éppen az analizálandó deformált, torzult állapot következtében. Azt a folyamatot, amely a vizsgált tárgyfelület deformációjának következtében létrejövő és azzal szoros kapcsolatban álló moiré-effektus képződéséhez vezet, gyakran *mechanikai interferenciának* nevezik. A moiré-módszereknél alkalmazott periodikus struktúrák többnyire különböző fajtájú rácsok, ill. ezek kópiái, vetített- és tükröképei, amelyeknek elemei — vonalak, pontok, körök vagy egyebek — a fényhullámoknak bizonyos amplitúdóváltozásait eredményezik. Két szomszédos elem távolságának, a rácsosztásnak a reciprok értékét, másszóval a hosszegységre jutó elemek számát a struktúrák frekvenciájának, *rácsfrekvenciának* nevezzük. Ha a felhasznált struktúrák frekvenciája csak kis mértékben tér el egymástól, fényintenzitáslebegések, moiré-effektusok keletkeznek. A tárgyalás során általában fehér fényvel és a látható fény hullámhosszánál nagyságrendekkel nagyobb osztásközű rácsokkal foglalkozunk és feltételezzük a fény egyenesvonalú terjedését. A fényátbocsátást (visszaverést) és fénygátlást (elnyelést, rekeszelést) az egymáshelyezett (tükrözött, vetített stb.) rácsképek átlátszó (világos) és átlátszatlan (sötét) sávjainak relatív elhelyezkedéséből származtatjuk. A viszonylag sűrű rácsoknál megfigyelhető diffrakciós hatásokat nem vesszük figyelembe, mivel azok a max. néhány száz vonal/cm-es gyakorlati rácsfrekvenciaspektrumban a rácsdeformáció és a moiré-sáveloszlás közti összefüggéseket nem befolyásolják, csupán a sávok közti fényintenzitás-eloszlást módosítják.

A továbbiakban *alaprácson* (esetenként referenciarácson vagy analizáló rácson) mindig olyan rácsot értünk, amely egyenletes osztású és a kísérlet folyamán változatlan marad. A *tárgyrácsot* egy szerkezeti elemre vagy modellfelületre felhordott, másolt alaprácsként állítjuk elő; ez a terhelés hatására a vizsgált tárggyal együtt deformálódik. Ha a tárgyrácsnak vagy az alaprácsnak optikai vagy mechanikai úton torzított képét *képraszternek* nevezzük,

akkor a tárgyalt jelenség alapelve így fogalmazható meg: a kísérleti alakváltozás-analízisben felhasználható moiré-effektusok alap- és képraszterek, illetve csupán képraszterek mechanikai interferenciája révén keletkeznek.

Az optikai effektus keletkezésének magyarázatául szolgálnak az 1. és 2. ábrán látható tipikus moiré-ábrák. Mindkét ábrán feltüntetett alakzatok ún. *vonlárások*, azaz egyenes, párhuzamos sötét (átlátszatlan) vonalrendszerek világos (fényáteresztő) alapon. Ezek az alakzatok elvileg tetszés szerint tekinthetők a kísérlet során változatlan alaprácsnak, eredeti vagy deformálódott tárgyrácsnak, ill. ezek vetített vagy tükörképének. A világos és sötét vonalak szélessége egymással egyenlő, így mindkét vonlárás ún. 50%-os áteresztőképességű amplitúdórács. Az 1. ábrán két, azonos  $p$  rácsosztású, egymáshoz képest kis  $\alpha$  szöggel hajló vonalsereg képe látható. Két-két szomszédos rács-vonalpár által képezett felületelemek átlói mentén éles moiré-sávok alakulnak ki (magyarázatként l. a 3. ábrát is). Elvileg a moiré-sávok két serege jöhetne létre, látható viszont vonlárások esetén mindig csak az a moiré-ábra lesz a kettő közül, amelyben a moiré-sávok a rövidebb négyszögátlókkal esnek egybe, vagyis az, amelyben a sávok közötti távolság a nagyobb. Más szavakkal kifejezve: az optikai effektus csak akkor érvényesül, ha a rácsvonalak hegyes szögben metsződnek (elnyújtott metszés). Ennek oka abban rejlik, hogy a rácsosztások többnyire kisebbek a szem feloldóképességénél; a második moiré-sáv sorozat elemei pedig közel azonos sűrűségben futnak, mint a vonalas raszter elemei, így ezek a vonalak sem láthatók. A valóságban látható moiré-sávok tehát a felületelemeknek azon diagonálisai mentén futnak, amelyek a rácsvonal-metszéspontoknál kialakuló tompaszöveget osztják. Ha az ábrát olyan távolról nézzük, ahonnan a szem retinája az egyes alkotó vonalakat már nem választja szét, akkor az egymástól

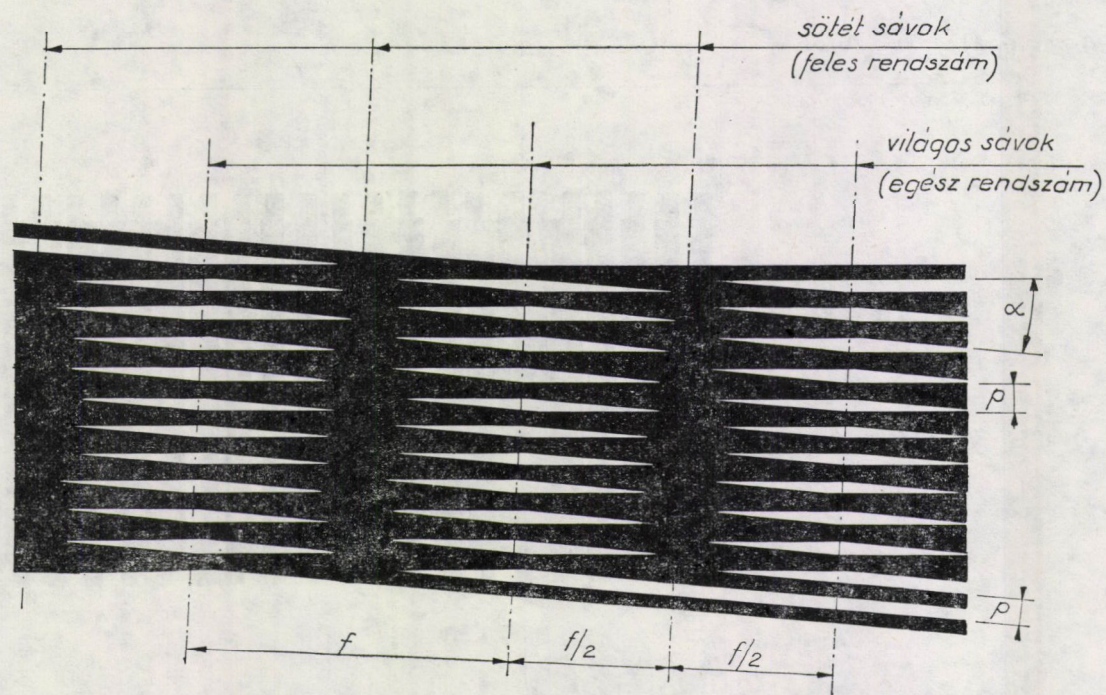
$$f = \frac{P}{2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} \quad (1)$$

távolságban futó világos és sötét moirék összefüggő csíkoknak tűnnek. Az 1–3. ábrákon a vonlárásokat erősen felnagyítottuk annak érdekében, hogy az egyes vonalak részletei is jól láthatók legyenek. A megjelenő moiré-sávok az egyes vonlárás-elemek normálisai által bezárt szöveget felezik. Ha  $\alpha$  szög értéke kicsiny, akkor közelítőleg írható, hogy

$$f = \frac{P}{\alpha} \quad (2)$$

Ha  $\alpha = 0$ , vagyis az azonos frekvenciájú vonlárások párhuzamosak egymással, akkor moirék nem alakulnak ki, s az 50%-os áteresztőképességű

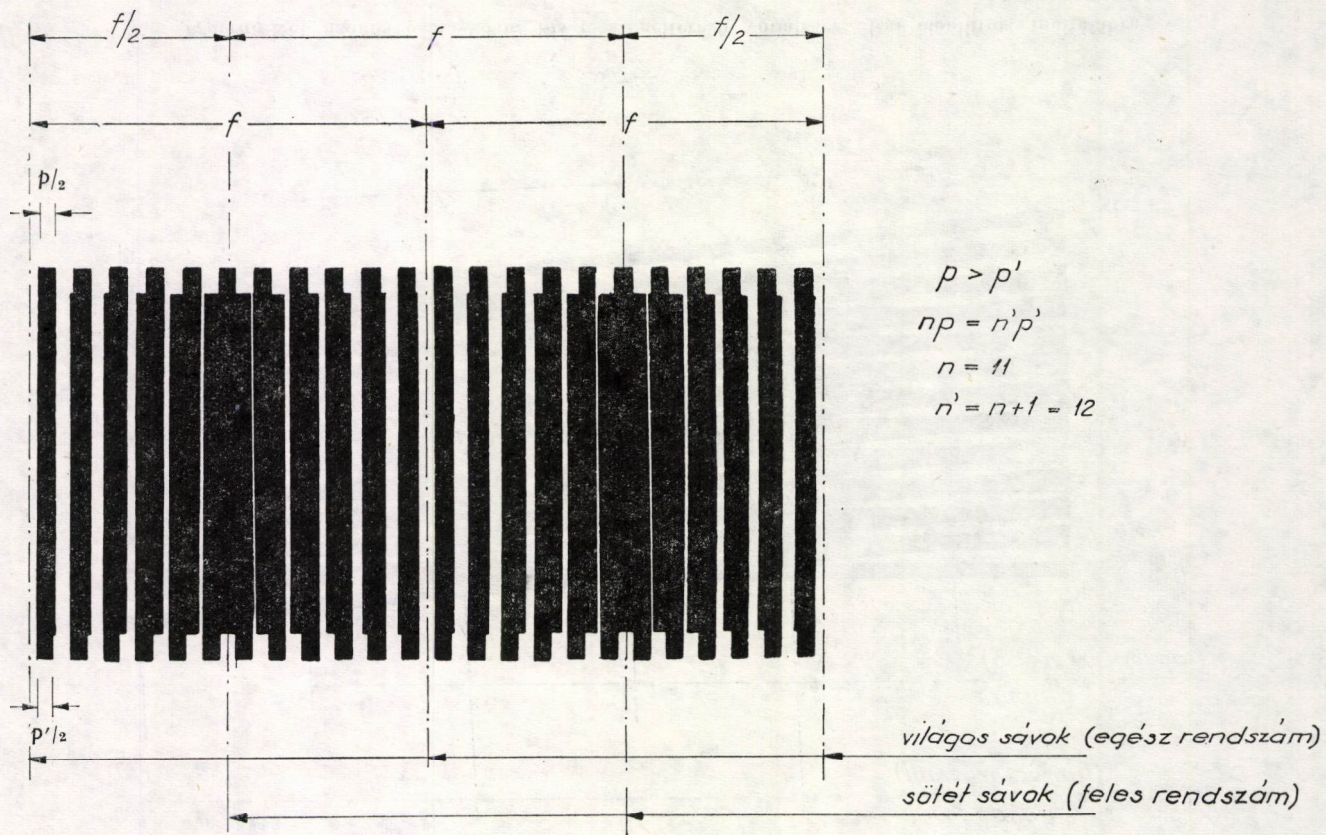




$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{p}{2f} \quad f = \frac{p}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \approx \frac{p}{\alpha}$$

1. ábra. Két azonos osztásközű, kis  $\alpha$  szögeltérésű vonalrác által előállított moiré-ábra





2. ábra. Két, kissé különböző osztásközű, párhuzamos vonalráccsal keltett moiré-ábra

amplitúdórácsok szuperpozíciójával előálló két határeset a teljesen sötét mező, illetve tökéletes fedés esetén a felhasznált rácsok eredeti mintázata.

Általános esetben, ha egyik vagy mindkét rács vonalozása tetszés szerinti alakú görbékből áll, a moiré-sávok kialakulásának folyamata hasonló a közölthöz; ekkor a rombuszok görbevonalú négyszögekké válnak, s ezek rövidebb átlói szolgáltatják a látható sávokat.

A 2. ábrán két, egymással párhuzamos, egymástól kissé különböző osztású ( $p \neq p'$ ) vonalsereg látható. Sötét moirék akkor keletkeznek, ha a sötét alkotó vonalak egymás mellett fekszenek, világosak pedig akkor, ha a vonalak éppen egymást fedik. Ha  $n$  darab  $p$  osztásközű rácsvonal esik  $f$  moiré-sáv távolságra, akkor  $-p > p'$  esetén  $-a$   $p'$  osztásközűből  $(n + 1)$  darab.

### 3.2. Moiré-sávok és fizikai tartalmuk

A 3. ábrán két vonalrács (pl. 50%-os amplitúdórácsok) elemeit sematikusán két számozott vonalsorozat ( $k$  és  $l$ ) helyettesíti. A rácsok (vagy képük) az  $(x, y)$  síkban fekszenek. Jelentse  $R(x, y) = k$  egy olyan rácsvonalsorozat redukált egyenletét, amely a kísérlet során változatlan marad (alap- vagy referenciarács). Megjegyzendő, hogy bár az ábrán e rács egyenes vonalakkal áll, a referenciarács és a deformálatlan tárgyirács párhuzamos elemei elvileg bármilyen magasabb fokú görbesorozatot is képezhetnek. Írjuk fel  $T(x, y) = l$  dimenzió nélküli formában egy deformálódott tárgyirács elemeit ( $k$  és  $l$  paraméterek valós egész számok). Az  $R(x, y)$  és  $T(x, y)$  függvények a két sorozat minden egyes egyenesének ill. görbéjének alakját megadják. Az eredő moiré-ábra szintén egy  $M(x, y) = m$  paraméteres görbesorozatként értelmezhető. Az  $m$ ,  $k$  és  $l$  rendszámok között a vázolt kétrácsos egyszerű rendszerben a következő összefüggés áll fenn:

$$m_{a,s} = k \pm l, \quad (3)$$

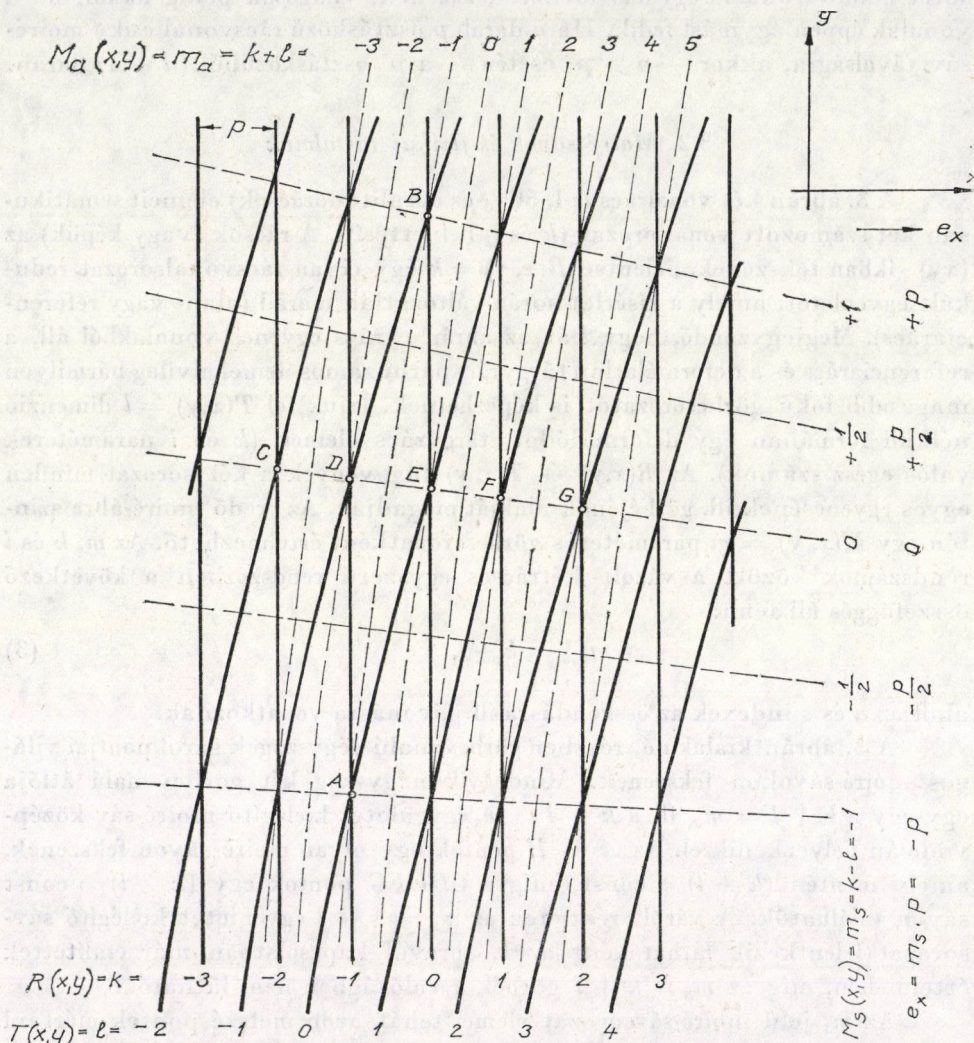
ahol az  $a$  és  $s$  indexek az összeadásra ill. kivonásra vonatkoznak.

A 3. ábrán kialakuló, részben görbevonalú négyszögek sarokpontjai világos moiré-sávokon fekszenek. Mindegyik négyszög két görbevonalú átlója egy-egy a  $k + l = m_a$ , ill. a  $k - l = m_s$  egyenletet kielégítő moiré-sáv középvonalán helyezkedik el. Az  $A$  és  $B$  pontok egy olyan moiré-sávon fekszenek, amely mentén  $(k + l) = \text{const}$ , míg a  $CDEFG$  pontok egy  $(k - l) = \text{const}$  sávon találhatóak. A vázolt részleten az  $m_s = k - l$  egyenletet kielégítő sáv-sorozat jelentkezik láthatóként az 1. ábrával kapcsolatban már említették értelmében, míg az  $m_a = k + l$  görbék a valóságban nem láthatók.

Az  $m_s$  jelű moiré-sáv-sorozat elemei tehát azon metszéspontok mértani helyeként vagy halmazaként definiálhatók, amelyekben a két alkotó rács vonalainak rendszámkülönbsége konstans. Ez azt jelenti, hogy a moiré-sávok a tárgyirács azon pontjainak mértani helyei, amelyek az alap-(referencia)-rács



vonalaik irányára merőlegesen egyenlő távolságban található. Ezek a távolságok az aprács osztásközével, ill. annak egész számú többszöröseivel egyenlők. Ha a deformáció előtti állapotban a tárgyács és a referenciács képe pontosan egybeesett, akkor ezek a távolságok kizárólag a tárgyács különböző pontjainak valamilyen terhelés hatására a referenciácsvonalakra merőleges irányban lejátszódott elmozdulásával egyenlők. Két szomszédos moirésávon felvett bármely két pont között általában egy, a referenciács  $p$  osztásával megegyező nagyságú  $s$  fentemlített irányú relatív eltolódás lépett fel a



3. ábra. Két vonalács interferenciájának sematikus ábrázolása.  $T(x,y)$ —deformálódott tárgyács,  $R(x,y)$ — $p$ -periódusú referenciács. Az egész rendszámú  $m_s$ -moirék világos, a felesek pedig sötét sávokként jelentkeznek a valóságban. Az ábra erősen nagyított, az 50%-os amplitúdórácsok sötét elemeit vonalasan ábrázoltuk

tárgyrácson. Az  $m = 0$  rendszámú sáv mentén eltolódás nem történt, az  $m = \pm 1$  rendszámú sávokhoz  $e = \pm p$  eltolódás rendelhető, általában írható, hogy — ha a referenciarács vonalai  $y$ -irányban futnak —

$$e_x = m \cdot p, \quad (4)$$

a moiré-sávok pedig a szóbanforgó két rács közös síkjában értelmezett,  $s$   $e$  síkra merőleges irányban felmért relatív elmozdulásértékekből képzett felület szintvonalainak is tekinthetők. Az ábrán is feltüntetett feles rendszámú sötét moiré-sávokkal  $e$  felület alakja tovább finomítható.

#### 4. Néhány fontosabb kísérleti kombináció

A moiré-effektus keletkezésével kapcsolatban az előzőkben megadott alapelvekből különböző mérési elvek vezethetők le, amelyek a képraszterek előállítására, vagy az alap- és képraszterek, ill. csupán a képraszterek kombinációja tekintetében térnek el egymástól (4. ábra):

- a) Egymáson fekvő átlátszó tárgy- és alaprács;
- b) Fényvisszaverő felületre felvitt tárgyrács elé helyezett átlátszó alaprács;
- c) Az egyik rács vetített (vagy tükrözött) képe a másik (átlátszó) rács síkjában élesre állítva;
- d) Átlátszó rács és mattfelületen képzett árnyéka;
- e) Két vetített rácskép azonos síkban élesre állítva.

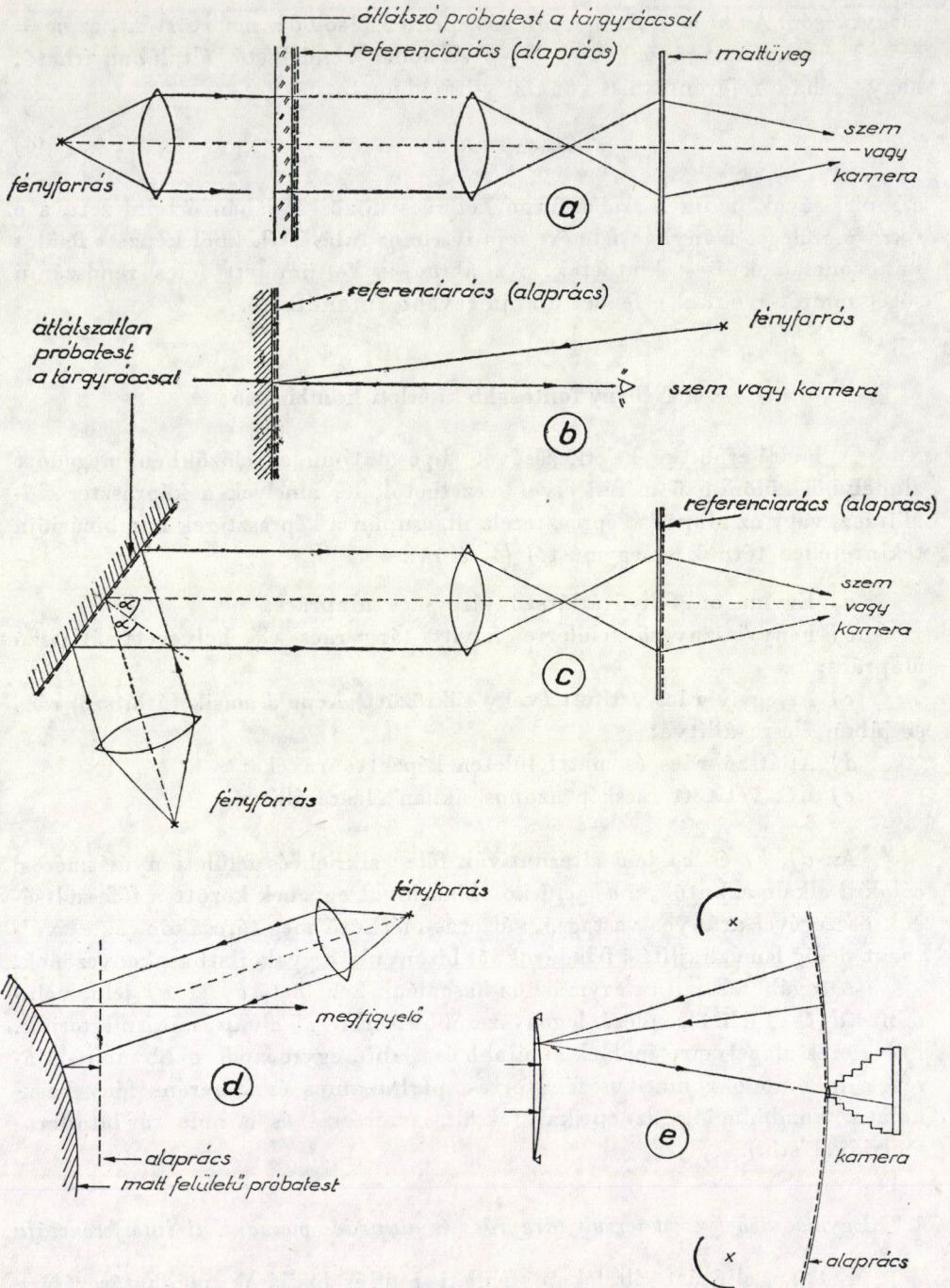
Az *a*), *b*) és *c*) jelű alternatívák főleg síkbeli és felületi nyúlásmérési célokra alkalmazhatók, a *d*) jelű kombinációval egyebek között a főfeszültségek összegével arányos vastagságváltozás mérhető meg tárcsákon, az *e*) változat pedig lemezahajlítási feladatoknál bizonyult a gyakorlatban kedvezőnek.

A továbbiakban az egymáshoz hasonlóan kezelhető *a*) és *b*) jelű, valamint a *d*) és *e*) jelű elrendezés legegyszerűbb kísérleti alkalmazásait ismertetjük. Főleg ezek alapelveire épülnek az újabb és újabb, egyre modernebb moiré-eljárások (pl. monokromatikus fényforrás, párhuzamos és koherens fény használata, kombinációk az optikai feszültségméréssel és a holográf-interferometriával stb.).

##### 4.1. Egymásra helyezett torzult tárgyrács és alaprács mechanikai interferenciája

Ezt az eljárást általában felületi nyúláseloszlások meghatározására használják. A tárgyrács a szerkezeti elemmel vagy a modellel mechanikailag együtt deformálódik. A legegyszerűbb esetben az alaprács a kísérleti test





4. ábra. Néhány fontosabb kísérleti kombináció

vizsgált síkjának deformálatlan állapotát reprezentálja, a torzult tárgyrács pedig a deformált állapotot. Az eljárás kifejthető felületek esetén is alkalmazható. Az alaprács (referenciarács) átlátszó, a tárgyrács a próbatest anyagától függően átlátszó vagy fényvisszaverő.

Egytengelyű feszültségállapot esetén a 2. ábrán látható jellegű kép keletkezik akkor, ha az eredetileg azonos  $p$  osztásközű két vonalrács egyike egyenletesen deformálódott a rácsvonalakra merőleges irányban. Mivel a moiré-sávok ezen az ábrán a rácsvonalazással párhuzamosan futnak, a két rács között relatív elfordulás nem lépett fel. A vizsgált próbatest-felületre felhordott, s a terhelés során azzal tökéletesen együtt deformálódó vonalas tárgyrács  $\varepsilon$  fajlagos nyúlást szenvedett a referenciarács mérőirányában, s így a két szomszédos rácsvonal közepe közötti távolságként értelmezett rácsosztás  $p$ -re változott (összenyomódás esetén  $p' < p$ , megnyúlás esetén  $p' > p$ ). Két szomszédos moiré-sáv közötti  $f$  távolságra a deformálatlan alaprácsnak  $n = f/p$  darab, a deformált tárgyrácsnak pedig  $n' = f/p' = f/p + 1$  darab vonala esik, ha a deformáció összenyomódás volt. Mivel csupán a moiré-ábrára tekintve nem lehet eldönteni, hogy a tárgyrács megnyúlt-e vagy pedig összenyomódott, így általában

$$\frac{f}{p} = \frac{f}{p'} \pm 1 \text{ és } f = \pm \frac{P \cdot P'}{p' - p}. \quad (5)$$

A fajlagos nyúlás Lagrange-féle definíciója szerint

$$\varepsilon = \frac{p' - p}{p},$$

tehát most

$$\varepsilon = \pm \frac{p'}{f} = \pm \frac{P}{f \mp p}; \quad (6)$$

az Euler-féle definíció szerint pedig

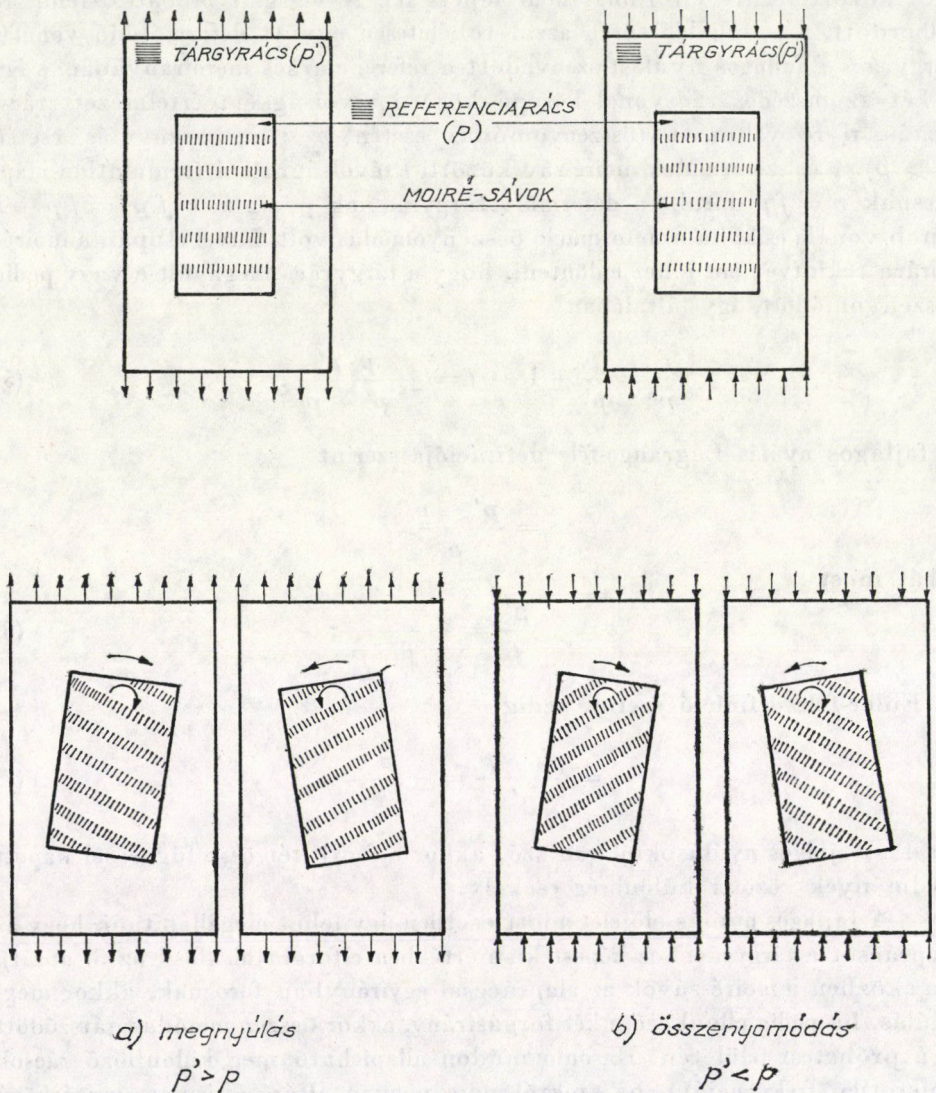
$$\varepsilon_E = \frac{p' - p}{p'} = \pm \frac{P}{f}. \quad (7)$$

Ha kis fajlagos nyúlásokról van szó, akkor a fenti két összefüggéssel kapott eredmények közötti különbség csekély.

A fajlagos nyúlás előjelét adott esetben úgy lehet megállapítani, hogy az alaprácsot a tárgyrácsához képest kismértékben elforgatjuk (lásd az 5. ábrát). Ha eközben a moiré-sávok az alaprácsal egyirányban forognak, akkor megnyúlás, ha pedig ellenkező a két forgásirány, akkor összenyomódás játszódott le a próbatest felületén. Hasonló módon állapítható meg különböző rácsok ismeretlen frekvenciája, ha azoktól nem nagyon eltérő és ismert osztásközű rács rendelkezésre áll.



Fentiekből ismét kitűnik, hogy a moiré-sávok a rácsvonalakra merőleges irányban azonos eltolódású pontok mértani helyei, mivel két szomszédos sáv között az említett irányban végighaladva a deformálódott tárgyrácsnak  $(n + 1)$  vagy  $(n - 1)$  számú, az alaprácsnak pedig  $n$  számú vonalelemét érintjük. A moiré-effektus tehát automatikus grafikus különbségképző folyamatnak is tekinthető, melyben a moiré-sávrendszám a két alkotó rendszer rácsvonalainak indexkülönbségeként definiálható.



5. ábra. A fajlagos nyúlás előjelmének meghatározása a referenciarács forgatásával



Megjegyzendő, hogy a moiré-effektus felnagyítja a mozgásokat, ugyanis ha a két, egymással párhuzamos és egymástól kissé eltérő osztásközű rácsrendszert a rácsvonalakra merőleges irányban egymáshoz képest egy osztással elmozdítjuk, akkor ezalatt a moiré-sávok egy sávköznek megfelelő távolságot sűrűsödnek végig.

#### 4.11. Nyúláskomponensek meghatározása síkbeli feszültség- vagy nyúlásállapotban levő felületen

Kétdimenziós nyúlásmező nyúláskomponenseinek teljes meghatározásához két, célszerűen egymásra merőlegesen futó vonalseregéből álló tárgy-rácsot (egy keresztrácsot) hordanak fel a deformálatlan próbatest felületére. A referenciarács többnyire üveglemezre fényképezett vonalrács, amelynek vonalait a tárgy-rács két főirányával egymás után párhuzamosra állítják. A tárgy-rács követi a próbatest felületi deformációját, az egyes rács párok interferenciája a vonalazásukra merőleges irányban (a *főirányaikban*) fellépő eltolódáskomponens felületmenti eloszlását adja meg; a szögforgások eloszlását pedig — melynek összetevői a test merevtest-szerű elfordulása, a deformálatlan tárgy-rács és a referenciarács szögeltérése, valamint az elemi szögtorzulások —, az egyes vonalrácspárok megfelelő *mellékirányaiban* (a rácsvonalakkal párhuzamos irányban) jelentkező eltolódásokból állapítják meg. A moiré-sávok a rács-hordozók anyagától függően átmenő vagy visszavert fényben figyelhetők meg. Ha a két rács szorosan egymáson fekszik, akkor 40 ÷ 50 vonal/mm-esnél ritkább rácsok alkalmazása esetén semmilyen különleges megvilágító és megfigyelő rendszer sem szükséges a sávok vizsgálatához.

A 6. ábrán egy húzott lyukasztott lemezen a terhelőerőre merőleges irányban fellépő elmozdulások mezeje és egy keresztirányú metszet mentén a fényintenzitás eloszlása látható.

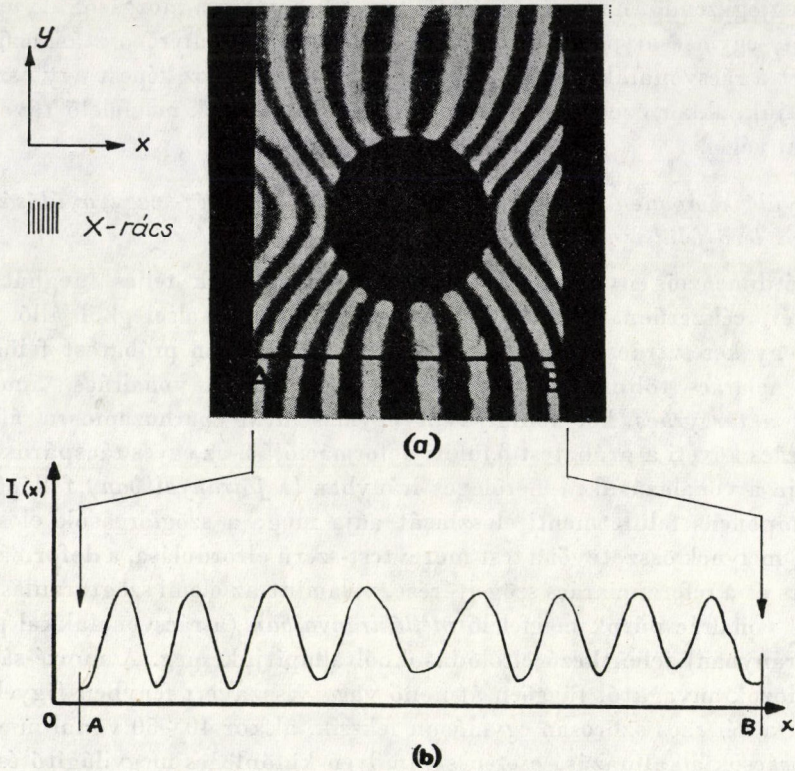
A 7. ábrán egy kis kétdimenziós rugalmasan deformálódó négyzetelemet ( $ABCD$ ) tüntettünk fel az  $(xy)$  síkban. Nevezzük az  $x$ -, ill.  $y$ -irányú eltolódáskomponenseket  $u$ -nak és  $v$ -nek. Ha az elem merevtest-szerű elmozdulását itt figyelmen kívül hagyjuk, vagyis ha csak az elemben lejátszódó relatív elmozdulásokkal foglalkozunk, akkor az  $A$  pont helyzetét deformáció előtt és után is azonosnak tekinthetjük.

Kis nyúlások esetén az  $x$ - és  $y$ -irányú fajlagos nyúlások

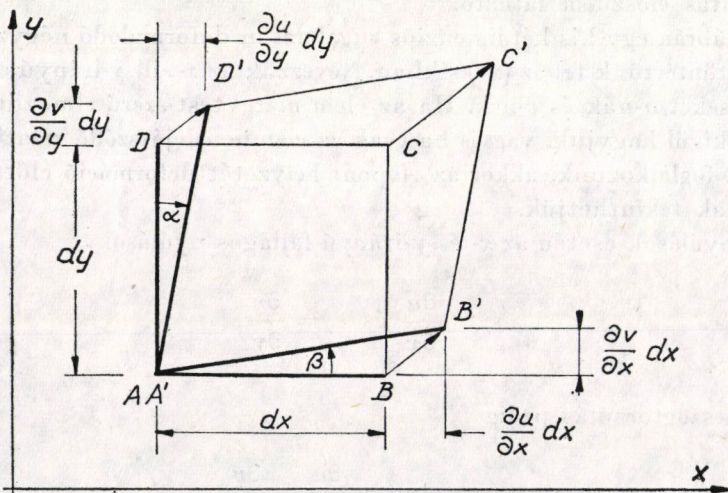
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ és } \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (8)$$

alakban, a szögtorzulás pedig

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$



6. ábra. a) Húzott lyukasztott tárcsa  $u(x,y)$  keresztirányú elmozdulás mezeje; b) Fényintenzitás-eloszlás az  $AB$  metszet mentén (THEOCARIS, [7])



7. ábra. Kétdimenziós négyzetelem kismérvű rugalmas deformációja

alakban írható fel, ahol  $\alpha$  és  $\beta$  előjele akkor pozitív, ha a  $BAD$  kezdeti derékszöget csökkenti. A nagy nyúlások esetén érvényes bonyolultabb összefüggésekkel később foglalkozunk.

Az elem átlagos merevtestszerű elfordulása

$$\Theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (10)$$

így  $\Theta = 0$  esetében

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

tehát

$$\alpha = \beta = \frac{\gamma_{xy}}{2}. \quad (11)$$

Ha a kezdeti állapotban a két rács párhuzamos egymással, továbbá merevtest-szerű relatív szögforgás sem játszódott le közöttük a terhelés hatására, akkor a két rács vonalainak hajlása közötti esetleges eltérés kizárólagos oka a nyírási alakváltozás, az  $(xy)$  síkban értelmezett, az  $x$  és  $y$  tengelyekhez viszonyított  $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$  szögtorzulás.

Ha a tárgyrács vonalai deformáció előtt egy  $xy$  derékszögű koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamosak, és a terhelés során a tárgyrácsnak az  $y$ -tengellyel párhuzamos vonalazású, ún.  $X$ -vonalserege  $x$ -irányban  $u(x)$  eltolódást és az  $y$ -tengelyhez képest  $\alpha$  szögforgást szenved, akkor az  $x$ -irányú teljes alakváltozás a vizsgált mező egy pontjának kis környezetében

$$U(x, y) = u(x) + u_r(y) \quad (12)$$

alakban írható fel, ahol az

$$u_r(y) = \alpha y \quad (13)$$

fiktív eltolódás az  $\alpha$  szögtorzulás-komponens következménye. Tehát

$$U(x, y) = u(x) + \alpha \cdot y. \quad (14)$$

Az  $\varepsilon_x$  fajlagos nyúlás és az  $\alpha$  szögtorzulás-összetevő fenti egyenlet  $x$  és  $y$  szerinti differenciálásával kapható:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x \quad (15)$$

és

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \alpha. \quad (16)$$

Hasonlóképpen, a tárgyrácsnak kezdetben az  $x$ -tengellyel párhuzamos vonalazású, ún.  $Y$ -vonalserege  $y$ -irányban  $v(y)$  eltolódást és  $\beta$  szögtorzulást szenved, vagyis

$$V(x, y) = v(y) + v_r(x), \quad (17)$$

ahol

$$v_r(x) = \beta x, \quad (18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y \quad (19)$$

és

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \beta. \quad (20)$$

A teljes szögtorzulás:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (21)$$

A referenciarácsot úgy kell elhelyezni, hogy vonalai a deformálatlan tárgyrács vonalaival párhuzamosak legyenek. Ha a tárgyrács egymásra merőlegesen futó két vonalrácából áll, akkor a referenciarács két mérőhelyzetének is pontosan  $90^\circ$ -os szöget kell egymással bezárnia. Fentiekől való kis szögeltérések a mérési eredményként kapható  $U(x)$  és  $V(y)$  eloszlásokat, valamint a  $\partial U/\partial x$  és  $\partial V/\partial y$  parciális deriváltak (a normális irányú nyúláskomponensek) értékeit gyakorlatilag nem befolyásolják, azonban az  $U(y)$  és  $V(x)$  eloszlásokat, s így a  $\partial U/\partial y$  és  $\partial V/\partial x$  parciális deriváltak (a szögtorzuláskomponensek) értékeit is jelentős mértékben megváltoztatják.

Ha a referenciarács két mérőhelyzete által bezárt szög nem tökéletesen egyenlő a deformálatlan tárgyrács két vonalrácirányára közötti szöggel, akkor a szögtorzulások értékének pontos meghatározása végett a következő módon lehet eljárni:

1. A nyúlásmező egy olyan pontjában, ahol a szögtorzulás értéke előre ismeretesen 0-val egyenlő (szabad perempontok), kiszámítjuk a

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}$$

értéket a kísérleti adatokból. Ha ez a  $\gamma_{xy} \neq 0$ , akkor ennek oka a referenciarács pontatlan helyzete. A nyírési nyúlásértékek korrekcióját úgy végezzük el, hogy a mérési eredményekből minden pontban levonjuk ezt a  $\gamma_{xy}$  értéket.

2. Ha szimmetrikus alakú és terhelésű próbatestet vizsgálunk, akkor a moiré-ábrák szimmetriája használható fel a referenciarács helyzetének pontos beállítására szolgáló indikátorként.

3. Ha a próbatest alakja vagy terhelési viszonyai nem szimmetrikusak, akkor a szögtorzulások meghatározása érdekében háromtengelyű tárgyráccsal, s a vonalas referenciárács három egymás utáni szuperpozíciójával tanácsos dolgozni. A harmadik vonalrácsot a keresztrács főirányaihoz képest  $45^\circ$ -kal elforgatva vesszük fel a próbatestre. Az  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ , és  $\varepsilon_w$  normál komponensek ismeretében a derékszögű nyúlás-rozetta összefüggései alapján:

$$\gamma_{xy} = 2 \varepsilon_w - (\varepsilon_x + \varepsilon_y). \quad (22)$$

Mint hogy a moiré-sávok azon pontok mértani helyei, amelyek a referenciárácsok főirányaiiban egyenlő relatív eltolódást szenvedtek, nyilvánvaló, hogy a moiré-sávok a  $z = m(x, y)$  függvénynek az  $(xy)$  síkon ábrázolt rétegvonalas képét szolgáltatják, vagyis a háromdimenziós  $z = m(x, y)$  felület és a  $z = mp$  egyenletű metszősíkok metszésvonalait, ahol az  $m$  sávrendszám valós egész;  $p$  pedig a referenciárács osztásköze. A  $z = m(x, y)$  felületet az  $(xy)$  alapsíkra merőleges és a referenciárács fő-, ill. mellékirányával párhuzamos síkokkal elmeteszve, s e metszeteket az alapsíkba forgatva megkapjuk e két kitüntetett irány mentén az eltolódásváltozások görbéit. Ha a  $z = m(x, y)$  felületet  $y$ -tengellyel párhuzamos vonalazású, ún.  $X$ -ráccsal állítottuk elő, akkor az  $x$ -irányú elmozdulást jellemző  $u(x, y)$  mező egy-egy  $u(x)$  és  $u(y)$  görbéjét kapjuk meg, míg  $Y$ -rácsokkal előállított  $z = m(x, y)$  felületből ily módon az  $y$ -irányú  $v(x, y)$  eltolódások  $x$  és  $y$  tengelyek menti  $v(x)$  és  $v(y)$  eloszlása adódik.

Kétdimenziós mezők nyúláskomponenseinek meghatározásához az  $x$ - és  $y$ -irányú eltolódásderiváltak ismerete szükséges (lásd a (15), (19) és (21) jelű összefüggéseket). Ha az  $X$ -rácsokkal előállított moiré-sávok rendszámait  $m$ -mel, az  $Y$ -rácsok által keltetteket pedig  $n$ -nel jelöljük, akkor (4) alapján

$$u = p \cdot m \quad (23)$$

és

$$v = p \cdot n, \quad (24)$$

a nyúláskomponensek pedig így írhatók fel:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = p \frac{\partial m}{\partial x}, \quad (25)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = p \frac{\partial n}{\partial y}, \quad (26)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = p \left( \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial x} \right). \quad (27)$$

Az  $u(x)$ ,  $u(y)$ ,  $v(x)$  és  $v(y)$ , vagy az azokkal analóg  $m(x)$ ,  $m(y)$ ,  $n(x)$  és  $n(y)$  görbesorozatok grafikus vagy mechanikus differenciálásával a mező összes pontjában meghatározhatók a

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y},$$

illetve a

$$\frac{\partial m}{\partial x}, \frac{\partial m}{\partial y}, \frac{\partial n}{\partial x}, \frac{\partial n}{\partial y}$$

parciális deriváltak, és így az  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  és  $\gamma_{xy}$  nyúláskomponensek is.

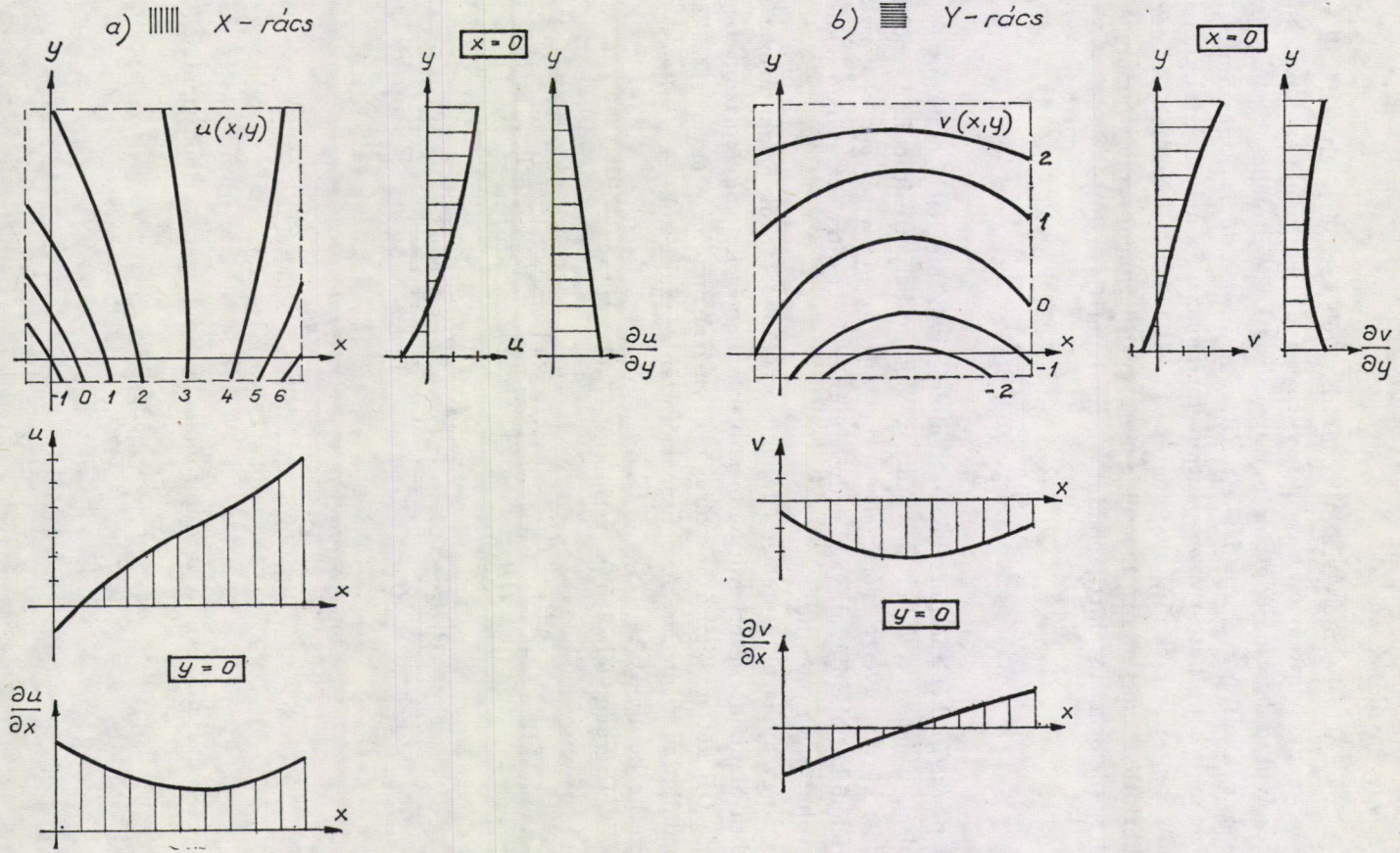
A 8. ábrán egy  $u(x, y)$  és egy  $v(x, y)$  komponensekből álló eltolódásmező egy-egy  $x$ - és  $y$ -tengely menti metszetében vázoltuk a kiértékelés menetét.

A nyúlásmező gépi számítással történő teljes kiértékelése végett gyakran a tárgyráccsal párhuzamos vonalazású, viszonylag durva (pl.  $5 \times 5$  mm-es osztású) négyzethálót másolnak a próbatest vizsgált felületére, s e háló csomópontjaiban mérik meg az elmozduláskomponensek értékeit, valamint számítják ki az  $u(x, y)$  és  $v(x, y)$  elmozdulásfelületek parciális deriváltjait, a nyúláskomponenseket, szükség szerint a főnyúlásokat, a főirányok helyzetét stb.

Ha a szomszédos moiré-sávok között nagy a távolság, akkor e deriváltak pontos meghatározása igen nehézé válik. A megfelelő pontosságú nyúlásméréshez sűrű sáveloszlású moiré-ábrákra van szükségünk, valamint arra, hogy ezek a sávok lehetőleg  $90^\circ$ -oshoz közeli nagy szögekben messék azokat a vonalakat, amelyek mentén a nyúláskomponenseket meg akarjuk határozni. Ezek a követelmények azonos osztású referencia- és tárgyrácsokkal akkor teljesíthetők, ha a mért nyúlások nagyok, tehát az azonos osztású rácsokkal dolgozó moiré-módszer nagy (rugalmas vagy képlékeny) deformációk mérése esetén szolgáltat megbízható eredményeket. Némi túlzással azt mondhatjuk, hogy felületi nyúlásfeladatok esetén a moiré-módszer alkalmazási területe ott kezdődik, ahol az egyéb klasszikus analízis módszerek (optikai feszültségvizsgálat, elektromos nyúlásmérő eljárások stb.) területe végződik.

A módszer érzékenysége az alkalmazott rácsok frekvenciájának növelésével fokozható. A szokásos egyszerű gyakorlati körülmények között a tárgyrácsfrekvencia felső határa kb. 40 vonal/mm. A kísérleti nyúlásanalízisben általában használt amplitúdórácsoknál sokkal nagyobb frekvenciájú diffrakciós rácsok alkalmazása e területen ugyanis már sok nehézséggel jár (a próbatestre való rácsátvitel problémái, megfelelő képkontraszt csak speciális körülmények között érhető el, magas ár stb.). A mérés érzékenysége a próbatest lineáris méreteinek növelésével szintén fokozható; a moiré-sávok ugyanis az azonos eltolódású, s nem az azonos nyúlású pontokat összekötő görbék.





8. ábra. Kétdimenziós nyúlásmező kiértékelési elve

Műszaki Tudomány 49, 1975



## 4.12. Nagy nyúlások mérése

Az az alapelv, mely szerint a moiré-sávok az  $u$  és  $v$  eltolódások szintvonalai, nagy deformációk esetén is érvényes. Megjegyzendő azonban, hogy a moiré-sávok a deformálódott próbatestre vonatkozó eltolódások szintvonalai. Más szavakkal: egy  $\Delta u = mp$  eltolódásnak megfelelő  $m$  rendszámú sáv a deformálódott próbatest azon pontjait tartalmazza, amelyek kezdeti helyzetükhöz képest, a rács főiránya mentén  $\Delta u$  eltolódást szenvedtek. A mérnöki gyakorlatban megszokott Lagrange-féle nyúlásdefiníció szerint, amely a test kezdeti (deformáció előtti) alakját veszi alapul (lásd (6)):

$$\varepsilon_i^L = \frac{P_i}{f_i \mp p_i},$$

ahol  $p_i$  és  $f_i$  a két rácspárral keltett moiré-sávok megfelelő osztásait és sáv-távolságait jelentik,  $i$  helyébe pedig  $x$  vagy  $y$  helyettesíthető. A próbatest kezdeti körülményei a kiértékelés során vagy az  $u(x, y)$  és  $v(x, y)$  eloszlások megfelelő korrekciójával, vagy pedig a már említett durva tárgyháló segítségével vehetők figyelembe.

Nagy nyúlások esetében a fajlagos nyúlásösszetevők meghatározására a 9. ábra alapján levezethető pontosabb összefüggéseket alkalmazzuk. Legyen  $OA$  és  $OB$  két egységnyi hosszúságú, egymásra merőleges egyenes szakasz a deformálatlan felületen. A deformáció után e szakaszok az  $O_1A_1$  és  $O_1B_1$  helyzetbe kerülnek.

A Lagrange-féle leírás szerint:

$$\varepsilon_x = \frac{O_1B_1 - OB}{OB} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} - 1, \quad (28)$$

$$\varepsilon_y = \frac{O_1A_1 - OA}{OA} = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - 1, \quad (29)$$

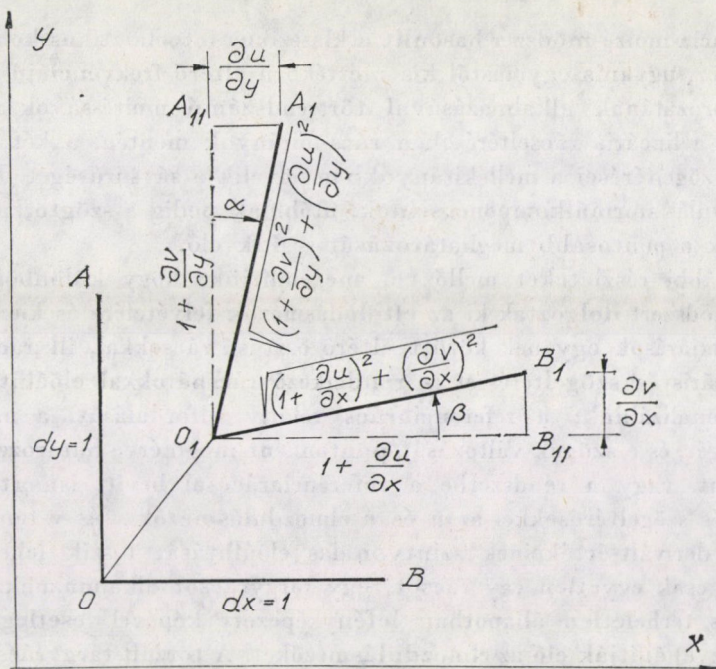
$$\gamma_{xy} = \arcsin \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}}{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)}. \quad (30)$$

A magasabb rendű infinitezimális mennyiségeket elhanyagolva:

$$\varepsilon_x = \left[1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x}\right]^{1/2} - 1, \quad (31)$$

$$\varepsilon_y = \left[1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y}\right]^{1/2} - 1, \quad (32)$$





9. ábra. Két merőleges vonalszakasz deformációja

$$\gamma_{xy} = \arcsin \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)}. \quad (33)$$

#### 4.13. Differencia-moiré módszerek

Az azonos osztásközű tárgy- és referenciarácsokkal dolgozó moiré-módszerekkel csak viszonylag nagy nyúlások, s így sűrű sáveloszlás esetén érhető el megfelelő megbízhatóság. Kis nyúlások esetén csupán ritka és gyakran szabálytalan sáveloszláshoz jutunk, mely csak nagyon pontatlanul értékelhető ki.

A lineáris differencia-módszer, amely a tárgyrács eredeti osztásától eltérő osztású referenciarácsok sorozatának használatán alapszik, alkalmazásának célja optimális sáv-sűrűségű és sáv-szélességű moiré-ábrák előállítása. A csökkentett osztásközű vonalas referenciarácsok megnyúlási alakváltozást szenvedő mezők mérésére alkalmasak; míg a megnövelt osztásközűek összenyomódó mezők esetén használandók. A rácseltérésekkel fiktív kezdeti deformációt viszünk a rendszerbe, s így sűrű, jól definiált moiré-ábrákat kapunk, jóllehet a próbatest tényleges deformációjának következtében kialakuló ábra csupán kevés és bizonytalan sávot tartalmazna. Így az iránymenti eltolódás-görbék könnyen megrajzolhatók, felvehetők. A bevitt fiktív eltolódásoknak egy, az egész mezőben konstans értékű fiktív eredő nyúlás felel meg, mely az összetett eltolódásmező alapján meghatározott nyúlásértékekből levonandó.

A differencia-moiré-módszer hasonlít a klasszikus fotoelasztikus kompenzációs módszerhez, ugyanis egymástól kis mértékben eltérő frekvenciájú referenciárácsok sorozatának alkalmazásával törtrendszámú moiré-sávok nyerhetők.

Míg a lineáris rácseltérések a rács-főirányok mentén, a két rács főirányainak szögeltérései a mellékirányokban növelik a sávsűrűséget. Ezért előbbiek a nyúlás normálkomponenseinek, utóbbiak pedig a szögtorzuláskomponenseknek a pontosabb meghatározását segítik elő.

További részleteket mellőzve, megemlítjük, hogy különböző szerzők számos módszert dolgoztak ki az eltolódásmezők felvételére és kiértékelésére. Ezek az eljárások egyebek között eltérő osztású rácsokkal, ill. rácsképekkel, vagy lineáris és szögeltéréssel is rendelkező rács párokkal előállított moiré-ábrákat analizálnak; a referenciárács relatív elfordulását, a moiré-sávok hajlásszögét, és e szögek változását pontonként megmérve határozzák meg a nyúlásokat, vagy a rendszerbe a referenciáráccsal bevitt ismert nagyságú lineáris- és szögeltérésekkel az  $u$  és  $v$  elmozdulásmezők  $x$  és  $y$  tengelyirányú parciális derivált-értékeinek szintvonalas előállítását teszik lehetővé. Más eljárások csak egyetlen egy rácsot, egy tárgyrácsot alkalmaznak, és annak terhelt és terheletlen állapotban lefényképezett képével (esetleg egymásra fényképezve) állítják elő az elmozdulásmezőket. A torzult tárgyrácsról készült fényképet, vagy a tárgy- és referenciáráccsal előállított moiré-ábrát saját kópiáján a kívánt irányban bizonyos mértékben eltolva, sűrű rácsok és moiré-képek esetén mechanikus úton megfelelő pontossággal megkaphatjuk az elmozduláskomponensek iránymenti derivált értékeinek szintvonalas képét.

#### 4.14. A moiré-módszer érzékenysége, méréshatárok, az eredmények hibája

E módszer érzékenységét a moiré-sávsűrűség, azaz az egység hosszra jutó moiré-sávok száma jellemzi. Ez a szám a fajlagos nyúlásokkal egyenesen, a rácsosztással pedig fordítva arányos. Kis eltolódások és nyúlások mérése megfelelően finom rácsok használatát tételezi fel. A véges nagyságú deformációk analízisének elméleti határait akkor érjük el, ha a moiré-sávok sűrűsége megegyezik a rasztervonalakéval. Tiszta húzás, ill. nyomás esetében a fajlagos határnyúlások

$$\varepsilon_{L_f} = 1, \text{ illetve } \varepsilon_{L_a} = -0,5,$$

ahol az  $L$  index a nyúlás Lagrange-féle definíciójára utal. A gyakorlati méréshatárok fentieknél jóval szorosabbak.

A fajlagos nyúlás, rácsosztás és sáv távolság közti (7) jelű összefüggést differenciálva és rendezve:

$$\frac{df}{f} = -\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (34)$$

Ez azt jelenti, hogy hibátlan tárgy- és referenciárács alkalmazása és a két rács

relatív helyzetének pontos beállítása esetében az eredményül kapott fajlagos nyúlás hibája megegyezik a sávtávolságmérés hibájával. Egy konkrét gyakorlati esetet tekintve: ha pl.  $p = 1/400$  cm,  $\varepsilon = 5\%$ , tehát  $f = p/\varepsilon = 0,5$  cm, és a sávtávolságot 0,25 mm-es, tehát 5%-os pontossággal tudjuk megmérni, akkor a 0,5 cm-es sávtávolság mentén értelmezett átlagnyúlást szolgáltató  $\varepsilon$  mérési eredmény hibája:

$$d\varepsilon = \pm 5 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-2} = \pm 2,5 \cdot 10^{-4} = \pm 0,25\%.$$

Megjegyzendő, hogy az ún. differencia-módszerek érzékenysége és eredményeinek hibája is a fentivel azonos; azok elvileg nem növelik a pontosságot sem, csupán gyakorlatilag könnyítik meg az analízist.

#### 4.2. Alaprács és mattfelületre vetített képének interferenciája

Ennél az eljárásnál a tárgyfelület, a próbatest vizsgált felülete az alaprászter ernyőjeként működik. Vetítsünk egy üveglemezre felhordott alaprászter egy, az alaprászter felületi normálisával meghatározott szöget bezáró párhuzamos fénynyaláb segítségével egy diffúz visszaverő tárgyfelületre. A rácsot és képét az üveglemezre merőlegesen szemlélve, a két alakzat interferenciája révén olyan moiré-csíkok keletkeznek, amelyek a tárgyfelület topográfiai szerkezetét ábrázolják. A moiré-ábra és a felületi alak közötti kapcsolatot vonalas alaprács alkalmazása esetén ismertetjük. Az  $y$ -irányú vonalazású,  $p$  osztásközű alaprács helyezkedjék el egy térbeli derékszögű koordinátarendszer  $(xy)$  síkjában (10. ábra). Az  $(xz)$  síkkal párhuzamos fénynyaláb iránya kis  $\alpha$  szöget zár be a  $z$ -tengellyel. Az alaprászter tetszés szerinti  $B$  pontját az  $s$  fénysugár a tárgyfelület  $B'$  pontjára vetíti.  $B'$  pont  $B$ -hez képest  $x$ -irányban

$$u_B = z_B \tan \alpha \quad (35)$$

mértékben tolódott el. A keletkező moiré-sávok a korábban említettek alapján az alaprászterre merőleges irányban azonos eltolódású vetületpontok mértani helyei, tehát  $u = \text{const}$  görbék. Mivel  $\alpha$  szög értéke is állandó, a sávok most  $z = \text{const}$  vonalakat ábrázolnak, azaz a tárgyfelület szintvonalait.

Két szomszédos moiré-sáv között az alaprács főirányában az  $\overline{A'D}$  szakaszon  $n$  darab, míg az  $\overline{A'C}$  szakaszon  $(n - 1)$  darab rácsosztás található, így  $\overline{CD} = p$ . Két sáv között a felület magassága (az alaprácstól való távolsága)

$$\Delta z = \frac{p}{\tan \alpha} \quad (36)$$

értékkel változott. Ha az ábrát az alaprács felületi normálisával az  $(xz)$  síkban  $\varrho$  szöget bezáró irányban szemléljük, akkor a







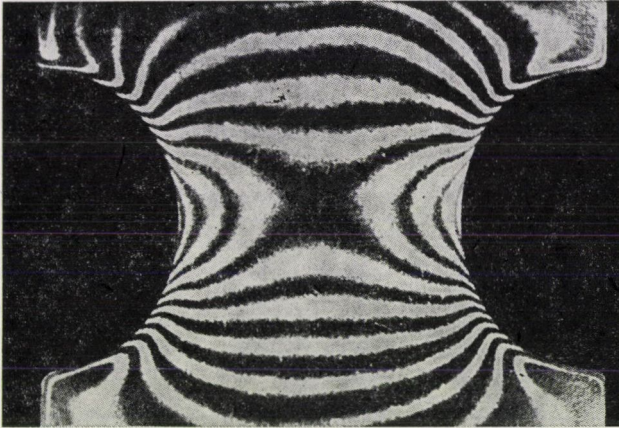
ahol

$$k = - \frac{\mu d \tan \alpha}{2pE}$$

hitelesítési állandó, amely pl. egy párhuzamosan végrehajtott feszültségoptikai kísérlet során a terheletlen peremen kimért izokromátarendszámból határozható meg. Az alaprászter  $\beta$  szöggel történő síkbeli forgatásával a tárgyfelület különböző pontjaiban egész rendszámú izopachokat állíthatunk elő. Ilyen kompenzáció esetén az

$$m = k \cos \beta (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (40)$$

összefüggés érvényes. A feszültségoptikai úton nyert izokromátamező ismerete esetén a főfeszültségek egyszerű módon szétválaszthatók.



11. ábra. Izopach-eloszlás szimmetrikus bemetszett húzott próbatestenen (THEOCARIS, [7]).  
 $m = k(\sigma_1 + \sigma_2)$

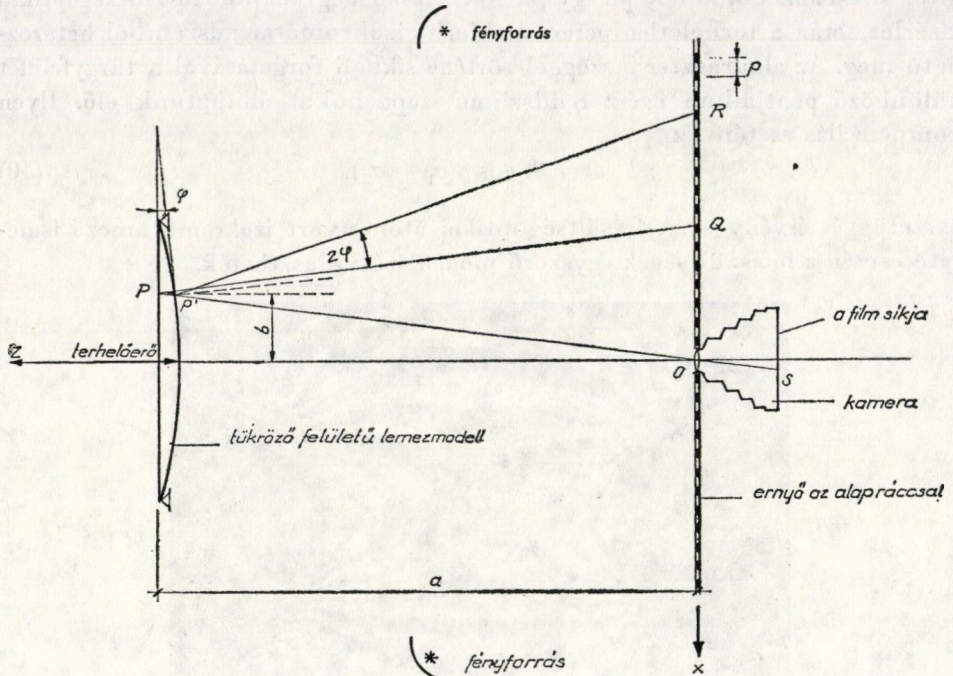
A 11. ábra egy szimmetrikus bemetszett húzott próbatestenen meghatározott izopachok eloszlását mutatja.

#### 4.3. Alaprács reflexiók képeinek interferenciája

Ez a kísérleti eljárás kétdimenziós hajlított modellek (lemezek) szögforgáseloszlásának szintvonalas képét szolgáltatja. A Ligtensberg [6]-féle kísérleti elrendezés vázlata a 12. ábrán látható. Egy térbeli derékszögű koordinátarendszer  $(xy)$  síkjában fekvő,  $y$ -irányú vonalaktól álló alaprácscsal ( $X$ -rács) ellátott ernyővel szemben a  $z = a = \text{const}$  síkban helyezkedik el egy tükröző felületű lemezmodell. A fényképező kamera objektívjét az ernyő közepén helyezik el, a kamera optikai tengelye egybeesik a  $z$ -tengellyel. A kamerával — egy filmre kétszer exponálva — lefényképezik a szórt fényvel



megvilágított ernyőnek a terheletlen, majd a terhelt modellfelületről visszautkröződő képét. A két tükrözőtt vonalsereg interferenciája a filmen moiré-ábrát eredményez, melynek sávjai mentén az alaprács főirányával párhuzamos síkú lemezszőgforgások állandók. Az ernyő  $Q$  pontja a terheletlen modell



12. ábra. A Ligtenberg-féle elrendezés vázlata

$P$  pontján keresztül a film  $S$  pontjaként képződik le. Terhelés után az ernyő  $R$  pontja a deformálódott felület  $P'$  pontjában visszautkröződve jut a filmsík  $S$  pontjába. Mivel a  $P$  pont  $z$ -tengely irányú  $w$  lehajlása és síkbeli eltolódása a modell és az ernyő közötti távolsághoz képest igen kicsiny és így  $P$  pont  $P'$  ponttal gyakorlatilag egybeesőnek tekinthető, ezért a  $\overline{QR}$  távolság szoros kapcsolatban áll a modell terhelés okozta szögforgásával. Ha  $S$  pont moiré-sávon fekszik, akkor e sáv pontjaihoz az alaprács síkjában  $\overline{QR} = mp$  konstans nagyságú,  $x$ -irányú távolság, a modellen pedig konstans  $\varphi$  szögforgás rendelhető ( $m$  egész szám,  $p$  az alaprács osztásköze). Az ernyő rácsvonalait az  $x$ -, majd az  $y$ -tengelyre merőlegesen beállítva a  $\varphi = \partial w / \partial x$  és a  $\psi = \partial w / \partial y$  felületi szögforgáseloszlásokat kapjuk meg egy-egy  $m(x, y)$ , ill.  $n(x, y)$  moiré-sáv-sereg formájában.

Ha az alaprácsot hordozó ernyő sík felületű, akkor

$$\overline{PQ} = \overline{PO} = \sqrt{a^2 + b^2} = a \left( 1 + \frac{b^2}{a^2} \right)^{1/2}. \quad (41)$$



Mivel  $\overline{QR}$  kicsiny  $\overline{PQ}$ -hoz képest,  $\overline{PQ} = \overline{PR}$  közelítés alkalmazható:

$$\overline{QR} = \overline{PQ} \cdot 2\varphi = 2a\varphi \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}. \quad (42)$$

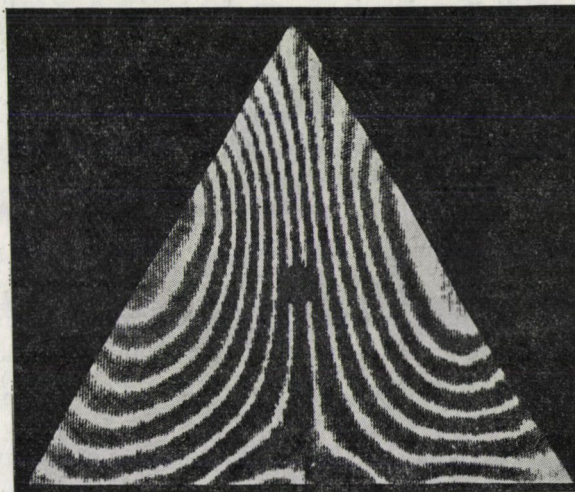
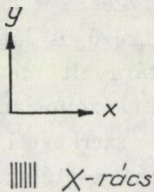
Ha az alaprácsot  $r = 3,5a$  sugarú henger felületére hordják fel, akkor mindazon lemezpontokban, amelyekben  $b/a < 0,4$ , a  $\overline{QR} = 2a\varphi$  összefüggés igen jól közelítő eredményt ad. Két szomszédos sávhoz  $\overline{QR} = p$  alaprács-távolság és  $\varphi = \overline{QR}/2a$  modellszögforgás tartozik, tehát a moiré-sávok az azonos szögforgású görbéket  $\Delta\varphi = p/2a$  intervallumokkal ábrázolják. A 13. ábrán egy lemezmodell kísérleti úton felvett parciális szögforgás-eloszlása látható.

Az  $y$ - és  $x$ -normálisú síkokban lejátszódó szögforgások a sávrendszámmal így írhatók fel:

$$\varphi = \frac{p}{2a} m \quad \text{és} \quad \varphi = \frac{p}{2a} n. \quad (43)$$

Kis lehajlások feltételezése esetében a lehajlások a szögforgások integrálásával, a görbületek és nyomatékok pedig azok differenciálásával nyerhetők. A differenciálás grafikusan vagy mechanikusan történhetik. Ez utóbbi esetben a moiréábrát a saját kópiáján kismértékben a megfelelő irányban eltolva ún. „másodrendű moiré”-hoz jutunk, amelynek sávjai az eredeti ábra derivált értékeinek szintvonalai.

Izotrop lemez esetén az  $x$ - és  $y$ -irányú hajlító- és csavarónyomatékok el-



13. ábra. Parciális szögforgás-eloszlás egy egyenletesen terhelt, peremei mentén megtámasztott egyenlőoldalú háromszöglemezen, egyik szimmetriatengelyére merőleges irányban (LIGTENBERG, [6]).

oszlása a mérési eredmények [ $m(x, y)$  és  $n(x, y)$  sáveloszlás] alapján a következő módon számítható ki:

$$m_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = c \left( \frac{\partial m}{\partial x} + \mu \frac{\partial n}{\partial y} \right), \quad (44)$$

$$m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = c \left( \frac{\partial n}{\partial y} + \mu \frac{\partial m}{\partial x} \right), \quad (45)$$

$$m_{xy} = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = c(1 - \mu) \frac{\partial m}{\partial y} = c(1 - \mu) \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (46)$$

ahol

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad c = -\frac{Eh^3 p}{24(1 - \mu^2)a},$$

és  $h$  = a lemez vastagsága.

A különböző moiré-módszerek még sokáig sorolhatók lennének. Célunk mindössze néhány egyszerű mérési elv bemutatása és azok közös alapelvének ismertetése volt. A kísérleti berendezések és a különböző technikai kérdések részletes ismertetésére és tárgyalására nem térünk ki.

## 5. Összefoglalás, a módszer értékelése

A moiré-módszerek egyik fő előnye, hogy közvetlenül — közvetítő fizikai tulajdonságok megmérése nélkül — képesek meghatározni a különböző alakváltozás-komponensek eloszlását — az eljárás típusától függően — a különböző rácsok, illetve rácsképek interferenciája során keletkező és láthatóvá váló, csupán geometriai kapcsolatok alapján. Mivel a tárgyalt módszerek többnyire a tényleges szerkezeti elemekben vagy a szerkezettel azonos anyagból készített modellekben keletkező deformációkat mérik, így a szerkezeti anyagtól eltérő modellanyaggal dolgozó egyéb eljárások alkalmazása esetében betartandó hasonlósági feltételekkel ezeknél a módszereknél nem kell foglalkozni.

A moiré-eljárások további előnye az, hogy az alkalmazott módszer a meghatározandó különböző alakváltozáskomponensek nagyságának és jellegének megfelelően variálható. Semmilyen fix mérési alaphosszról vagy mérőelem-elhelyezésről sincs itt szó, az alakváltozáskomponensek a ráccsal lefedett terület bármely pontjában viszonylag nagy határok között tetszés szerint felvehető mérési alaphossz mentén meghatározhatók, bár ez az alaphossz a megméréendő alakváltozás nagyságán kívül a rácsok kezdeti vonalfrekvenciájának is függvénye. Egy moiré-ábra ezért úgy tekinthető, mint egy sereg viszonylag kis, változó mérőhosszú, egymás mellé helyezett mérőelem, amelyek nagy mezők összes pontjában egyidejűleg szolgáltatják az alakváltozáskomponensek értékeit.



## IRODALOM

1. FOUCAULT, L.: Mémoire sur la construction des télescopes en verre argenté; *Annls. Obs.* Paris, 5. No. 197, (1859)
2. Lord RAYLEIGH: On the Manufacture and Theory of Diffraction Gratings. *Phil. Mag.* 47, No. 310., 311. (1874)
3. RICHI, A.: Sui fenomeni che si producono colla sovrapposizione di due reticoli e sopra alcune lora applicazioni, I—II. *Nuovo Cim.*, 21—22 (1887—88) ‡
4. TOLLENAAR, D.: Moiré interferentieverschijnselen bij rasterdruk. Institut voor Graphische Techniek Amsterdam 1945
5. WELLER, R.—SHEPARD, B. M.: Displacement Measurement by Mechanical Interferometry, *Proc. Soc. Exp. Stress Anal.*, 6 (1948)
6. LICHTENBERG, F. K.: The moiré method: A New Experimental Method for the Determination of Moments in Small Slab Models; *Proc. Soc. Exp. Stress Anal.*, 12 (1954)
7. THEOCARIS, P. S.: Moiré Fringes in Strain Analysis. Pergamon Press, 1969
8. HOLISTER, G. S.: Experimental Stress Analysis. Principles and Methods. Cambridge Univ. Press, 1967
9. ULLMANN, K.: Anwendung des Moiréeffektes zur experimentellen Dehnungsanalyse. Dissertation, TU Karl-Marx-Stadt, 1968
10. SZITTNER, A.: Kísérleti feszültséganalízis II. Statikai modellkísérletek. Kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest 1965
11. KAPOLYI L.: A bányászati üregek körüli mozgásmező modellezhetősége "Moiré"-effektus segítségével. *Bányászat*, 102 (1969)
12. THAMM-LUDVIG-HUSZÁR-SZÁNTÓ: Dehnungsmessverfahren. Akadémiai Kiadó, Budapest 1971

**Some Simple Applications of the Moiré-method in the Experimental Analysis of Deformations and Stresses.** In the field of experimental procedures applied in connection with the analysis of stresses and strains generated in the structural parts or in models, the moiré-methods are rapidly developing. These methods determine — without measuring intermediary physical properties — the different deformation components, mostly by making use of very simple measuring principles, in each of the points of grid-covered area, depending on the varieties of the testing sets. Firstly, the moiré-effect and the process of formation of the moiré-fringes are treated, then, some significant test combinations related to the disc and plate problems are also dealt with.

**Einige einfache Anwendungen des Moiré-Verfahrens in der Versuchsanalyse der Verformungen und Spannungen.** Im Bereich der Versuchsverfahren, die in der Analyse der Konstruktionselementen oder Modellen auftretenden Verformungen und Spannungen Anwendung finden, weisen die Moiré-Methoden eine rasche Entwicklung auf. Mit diesen Methoden können — ohne die Messung von vermittelnden physischen Eigenschaften — meistens unter Anwendung eines sehr einfachen Meßprinzips, die verschiedenen Verformungskomponenten in jedem Punkte einer mit Gitter bedeckten Fläche, in Abhängigkeit von den Varianten der Versuchsanordnung, bestimmt werden. Zunächst werden der Moiré-Effekt und das Zustandekommen der Moiré-Streifen und danach einige mit den Scheiben- und Plattenproblemen zusammenhängende wichtigere Versuchskombinationen behandelt.