ÜBER POSITIVE ZYGMUNDSCHE APPROXIMATIONSFOLGEN

von

GÉZA FREUD

Es sei $f(x)$ eine stetige, nach 2π periodische Funktion. Als Stetigkeitsmodul zweiter Ordnung von f definieren wir den Ausdruck

$$\omega_2(f;\delta) = \operatorname*{Max}_{\substack{|h|\leq\delta \\ x\in[0,2\pi)}} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)|. \tag{1}$$

Nach einem bekannten Satze der Approximationstheorie kann man für jedes f eine Folge $\{T_n\}$ trigonometrischer Polynome konstruieren, wobei T_n höchstens n-ter Ordnung ist, so dass für jedes x und n mit einer von x, n und f unabhängigen Konstanten B

$$|f(x) - T_n(x)| \leqq B\,\omega_2(n^{-1})$$

besteht. Es ist sogar möglich, die Approximationspolynome in der Form $T_n(x) = A_n\{f;x\}$ zu wählen, wobei A_n einen linearen Operator bedeutet, welcher den Raum $C_{2\pi}$ der stetigen, nach 2π periodischen Funktionen in den Raum der trigonometrischen Polynome höchstens n-ter Ordnung transformiert. Folgen $\{A_n\}$ von lineraren Transformationen dieser Art, welche also für jedes $f \in C_{2\pi}$

$$|A_n\{f;x\} - f(x)| \leqq B\,\omega_2(n^{-1}) \tag{2}$$

befriedigen, nennen wir Zygmundsche Approximationsfolgen. In einer unlängst erschienenen Note[1] zeigte der Verfasser, dass eine Folge $\{A_n\}$ linearer Transformationen dann und nur dann eine Zygmundsche Approximationsfolge darstellt, falls folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

a) Für jedes $f \in C_{2\pi}$ gilt mit einer von x, n und f unabhängigen Zahl C_1

$$|A_n\{f;x\}| \leqq C_1 \max_x |f(x)|, \tag{3}$$

b) Für jedes zweimal stetig differenzierbares nach 2π periodisches $g(x)$ ist

$$|A_n(g;x) - g(x)| \leqq C_2\, n^{-2} \max_x |g''(x)| \tag{4}$$

[1] G. FREUD: „Sui procedimenti lineari d'approssimazione." *Rendiconti d'Academia Nazionale dei Lincei* VIII **26** (1959) 641–643.

wobei die Konstante C_2 weder von x und n, noch von der Wahl von $g(x)$ abhängt.

In vorliegender Arbeit untersuchen wir den Fall, in welchem die Transformationen A_n positiv sind, d. h.

$$A_n\{f(t)\,;x\} \geqq 0 \quad x \in [0,2\pi) \quad \text{falls} \quad f(t) \geqq 0 \quad t \in [0,2\pi)\,. \tag{5}$$

Nennen wir eine Folge $\{A_n\}$ eine Jacksonsche Approximationsfolge, falls für jedes f

$$|A_n\{f\,;x\} - f(x)| \leqq B'\,\omega(f\,;\delta)$$

mit

$$\omega(f\,;\delta) = \max_{\substack{|h| \leqq \delta \\ x \in [0,2\pi)}} |f(x+h) - f(x)|$$

besteht, dann ist nach P. P. KOROVKIN[2] folgender Satz gültig:

Eine Folge positiver linearer Transformationen stellt dann und nur dann eine Jacksonsche Approximationsfolge dar, wenn es die konstanten Funktionen für jedes n identisch darstellt und die Funktion $g_\xi(t) = \sin^2\dfrac{t-\xi}{2}$ in ξ gleichmässig in der Grössenordnung $O(n^{-2})$ approximiert. In vorliegender Arbeit wollen wir ein analoges Resultat für positive Zygmundsche Approximationsfolgen angeben:

Satz I. *Der Operator A transformiere $C_{2\pi}$ in $C_{2\pi}$ und es sei linear, positiv translationsinvariant und symmetrisch, d.h.*

$$A\{\alpha f + \beta g\,;x\} = \alpha\,A\{f\,;x\} + \beta\,A\{g\,;x\} \tag{6.a}$$

$$A\{g\,;x\} \geqq 0 \qquad \textit{für} \qquad g(t) \geqq 0 \tag{6.b}$$

$$A\{f(t)\,;\xi\} = A\{f(t+\xi)\,;0\} \tag{6.c}$$

und

$$A\{f(-t)\,;0\} = A\{f(t)\,;0\} \tag{6.d}$$

ferner sei

$$A\{1\,;0\} = 1\,. \tag{7}$$

Dann besteht für jedes $f \in C_{2\pi}$ und jedes $\eta > 0$ die Ungleichung

$$|A\{f(t)\,;\xi\} - f(\xi)| \leqq \frac{1}{2}\,\omega_2(\eta) + 20\,\eta^{-2}\,\omega_2(\eta)\cdot A\left\{\sin^2\frac{t}{2}\,;0\right\}. \tag{8}$$

Aus diesem Satze folgt sofort die folgende Variante des Korovkinschen Satzes:

Satz II. *Es sei $\{A_n\}$ eine Folge linearer, positiver translationsinvarianter und symmetrischer Operatoren, so dass A_n den Raum $C_{2\pi}$ in trigonometrische Polynome höchstens n-ter Ordnung transformiert ; die notwendige und hinnrei-*

[2] П. П. Коровкин: *Линейные операторы и теория приближений.* Гос. Изд. Физ. Мат. Лит., Москва, 1959.

chende Bedingung, dass $\{A_n\}$ eine Zygmundsche Approximatoinsfolge darstellt, besteht darin, dass

$$A_n\{1\,;x\} \equiv 1 \tag{9}$$

und

$$\left| A_n \left\{ \sin^2 \frac{t}{2}\,;0 \right\} \right| < Cn^{-2} \tag{10}$$

(C unabhängig von n) befriedigt ist.

Dass diese Bedingungen hinnreichen, folgt aus (8) und (10), indem man $A = A_n$ und $\eta = n^{-1}$ setzt. Die Notwendigkeit der Bedingungen (9) und (10) ist klar.

Beweis des Satzes I. Infolge (6.c) und 6.d) ist

$$A\{f(t)\,;\xi\} = A\{f(t+\xi),0\} = A\{f(-t+\xi)\,;0\}$$

und somit wegen (7):

$$A\{f(t)\,;\xi\} - f(\xi) = \frac{1}{2} A\{f(\xi+t) - 2f(\xi) + f(\xi-t)\,;0\}\,.$$

Aus der Definition von $\omega_2(\delta)$ und aus der bekannten Ungleichung

$$\omega_2(\vartheta\delta) \leqq 4\,\vartheta^2\,\omega_2(\delta) \quad \text{für} \quad \vartheta > 1$$

ergibt sich

$$|f(\xi+t) - 2f(\xi) + f(\xi-t)| \leqq \omega_2(|t|) \leqq \begin{cases} \omega_2(\eta) & \text{für} \quad |t| \leqq \eta \\ 4t^2\,\eta^{-2}\,\omega_2(\eta) & \text{für} \quad |t| > \eta \end{cases} \leqq$$

$$\leqq \omega_2(\eta) + 4\,t^2\,\eta^{-2}\,\omega_2(\eta) \leqq \omega_2(\eta) + 40\,\eta^{-2}\,\omega_2(\eta)\,\sin^2\frac{t}{2} \in C_{2\pi}\,,$$

und hieraus folgt infolge (6.b) und (7)

$$|A\{f(t);\xi\} - f(\xi)| \leqq \frac{1}{2} A\{|f(\xi+t) - 2f(\xi) + f(\xi-t)|\} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2}\,\omega_2(\eta) + 20\,\eta^{-2}\,\omega_2(\eta)\,A\left\{\sin^2\frac{t}{2}\,;0\right\}$$

w.z.b.w.

Nach einem klassischen Satze von F. Riesz ist

$$A_n\{f\,;0\} = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,d\,\psi_n(t)\,,$$

mit einem $\psi_n\,(t)$ von beschränkter Schwankung; da

$$A_n\{f;x\} = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t+x)\,d\,\psi_n(t)$$

für jedes f ein trigonometrisches Polynom höchstens n-ter Ordnung ist, ist es $\psi_n(t)$ ebenfalls, und infolge (6.d) ist

$$\psi_n'(t) = \frac{1}{2}\lambda_{0n} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} \cos kt \geqq 0\,. \tag{11}$$

Ist

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

die Fourierreihe von f, dann ergibt sich

$$A_n(f;x) = \frac{1}{2}\lambda_{0n} a_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,, \tag{12}$$

also eine KoeffizIententransformation der Fourierschen Reihe. Die Bedingungen (9) und (10) sind gleichwertig mit

$$\lambda_{0n} = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_{1n} = 1 + O(n^{-2})\,. \tag{13}$$

Hieraus ergibt sich folgende Umformulierung des Satzes II:

Satz III. *Eine Folge positiver Koeffizientenransformationen der Fourierschen Reihe bildet dann und nur dann eine Zygmundsche Approximationsfolge, wenn es eine Jacksonsche Approximationsfolge bildet, und dazu ist notwendig und hinreichend, dass* (13) *befriedigt ist.*

(Eingegangen: 6. Januar, 1960.)

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ МЕТОДАХ ТИПА ЗИГМУНДА

G. FREUD

Резюме

Пусть $\{A_n\}$ есть определенная на пространстве $C_{2\pi}$ 2π — периодических непрерывных функций последовательность линейных операторов, переводящих каждую функцию $f \in C_{2\pi}$ в тригонометрический многочлен $\tau_n = A_n f$ не выше n-ого порядка.

Последовательность $\{A_n\}$ называется аппроксимационным методом типа Зигмунда, если при всех $f \in C_{2\pi}$ выполняется (2) ($\omega_2(\delta)$ определяется формулой (1)).

Теорема II. *Пусть элементы последовательности $\{A_n\}$ положительны, инвариантны относительно трансляции и симметричны (см.* 6b, *c, d), тогда $\{A_n\}$ в том и только в том случае образуют аппроксимационный метод типа Зигмунда, если выполняется* (9) *и* (10).

Доказательство проводится с помощью теоремы I, согласно которой, если оператор A удовлетворяет условиям 6a, b, c, d и (7), то для всех $f \in C_{2\pi}$ имеет место (8).

Операторы A_n, удовлетворяющие условиям теоремы II, суть суммы вида (12), образованные с помощью ряда Фурье функции $f(x)$, λ_{kn} при всех t удовлетворяют условию (11). Это представление называется положительным преобразованием коэффициентов ряда Фурье.

Так получается следующая перефразировка теоремы II:

Теорема III. *Положительное преобразование коэффициентов ряда Фурье есть аппроксимационная последовательность типа Зигмунда в том и только в том случае, если выполняется* (13) *и* (14).

Полученные результаты аналогичны результатам П. П. Коровкина [2], относительно аппроксимационных последовательностей Джексона.