ÜBER DIE BEGRÜNDUNG DER ADDITIONS- UND MULTIPLIKATIONS-FORMELN VON BEDINGTEN WAHRSCHEINLICHKEITEN

Dem Andenken an K. Jordan anläßlich seines 90. Geburtstages gewidmet

von

JÁNOS ACZÉL[1]

§ 1. Einleitung

Eine grosse Anzahl von Arbeiten (z. B. [5]–[11], [13]–[15] vgl. das Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit) beschäftigt sich mit den Verallgemeinerungen der Additions- und Multiplikationsformeln für die Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens eines von sich gegenseitig ausschliessenden Ereignissen (»oder-Wahrscheinlichkeit«) bzw. des gleichzeitigen Eintreffens von unabhängigen Ereignissen (»und-Wahrscheinlichkeit«), indem sie statt Summen und Produkte a priori beliebige Funktionen F und G zulassen. Sie zeigen dann unter Voraussetzung gewisser natürlich erscheinender Bedingungen, daß man in diesem Falle die Wahrscheinlichkeiten so umdefinieren kann, daß sie den üblichen Additions- und Multiplikationsformeln unterliegen. — Dies pflegt durch Lösung des Funktionalgleichungssystems (oder eines Teiles des Systems)

$$F[F(x,y),z] = F[x,F(y,z)], \tag{1}$$

$$G[G(x,y),z] = G[x,G(y,z)], \tag{2}$$

$$G[F(x,y),z] = F[G(x,z),G(y,z)] \tag{3}$$

unter gewissen Bedingungen geschehen.

Nun ist aber in dem am meisten verwendeten KOLMOGOROFFschen Axiomensystem [3] der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur die Additionsformel eine Axiome, die Multiplikationsformel dient in diesem System zur Definition der Unabhängigkeit. — Die Symmetrie dieser beiden Formeln als Axiomen wird in dem Axiomensystem von A. RÉNYI (s. z. B. [12]) hergestellt, das sich auf bedingte Wahrscheinlichkeiten bezieht.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die bezügliche Verallgemeinerung dieses Axiomensystems zu untersuchen und wieder auf das ursprüngliche zurückzuführen. Dabei werden wir sehen, daß anstelle von (3) die verwickeltere Funktionalgleichung

$$G[F(x,y),z] = H[G(x,z),G(y,z)] \tag{4}$$

tritt. (2) werden wir nicht nötig haben. — Natürlich enthalten unsere Betrachtungen die bezügliche Verallgemeinerung des Kolmogoroffschen Aufbaus als einen Spezialfall. Wir wollen auch an manchen Stellen kürzer, an anderen präziser verfahren als einige der diesbezüglichen früheren Arbeiten.

---

[1] Debrecen.

§ 2. Herleitung des grundlegenden Funktionalgleichungssystems

Das Axiomensystem von RÉNYI [12] bezieht sich auf bedingte Wahrscheinlichkeiten $p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$ als reellwertige Funktionen zweier (zufälligen) Ereignissen $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}$, und $\mathbf{V} \in \mathfrak{B}$, wo $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra (vgl. [12]) der Untermengen einer beliebigen Menge $\mathbf{M}$ ist und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. — Wir verwenden die üblichen Bezeichnungen der Ereignisalgebren:

$\mathbf{A} + \mathbf{B}$: das Ereignis $\mathbf{A}$ oder das Ereignis $\mathbf{B}$,
$\mathbf{AB}$ das Ereignis $\mathbf{A}$ *und* das Ereignis $\mathbf{B}$.
$\mathbf{O}$: das *unmögliche* Ereignis.

Die Axiomen von RÉNYI lauten dann in einer für unsere Zwecke geeigneteren, unwesentlich abgeänderten Form:

$$0 = p(\mathbf{O}/\mathbf{V}) \leqq p(\mathbf{A}/\mathbf{V}), \tag{5}$$

$$1 = p(\mathbf{V}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{W}/\mathbf{W}), \tag{6}$$

$$p(\mathbf{AV}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{V}), \tag{7}$$

$$p(\mathbf{AB}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{BV})\, p(\mathbf{B}/\mathbf{V}), \tag{8}$$

$$p(\mathbf{A} + \mathbf{B}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{V}) + p(\mathbf{B}/\mathbf{V}) \qquad \text{falls } \mathbf{AB} = 0 \tag{9}$$

Das letzte Axiom reicht aus, wenn nur endlich viele einander ausschliesende alternative Ereignisse betrachtet werden, im unendlichen Fall wird statt (9)

$$p\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k/\mathbf{V}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} p(\mathbf{A}_k/\mathbf{V}) \quad \text{falls } \mathbf{A}_i\mathbf{A}_j = 0 \text{ für } i \neq j$$

vorausgesetzt, was wir aber hier nicht benötigen.

Unser Ziel ist es, das Axiomensystem (5)–(9) in der auf der Hand liegenden Art zu verallgemeinern, daß wir statt (8) und (9) lediglich voraussetzen, daß $p(\mathbf{A} + \mathbf{B}/\mathbf{V})$ nur von $p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$ und von $p(\mathbf{B}/\mathbf{V})$, $p(\mathbf{AB}/\mathbf{V})$ dagegen nur von $p(\mathbf{A}/\mathbf{BV})$ und von $p(\mathbf{B}/\mathbf{V})$ abhängt. Wir verallgemeinern auch etwas die Voraussetzungen (5) und (6) und behalten (7) unverändert, so daß das neue Axiomensystem folgenderweise lautet:

$$e = p(\mathbf{O}/\mathbf{V}) \leqq p(\mathbf{A}/\mathbf{V}), \tag{10}$$

$$e < e' = p(\mathbf{V}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{W}/\mathbf{W}), \tag{11}$$

$$p(\mathbf{AV}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{V}), \tag{12}$$

$$p(\mathbf{AB}/\mathbf{V}) = G_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{A}/\mathbf{BV}), p(\mathbf{B}/\mathbf{V})], \tag{13}$$

$$p(\mathbf{A} + \mathbf{B}/\mathbf{V}) = F_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{A}/\mathbf{V}), p(\mathbf{B}/\mathbf{V})], \tag{14}$$

$$F_{\mathbf{V}}(x, y) \textit{ ist stetig wachsend in } x \textit{ und in } y. \tag{15}$$

Aus (15) folgt übrigens, daß $F_{\mathbf{V}}(x, y)$ auch als Funktion zweier Veränderlicher stetig ist. — Durch die Bezeichnungen wird bereits hervorgehoben, daß die Funktionen F und G von der Voraussetzung $\mathbf{V}$ abhängen können. Dann ist z. B.

$$p(\mathbf{A} + \mathbf{B}/\mathbf{CV}) = F_{\mathbf{CV}}[p(\mathbf{A}/\mathbf{CV}), p(\mathbf{B}/\mathbf{CV})]. \tag{16}$$

Wir setzen auch hier voraus, daß $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{A}$ und $\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{BV}, \mathbf{CV} \in \mathfrak{V}$ *sind, wo* $\mathfrak{A}$ wieder *eine σ-Algebra von Untermengen und* $\mathfrak{V} \in \mathfrak{A}$ *ist.* Aus (10) und (11) folgt $\mathbf{O} \notin \mathfrak{V}$. — Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß $\mathfrak{V}$ *zusammenhängend* ist in dem Sinne, daß *es bei zwei beliebigen* $\mathbf{V} \in \mathfrak{V}$, $\mathbf{W} \in \mathfrak{V}$ *Ereignisse* $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n \in \mathfrak{V}$ *derart gibt, daß* $\mathbf{C}_1 \mathbf{V} \in \mathfrak{V}, \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1 \in \mathfrak{V}, \ldots, \mathbf{W}\,\mathbf{C}_n \in \mathfrak{V}$ *sind.* — Endlich wird auch vorausgesetzt, daß $p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$ bei veränderlichem $\mathbf{A}$ *jeden Wert zwischen e und e' tatsächlich annimmt.*

Wir verwenden noch die folgenden Gesetze der Ergebnisalgebren:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}, \\
&\mathbf{VV} = \mathbf{V}, \\
&(\mathbf{AV})\,\mathbf{A} = \mathbf{AV}, \\
&\mathbf{CV} = \mathbf{VC}, \\
&(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}), \\
&(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC},
\end{aligned} \tag{17}$$

woraus die Beziehungen

$$\begin{aligned}
&p(\mathbf{O} + \mathbf{A}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{V}) \\
&p(\mathbf{A}/\mathbf{VV}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{V}) \\
&p[(\mathbf{AV})\,\mathbf{A}/\mathbf{V}] = p(\mathbf{AV}/\mathbf{V}) \\
&p[(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}/\mathbf{V}] = p[\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})/\mathbf{V}], \\
&p[(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C}/\mathbf{V}] = p(\mathbf{AC} + \mathbf{BC}/\mathbf{V})
\end{aligned}$$

folgen. Wegen (10)—(14) schließt man aus diesen auf die folgenden Eigenschaften der Funktionen $F_{\mathbf{V}}(x, y)$, $G_{\mathbf{V}}(x, y)$:

$$F_{\mathbf{V}}(e, x) = F_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{O}/\mathbf{V}), p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] = p(\mathbf{O} + \mathbf{A}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{V}) = x,$$

$$\begin{aligned}
G_{\mathbf{V}}(x, e') &= G_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{A}/\mathbf{V}), p(\mathbf{V}/\mathbf{V})] = G_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{A}/\mathbf{VV}), p(\mathbf{V}/\mathbf{V})] = \\
&= p(\mathbf{AV}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{V}) = x,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{\mathbf{V}}(e', x) &= G_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{V}/\mathbf{V}), p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] = G_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{AV}/\mathbf{AV}), p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] = p[(\mathbf{AV})\,\mathbf{A}/\mathbf{V}] = \\
&= p(\mathbf{AV}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}/\mathbf{V}) = x,
\end{aligned}$$

$$F_{\mathbf{V}}[F_{\mathbf{V}}(x, y), z] = p[(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}/\mathbf{V}], = p[\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})/\mathbf{V}] = F_{\mathbf{V}}[x, F_{\mathbf{V}}(y, z)],$$

$$\begin{aligned}
G_{\mathbf{V}}[F_{\mathbf{CV}}(u, v), z] &= G_{\mathbf{V}}[p(\mathbf{A} + \mathbf{B}/\mathbf{CV}), p(\mathbf{C}/\mathbf{V})] = p[(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{C}/\mathbf{V}] = \\
&= p(\mathbf{AC} + \mathbf{BC}/\mathbf{V}) = F_{\mathbf{V}}[G_{\mathbf{V}}(u, z), G_{\mathbf{V}}(v, z)]
\end{aligned}$$

[vgl. auch (16)], wobei

$$x = p(\mathbf{A}/\mathbf{V}), y = p(\mathbf{B}/\mathbf{V}), z = p(\mathbf{C}/\mathbf{V}),$$

$$u = p(\mathbf{A}/\mathbf{CV}), v = p(\mathbf{B}/\mathbf{CV})$$

gesetzt wurde.

Schreiben wir einfach

(18) $$F_{\mathbf{V}}(x, y) = H(x, y),$$

(19) $$F_{\mathbf{CV}}(u, v) = F(u, v),$$

(20) $$G_{\mathbf{V}}(x, y) = G(x, y),$$

so erhalten wir für diese Funktionen die folgenden Gleichungen:

(21) $$H(e, x) = x,$$

(22) $$G(x, e') = G(e', x) = x,$$

(23) $$H[H(x, y) z] = H[x, H(y, z)]$$

(24) $$G[F(u, v), z] = H[G(u, z), G(v, z)],$$

(vgl. (4)), während aus (10), (13) und (20) die Bedingung

(25) $$G(x, y) \geqq e$$

folgt, was die Beschränktheit der Funktion G nach unten aussagt.

Setzen wir in (24) $z = e'$, so wird wegen (22)

(26) $$F(u, v) = H(u, v),$$

so daß (15), (21), (23) und (24) in

(27) $F(x, y)$ *ist stetig wachsend in* x *und in* y

(28) $$F(e, x) = x,$$

(29) $$F[F(x, y), z] = F[x, F(y, z)],$$

(30) $$G[F(x, y), z] = F[G(x, z), G(y, z)]$$

übergeht [vgl. (1), (3)]. Andererseits besagt (26) wegen (18) und (19), daß

$$F_{\mathbf{V}}(x, y) = F_{\mathbf{CV}}(x, y)$$

besteht. Wenn wir hier die Rolle von $\mathbf{C}$ und $\mathbf{V}$ vertauschen, so haben wir

$$F_{\mathbf{C}}(x, y) = F_{\mathbf{VC}}(x, y) = F_{\mathbf{CV}}(x, y) = F_{\mathbf{V}}(x, y)$$

[vgl. (17)], falls $\mathbf{C}, \mathbf{CV} \in \mathfrak{B}$. Bei beliebigen $\mathbf{V} \in \mathfrak{B}$, $\mathbf{W} \in \mathfrak{B}$ gibt es laut Voraussetzung Ereignisse $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n \in \mathfrak{B}$ derart, daß $\mathbf{C}_1\mathbf{V} \in \mathfrak{B}$, $\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1 \in \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathbf{WC}_n \in \mathfrak{B}$, also gilt

$$F_{\mathbf{V}}(x, y) = F_{\mathbf{C}_1\mathbf{V}}(x, y) = F_{\mathbf{C}_1}(x, y) = F_{\mathbf{C}_2\mathbf{C}_1}(x, y) = F_{\mathbf{C}_2}(x, y) = \ldots = F_{\mathbf{C}_n}(x, y) =$$
$$= F_{\mathbf{WC}_n}(x, y) = F_{\mathbf{W}}(x, y)$$

d. h. $F_{\mathbf{V}}(x, y)$ *hängt von* $\mathbf{V}$ *nicht ab.* Wir werden zeigen, daß unter den getroffenen Voraussetzungen G durch F eindeutig bestimmt ist, so daß [vgl. (20)] auch $G_{\mathbf{V}}(x, y)$ von $\mathbf{V}$ *nicht abhängt.*

Nehmen wir $\mathbf{A}' + \mathbf{A} = \mathbf{V}$, so folgt aus (11), (14), (18), (19), (26), (27), (10) und (28)

$$e' = p(\mathbf{V}/\mathbf{V}) = p(\mathbf{A}' + \mathbf{A}/\mathbf{V}) = F[p(\mathbf{A}'/\mathbf{V}), p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] \geqq F[e, p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] = p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$$

d. h.

$$p(\mathbf{A}/\mathbf{V}) \leqq e'$$

und aus (14), (18), (19), (26) und (10) folgt einerseits

$$e \leqq F(x, y) \tag{31}$$

andererseits

$$F(x, y) \leqq e' . \tag{32}$$

Die erste Ungleichung (31) bedeutet, daß F von unten beschränkt ist, die zweite, (32), dass nur solche x, y in Betracht genommen werden, für die $F(x, y) \leqq e'$ ist [$F(x, y) \geqq e$ ist wegen (27), (28) immer erfüllt.]

So müssen wir im folgenden *das Funktionalgleichungssystem* (29), (30) *auf dem Intervall* $[e, e']$ *unter den Voraussetzungen* (27), (28), (32), (22), (25) lösen.

Natürlich können auch weitere Gleichungen und Ungleichungen abgeleitet werden, wir werden aber keine weitere brauchen.

§ 3. Hilfssätze

Die Funktionalgleichung (29) wurde unter der Voraussetzung (27) für Gruppen [2], Halbgruppen [4] und Gruppenkeime [1] gelöst. Hier brauchen wir sie für »Halbgruppenkeime« (rechtsseitige Halbumgebungen des neutralen Elements) und beweisen den

Satz 1. *Gilt die Funktionalgleichung* (29) *für*

$$e \leqq x \leqq e', e \leqq y \leqq e', e \leqq z \leqq e', F(x, y) \leqq e', F(y, z) \leqq e', F[F(x, y) z] \leqq e',$$

gelten ferner (27) *und* (28), *so gibt es eine auf* $[0, 1]$ *definierte stetig wachsende Funktion* $f(u)$ *mit der Inversen* $f^{-1}(x)$ $(x \in [e, e'])$ *derart, daß*

$$F(x, y) = f[f^{-1}(x) + f^{-1}(y)] \tag{33}$$

für

$$e \leqq x \leqq e', e \leqq y \leqq e', F(x, y) \leqq e'$$

gilt und

$$f(0) = e, \ f(1) = e' \tag{34}$$

ist. Umgekehrt erfüllt jede Funktion der Gestalt (33) *die Gleichung* (29).

Es sei bemerkt, daß das Intervall $[e, e']$ bezüglich der Operation

$$x \circ y = F(x, y) \tag{35}$$

von oben nicht abgeschlossen zu sein braucht, es kann $x \in [e, e'], y \in [e, e']$ derart geben, daß $F(x, y)$ nicht im Intervall $[e, e']$ liegt. — Wie schon bemerkt, folgt aus (27), daß $F(u, v)$ auch als Funktion zweier Veränderlicher stetig ist.

Beweis. Daß jede Funktion (33) die Gleichung (29) erfüllt, sieht man durch Einsetzen sofort.

Um die andere Hälfte des Satzes zu beweisen, definieren wir die Funktion $f(x)$ durch [vgl. (34)]

$$f(0) = e, \ f(1) = e',$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f_m[f_n^{-1}(e')] \qquad (m \leqq n), \tag{36}$$

in den rationalen Punkten des Intervalles $[0, 1]$.

Die in (36) figurierenden Funktionen $f_m(x)$ $(m = 1,2, \ldots)$ werden rekursiv definiert [wir verwenden die Bezeichnung (35)]:

$$(37) \qquad f_1(x) = x,\ f_{m+1}(x) = x \circ f_m(x) \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Natürlich ist $f_m(x)$ nur für solche x definiert für welche $f_m(x) \in [e, e']$ ist.

Aus (29), d. h. aus

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

folgt, daß

$$(38) \qquad f_{m_1}(x) \circ f_{m_2}(x) = f_{m_1+m_2}(x) = f_{m_2}(x) \circ f_{m_1}(x)$$

und

$$(39) \qquad f_m[f_k(x)] = f_{mk}(x) = f_k[f_m(x)]$$

gelten. Weiter folgt aus (27), (28), (35) und (37)

$$(40) \qquad f_1(x) = x = e \circ x < x \circ x = f_2(x) = e \circ (x \circ x) < x \circ (x \circ x) = \\ = f_3(x) < \ldots \qquad \text{für } x > e$$

d. h.

$$(41) \qquad f_m(x) < f_{m+1}(x) \qquad \text{für } x > e.$$

Ebenfalls aus (35), (37) und aus (27) bzw. (28) folgt, daß

$$(42) \qquad f_m(x) \textit{ stetig wachsend in } x \textit{ ist},$$

und

$$(43) \qquad f_m(e) = e$$

gilt. — So ist die Inverse $f_n^{-1}(x)$ im ganzen Intervall $[e, e']$ eindeutig definiert, da $f_n(x)$ laut (43) und (42) von e mit x stetig wachsend aus dem Intervall $[e, e']$ von rechts hinausläuft. Dies und $m < n$,

$$f_m[f_n^{-1}(e')] < f_n[f_n^{-1}(e')] = e'$$

[vgl. (41)] sichert, daß (36) immer einen Sinn hat.

$$f_{mk}[f_{nk}^{-1}(e')] = f_m(f_k\{f_k^{-1}[f_n^{-1}(e')]\}) = f_m[f_n^{-1}(e')]$$

[vgl. (39)] zeigt, daß die Definition (36) auch eindeutig ist.

Weiter folgt aus (36) und (41)), daß

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f_m[f_n^{-1}(e')] < f_{m+1}[f_n^{-1}(e')] = f\left(\frac{m+1}{n}\right) \text{ für } m + 1 \leqq n$$

ist, d. h. daß *die Funktion f auf den rationalen Stellen wächst* (da ja zwei Brüche immer auf gemeinsamen Nennern gebracht werden können) und (36), (38) bringen auch

$$(44) \qquad f\left(\frac{m_1 + m_2}{n}\right) = f_{m_1+m_2}[f_n^{-1}(e')] = f_{m_1}[f_n^{-1}(e')] \circ f_{m_2}[f_n^{-1}(e')] = \\ = f\left(\frac{m_1}{n}\right) \circ f\left(\frac{m_2}{n}\right) \text{ für } m_1 + m_2 \leqq n$$

mit sich, so daß die Funktion $f(x)$ in *den rationalen Punkten des Intervalles* $[0, 1]$ *die Funktionalgleichung*

$$f(u+v) = f(u) \circ f(v) \quad \textit{für} \quad u, v, u+v \in [0,1] \tag{45}$$

erfüllt.

Aus dem Wachsen von $f(x)$ in den rationalen Punkten folgt, daß die Folge

$$f\left(\frac{1}{n}\right)$$

mit wachsenden n echt monoton abnehmend ist. Da jedes Glied dieser Folge größer als e ist, hat sie einen Grenzwert und dieser ist gleich e, denn wäre

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = d > e\,,$$

so wäre [vgl. (44) und (40)]:

$$d = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{1}{2n}\right) \circ f\left(\frac{1}{2n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2n}\right) \circ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2n}\right) = d \circ d > d\,,$$

was unmöglich ist. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = e\,. \tag{46}$$

Wir können jetzt die Definition von $f(u)$ auf das ganze reelle Intervall $[0, 1]$ ausdehnen, indem wir für ein beliebiges $u \in [0, 1]$ den Funktionenwert $f(u)$ als den Dedekindschen Schnitt der $\{f(r_n)\}$ und $\{f(R_n)\}$ mit rationalen r_n, R_n und

$$r_n < u < R_n$$

definieren. Diese Definition ist wegen (46) eindeutig und die so erhaltene *stetige* Funktion $f(u)$ *erfüllt* (45) *für alle* $u, v, u+v \in [0, 1]$, was aus (44) durch Grenzübergang folgt. $f(u)$ bleibt auch *wachsend*, da es für je zwei nichtnegative reelle $u < u' \leq 1$ immer zwei rationale $r < r'$ gibt, so daß $u < r < r' < u'$ und also

$$f(u) \leq f(r) < f(r') \leq f(u')$$

gilt.

Wenn wir endlich in (45)

$$x = f(u),\ y = f(v)$$

einsetzen, erhalten wir unter Beachtung von (35) eben die Behauptung (33), womit der Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Setzen wir (33) in (30) ein, so erhalten wir

$$G\{f[f^{-1}(x) + f^{-1}(y)], z\} = f\{f^{-1}[G(x,z)] + f^{-1}[G(y,z)]\}\,.$$

Führen wir hier die Bezeichnungen

$$x = f(u), y = f(v) \quad \big(u, v \in [0,1]\big)$$

und

(47) $$g_z(u) = f^{-1}\{G[f(u), z]\} \qquad \big(u \in [0,1], z \in [e, e']\big)$$

ein, so gilt für diese Funktion

(48) $$g_z(u + v) = g_z(u) + g_z(v) \qquad \big(u, v, u + v \in [0,1]\big)$$

Wir sehen von der Abhängigkeit von z momentan ab, so ist die Funktionalgleichung

(49) $$g(u + v) = g(u) + g(v) \qquad \text{für } u, v, u + v \in [0,1]$$

zu untersuchen.

Aus (34) und (25) folgt

$$g_z(u) = f^{-1}\{G[f(u), z]\} \geqq f^{-1}(e) = 0 ,$$

also die Beschränktheit (von unten) der Funktion g mit der unteren Schranke 0 für positive u. Es gilt diesbezüglich (vgl. [16], wo aber die Voraussetzungen nicht die selben sind) der

Satz 2. *Gilt die Funktionalgleichung* (49) *für* u, v, $u + v \in [0, 1]$ *und ist*

(50) $$g(u) \geqq 0 \quad \textit{für genügend kleine positive } u$$

d. h. ist $g(u)$ *in einer rechtsseitigen Halbumgebung von* 0 *von unten beschränkt mit der unteren Schranke* 0, *so gilt*

(51) $$g(u) = cu$$

für alle $u \in [0, 1]$.

Beweis. Aus (49) folgt

(52) $$g(nu) = ng(u)$$

für positive ganze n und für $nu \in [0, 1]$.

Speziell gilt für $u = \dfrac{1}{n}$

$$g(1) = ng\left(\frac{1}{n}\right)$$

d. h. mit $g(1) = c$

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{c}{n}$$

und wieder wegen (52)

$$g\left(\frac{m}{n}\right) = c\frac{m}{n} \qquad \text{für } m \leqq n .$$

(51) ist also gültig für alle rationale Punkte des Intervalles [0, 1].

Für $u = 0$ ist (51) auch gültig, da aus (49) mit $u = 0$

$$g(v) = g(0 + v) = g(0) + g(v)$$

d. h.

$$g(0) = 0 = c\,0$$

folgt. — Andererseits folgt aus (50)

$$g(u + v) = g(u) + g(v) \geqq g(u),$$

also ist $g(u)$ monoton wachsend in $[0, 1]$.

Es sei nun u eine beliebige reelle Zahl in $[0, 1]$ und $\{r_n\}$ bzw. $\{R_n\}$ seien wachsende bzw. abnehmende, gegen u konvergierende Folgen von rationalen Zahlen, so ist

$$r_n < u < R_n$$

und deshalb

$$cr_n = g(r_n) \leqq g(u) \leqq g(R_n) = cR_n\,.$$

Für $n \to \infty$ konvergieren beide Seiten zu cu, so daß

$$g(u) = cu$$

d. h. (51) für alle $u \in [0, 1]$ gilt, w. z. b. w.

Natürlich erfüllt auch (51) bei jedem Wert der Konstante c die Funktionalgleichung (49) immer.

Man mag bemerken, daß der Beweis von Satz 2 dem von Satz 1 recht ähnlich war. (49) ist nämlich ein Spezialfall von (45).

§ 4. Hauptsätze

Da es sich tätsichlich um (48) statt (49) handelt, hängt g und damit die »Konstante« c noch von z ab:

$$g_z(u) = c(z)\,u\,.$$

Wegen (47) gilt also

$$G(x, z) = f[c(z)\,f^{-1}(x)]\,. \tag{53}$$

Das Funktionensystem (33), (53) *erfüllt* übrigens *die Gleichungen* (29), (30) *immer.*

Nehmen wir noch (22) und (34) in Betracht, so haben wir

$$z = G(e', z) = f[c(z)\,f^{-1}(e')] = f[c(z)]$$

d. h.

$$c(z) = f^{-1}(z)\,, \quad f(u) = c^{-1}(u)\,, \tag{54}$$

so daß (53) und (33) in

$$G(x, y) = c^{-1}[c(x)\,c(y)]\,, \tag{55}$$

und

$$F(x, y) = c^{-1}[c(x) + c(y)] \tag{56}$$

übergehen. Die Funktionen (55) und (56) erfüllen nun schon alle Bedingungen (22), (25), (27), (28), (29), (30). — Wenn wir noch

$$H(x, y) = F(x, y) = c^{-1}[c(x) + c(y)] \tag{57}$$

wegen (26) hinzunehmen, so haben wir den

Satz 3. *Das Funktionensystem* (55), (56), (57) *mit stetig wachsendem, in* $[e, e']$ *definierten* $c(x)$ *ist die allgemeine Lösung des für*

$$x, y, z \in [e, e'],\ F(x, y) \leq e',\ F(y, z) \leq e',\ F[F(x, y), z] \leq e',$$

$$G[F(x, y), z] \leq e'$$

vorausgesetzten Funktionalgleichungssystems (23), (24), *falls noch* (21), (22), (25) *und* (27) *vorausgesetzt sind.*

Setzen wir (55), (56) und (57) mittels (18), (19) und (20) in (13) und in (14) ein, so erhalten wir

$$c[p(\mathbf{AB}/\mathbf{V})] = c[p(\mathbf{A}/\mathbf{BV})]\, c[p(\mathbf{B}/\mathbf{V})] \tag{58}$$

und

$$c[p(\mathbf{A} + \mathbf{B}/\mathbf{V})] = c[p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] + c[p(\mathbf{B}/\mathbf{V})]\,. \tag{59}$$

— Dies gibt die Idee, die bedingten Wahrscheinlichkeiten mittels

$$\overline{p}(\mathbf{A}/\mathbf{V}) = c[p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] \tag{60}$$

umzudefinieren. Für die so neu definierten Wahrscheinlichkeiten folgt aus (10), (11), (12), (58) und (59) wegen (34) und (54)

$$0 = \overline{p}(\mathbf{O}/\mathbf{V}) \leq \overline{p}(\mathbf{A}/\mathbf{V})\,,$$

$$1 = \overline{p}(\mathbf{V}/\mathbf{V}) = \overline{p}(\mathbf{W}/\mathbf{W})\,,$$

$$\overline{p}(\mathbf{AV}/\mathbf{V}) = \overline{p}(\mathbf{A}/\mathbf{V})\,,$$

$$\overline{p}(\mathbf{AB}/\mathbf{V}) = \overline{p}(\mathbf{A}/\mathbf{BV})\,\overline{p}(\mathbf{B}/\mathbf{V})\,,$$

$$\overline{p}(\mathbf{A} + \mathbf{B}/\mathbf{V}) = \overline{p}(\mathbf{A}/\mathbf{V}) + \overline{p}(\mathbf{B}/\mathbf{V})\,,$$

was eben das Axiomensystem (5)—(9) für $\overline{p}$ statt p wiedergibt. So haben wir den

Satz 4. *Nimmt die Funktion* $p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$ *von* $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}, \mathbf{V} \in \mathfrak{B}$ — *wo* $\mathfrak{A}$ *eine* σ*-Algebra von Untermengen einer Menge* $\mathbf{M}$ *durchläuft und* $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ *zusammenhängend ist — jeden Wert in* (e, e') *an und gelten für* $p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$ *die Bedingungen* (10) – (15), *so existiert eine stetig wachsende Funktion* $c(x)$ *mit* $c(e) = 0$, $c(e') = 1$ *derart, daß für*

$$\overline{p}(\mathbf{A}/\mathbf{V}) = c[p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] \tag{60}$$

die Bedingungen (5)—(9) *erfüllt sind.*

Ist $\mathfrak{B}$ *nicht zusammenhängend, sondern zerfällt in zusammenhängende Teile* $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$, *so treten,* wie man leicht einsieht, *an Stelle der Funktion* c *die Funktionen* $c_1, c_2, \ldots$ *für die* $c_i(e) = 0$, $c_i(e') = 1$ *und statt* (60)

$$\overline{p}(\mathbf{A}/\mathbf{V}) = c_i[p(\mathbf{A}/\mathbf{V})] \qquad \textit{für}\ \mathbf{V} \in \mathfrak{B}_i\ \ (i = 1, 2 \ldots)$$

gelten.

(Eingegangen: 15. August, 1960.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Vorlesungen über continuierliche Gruppen*. Göttingen, 1929.
[2] CARTAN, É.: *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs*. (Mémorial des sci. math. 42.) Paris, 1930.
[3] KOLMOGOROFF, A. N.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. (Ergebnisse der Math. (2) 3) Berlin, 1933.
[4] ACZÉL, J.: «Sur les opérations définies pour nombres réels.» *Bull. Soc. Math. France* **76** (1949) 59—64.
[5] BARNARD, G. A.: »Statistical inference.« *Journal of the Royal Statistical Society* Ser B **11** (1949) 119—149.
[6] GOOD, I. J.: *Probability and the weighing of evidence*. Appendix III. London—New York, 1950.
[7] RICHTER, H.: »Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. I.« *Mathematische Annalen* **125** (1952) 129—139.
[8] RICHTER, H.: »Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. II.« *Mathematische Annalen* **125** (1952) 223—234.
[9] RICHTER, H.: »Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. III.« *Mathematische Annalen* **125** (1952) 335—343.
[10] RICHTER, H.: »Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. IV.« *Mathematische Annalen* **126** (1953) 362—374.
[11] RICHTER, H.: »Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. V.« *Mathematische Annalen* **128** (1954) 305—339.
[12] RÉNYI, A.: »On a new axiomatic theory of probability.« *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 285—335.
[13] JÁNOSSY, L.: »Remarks on the foundation of probability calculus.« *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae* **4** (1955) 333—350.
[14] ACZÉL, J.: »A solution of some problems of K. Borsuk and L. Jánossy.« *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae* **4** (1955) 351—362.
[15] RICHTER, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. (Grundlehren der math. Wiss. LXXXVI.) Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1956.
[16] ACZÉL, J.: »Miszellen über Funktionalgleichungen. I.« *Mathematische Nachrichten* **19** (1958) 87—99.

ОБ ОБОСНОВАНИИ ФОРМУЛ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ УСЛОВНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Посвещенная памяти K. JORDAN *по случаю его 90-ого года рождения.*

J. ACZÉL

Резюме

Обобщая результаты RÉNYI [12] автор доказывает:

Если функция $p(\mathbf{A}/\mathbf{V})$ принимает все значения, принадлежащие промежутку (e, e') при условии, что $\mathbf{A}$ пробегает σ-алгебру подмножеств $\mathfrak{A}$ произвольного множества, а $\mathbf{V}$ пробегает связное подмножество $\mathfrak{B}$ от $\mathfrak{A}$ и если она удовлетворяет условиям (10)—(14), *где $F_{\mathbf{V}}(x, y)$ непрерывная, строго монотонно возрастающая по обоим переменным функция, тогда существует такая непрерывная и строго монотонная c-функция, что новая вероятностная функция, определенная через* (60) *удовлетворяет условиям* (5)—(9).

Под связаностью $\mathfrak{B}$ мы здесь подразумеваем тот факт, что для любых $\mathbf{V} \in \mathfrak{B}$ и $\mathbf{W} \in \mathfrak{B}$ существуют такие множества $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n \in \mathfrak{B}$, что $\mathbf{C}_1 \mathbf{V} \in \mathfrak{B}, \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_1 \in \mathfrak{B}, \ldots, \mathbf{W}\mathbf{C}_n \in \mathfrak{B}$. Если это условие не выполнено, тогда $\mathfrak{B}$ распадается на (в этом смысле) связные части и теорема изменяется, поскольку к каждой связной части принадлежит своя c-функция.