SUR LA DISTRIBUTION DES VALEURS D'UNE FONCTION ENTIÈRE

par

LÁSZLÓ ALPÁR et PAUL TURÁN

1. La notion des valeurs exceptionnelles des fonctions entières a été introduite par E. PICARD démontrant qu'une fonction entière admet toutes les valeurs complexes sauf peut-être une. L'idée des valeurs exceptionnelles a été généralisée par E. BOREL au cas des fonctions entières d'ordre fini de la manière suivante: Désignons par $\varrho(<\infty)$ l'ordre de la fonction entière $f(z)$ et par b un nombre complexe arbitraire; soient $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$ les racines de l'équation $f(z)=b$, chacune prise selon sa multiplicité, et ayant pour exposant de convergence $\varrho_c(b)$. BOREL a démontré qu'en général pour un b quelconque $\varrho_c(b) = \varrho$ *sauf peut-être pour un nombre exceptionnel* b_0 pour lequel $\varrho_c(b_0) < \varrho$. Autrement dit il existe *tout au plus un seul nombre* b_0 tel que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|z_\nu|^{\varrho-\varepsilon}} < +\infty \qquad \left(0 < \varepsilon < \varrho - \varrho_c(b_0)\right), \tag{1.1}$$

où $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$ sont maintenant les racines de l'équation particulière $f(z) = b_0$. Le nombre b_0 est dit valeur exceptionnelle B (BOREL) de la fonction entière $f(z)$.

La généralisation de la notion des valeurs exceptionnelles peut être poussée encore plus loin. En effet, soit $\varphi(x)$ une fonction définie sur l'intervalle $x \geqq 0$, réelle, positive, strictement monotone décroissante, tendant vers 0 pour $x \to \infty$ aussi rapidement que l'on veut. Le nombre complexe b soit appelé une valeur exceptionnelle φ de la fonction $f(z)$ si

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(|z_\nu|) < +\infty\,. \tag{1.2}$$

Considérant la relation (1.1), on voit que cette question a été examinée et résolue par BOREL dans le cas spécial où $\varphi(x) = x^{-\varrho}$.

Si en particulier $\varphi(x)$ tend aussi rapidement vers zéro que

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x)\, x^a = 0 \tag{1.3}$$

pour tous les $a > 0$ et si $f(z)$ est d'ordre fini, alors — en vertu du théorème de BOREL que nous venons de citer — on a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|z_\nu|^{\varrho+\varepsilon}} < +\infty$$

quels que soient $\varepsilon > 0$ et le nombre b. Ce qui revient à dire que, d'après (1.3), *avec la fonction $\varphi(x)$ ainsi définie*, la série (1.2) est convergente pour chaque b. Par conséquent, dans ce cas, chaque nombre complexe est une valeur exceptionnelle φ de toutes les fonctions entières d'ordre fini et la distinction de ce genre des nombres b n'a aucun sens concret.

Mais précisément c'est cette circonstance qui suggère à soulever la question plus générale: peut-on donner une fonction particulière $\varphi(x)$ telle que chaque nombre complexe b soit une valeur exceptionnelle φ de toutes les fonctions entières? Nous affirmons qu'une telle fonction $\varphi(x)$ n'existe pas; bien plus à chaque fonction $\varphi_0(x) > 0$ donnée et tendant vers zéro aussi rapidement que l'on veut, on peut trouver une fonction $f_0(z)$ d'ordre infini *n'ayant aucune* valeur exceptionnelle φ_0.

2. Ce que nous venons d'exposer peut être énoncé sous la forme suivante:

Théorème. *Soit $\varphi_0(x)$ une fonction définie sur l'intervalle $x \geqq 0$, réelle, positive, strictement monotone décroissante, tendant vers 0 pour $x \to \infty$ aussi rapidement que l'on veut, d'ailleurs quelconque. Alors on peut déterminer une fonction entière $f_0(z)$ telle que l'on ait*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_0(|z_\nu|) = +\infty \tag{2.1}$$

pour chaque nombre complexe b, où $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$ sont les racines de l'équation $f_0(z) = b$, chacune prise selon sa multiplicité.

Nous allons démontrer, outre l'assertion du théorème, que les signes des coefficients de la série de Taylor de $f_0(z)$ peuvent être choisis d'une manière absolument arbitraire.

Nous remarquons encore qu'il serait intéressant de trouver une démonstration de ce théorème différente de la nôtre et qui ne s'appuie pas sur la série de Taylor de $f_0(z)$.

Démonstration. Soit

$$\varphi_0(x) = e^{-q(x)} \tag{2.2}$$

où $q(x) > 0$ est une fonction strictement monotone croissante sur l'intervalle $x \geqq 0$. Introduisons encore les notations suivantes:

$$p(x) = [e^{q(x)}] \tag{2.3}$$

($[\alpha]$ signifie la plus grande partie entière du nombre α),

$$k_\nu = 4^{4^{4^\nu}}, \quad r_\nu = \log k_\nu = 4^{4^\nu} \log 4 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$
$$g(m) = \prod_{l=2}^{m} \log l\,. \tag{2.4}$$

Désignons de plus par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ une suite de nombres dont les termes admettent seulement les valeurs $+1$ et -1 dans un ordre quelconque.

Nous allons démontrer que chaque fonction

$$f_0(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left(\frac{z^{k_n}}{g(k_n)}\right)^{p(r_n)} \tag{2.5}$$

répond aux conditions exigées.

Considérons la quantité

$$B_\nu = \left(\frac{{r_\nu}^{k_\nu}}{g(k_\nu)}\right)^{p(r_\nu)} = e^{p(r_\nu)(k_\nu \operatorname{loglog} k_\nu - \sum_{l=2}^{k_\nu}{}' \operatorname{loglog} l)} \tag{2.6}$$

et l'intégrale

$$I_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f_0(r_\nu e^{i\vartheta})| \, d\vartheta . \tag{2.7}$$

Pour un ν suffisamment élevé, sur la circonférence $|z| = r_\nu$, l'inégalité

$$\left| f_0(z) - \varepsilon_\nu \left(\frac{z^{k_\nu}}{g(k_\nu)}\right)^{p(r_\nu)} \right| \leqq 1 + \sum_{n=1}^{\nu-1} \left(\frac{r_\nu^{k_n}}{g(k_n)}\right)^{p(r_n)} + \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \left(\frac{r_\nu^{k_n}}{g(k_n)}\right)^{p(r_n)} =$$

$$= o(B_\nu) + B_\nu \sum_{n=1}^{\nu-1} \frac{\left(\prod_{l=2}^{k_n} \log l\right)^{p(r_\nu)-p(r_n)} \left(\prod_{l=k_n+1}^{k_\nu} \log l\right)^{p(r_\nu)}}{r_\nu^{k_\nu p(r_\nu)-k_n p(r_n)}} + \tag{2.8}$$

$$+ B_\nu \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \frac{r_\nu^{k_n p(r_n)-k_\nu p(r_\nu)}}{\left(\prod_{l=2}^{k_\nu} \log l\right)^{p(r_n)-p(r_\nu)} \left(\prod_{l=k_\nu+1}^{k_n} \log l\right)^{p(r_n)}} \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} o(B_\nu) + B_\nu \sum_{n=1}^{\nu-1} Y'_n + B_\nu \sum_{n=\nu+1}^{\infty} Y''_n$$

est vérifiée. Pour $1 \leqq n \leqq \nu-1$, on a $l < k_\nu$ et $\log l < r_\nu$ [(cf. 2.4)] dans l'expression de Y'_n, et en y remplaçant $\log l$ par r_ν on obtient

$$Y'_n = \frac{r_\nu^{2p(r_\nu)-p(r_n)}}{r_\nu^{k_\nu p(r_\nu)-k_n(r_n)}} = r_\nu^{-\{(k_\nu-2)p(r_\nu)-(k_n-1)p(r_n)\}4^\nu} < \left(\frac{1}{4}\right)^{\{(k_\nu-2)p(r_\nu)-(k_n-1)p(r_n)\}4} , \tag{2.9}$$

car $k_\nu - 2 > k_n - 1$, $p(r_n) < p(r_\nu)$ et par suite

$$(k_\nu - 2)\, p(r_\nu) - (k_n - 1)\, p(r_n) > 0 ,$$

et

$$r_\nu^{-1} = \frac{1}{4^{4^\nu} \log 4} < \left(\frac{1}{4}\right)^{4^\nu} .$$

De même d'après (2.8)

$$Y''_n = \frac{r_\nu^{2k_\nu\{p(r_n)-p(r_\nu)\}}}{\left(\prod_{l=2}^{k_\nu} \log l \cdot \prod_{l=k_n-k_\nu+1}^{k_n} \log l\right)^{p(r_n)-p(r_\nu)}} \frac{r_\nu^{(k_n-2k_\nu)p(r_n)+k_\nu p(r_\nu)}}{\left(\prod_{l=k_\nu+1}^{k_n-k_\nu} \log l\right)^{p(r_n)} \left(\prod_{l=k_n-k_\nu+1}^{k_n} \log l\right)^{p(r_\nu)}} <$$

$$< \left(\frac{r_\nu^{2k_\nu}}{\prod_{l=2}^{k_\nu} \log l \cdot \prod_{l=k_n-k_\nu+1}^{k_n} \log l}\right)^{p(r_n)-p(r_\nu)} . \tag{2.10}$$

Ce qui s'explique par les faits suivants:

$$k_n\, p(r_n) - k_\nu\, p(r_\nu) = 2\, k_\nu \{p(r_n) - p(r_\nu)\} + (k_n - 2\, k_\nu)\, p(r_n) + k_\nu\, p(r_\nu)\,,$$

et

$$\left(\prod_{l=k_\nu+1}^{k_n} \log l\right)^{p(r_n)} = \left(\prod_{l=k_\nu+1}^{k_n-k_\nu} \log l\right)^{p(r_n)} \left(\prod_{l=k_n-k_\nu+1}^{k_n} \log l\right)^{p(r_n)-p(r_\nu)} \left(\prod_{l=k_n-k_\nu+1}^{k_n} \log l\right)^{p(r_\nu)}.$$

En outre dans (2.10) le second facteur de Y''_n est inférieur à 1, car son numérateur et son dénominateur contiennent des facteurs en nombres égaux, et

$$\log l > \log k_\nu = r_\nu \quad (l = k_\nu + 1\,, k_\nu + 2\,, \ldots, k_n)\,.$$

D'autre part

$$\frac{r_\nu^{2k_\nu}}{\prod\limits_{l=2}^{k_\nu} \log l \prod\limits_{l=k_n-k_\nu+1}^{k_n} \log l} = \frac{r_\nu^2 \cdot r_\nu^{2(k_\nu-1)}}{\log k_n \prod\limits_{l=2}^{k_\nu} \{\log l \,.\, \log (k_n - l + 1)\}}\,.$$

Or, la fonction $t(x) = \log x \,.\, \log (a - x)$, où a est une constante et $a > x + 1 \geqq 3$, prend son maximum pour $x = \frac{a}{2}$, donc le produit $\log l \cdot \log (k_n - l + 1)$ est le plus petit pour $l = 2$, c'est-à-dire

$$\log l \,.\, \log (k_n - l + 1) \geqq \log 2 \,.\, \log (k_n - 1) > c_0 \log 2 \,.\, r_n\,,$$

où $c_0 > 0$ est une constante. Par conséquent

$$\text{(2.11)} \qquad \frac{r_\nu^2}{\log l \,.\, \log (k_n - l + 1)} < \frac{4^{2.4^\nu} \log^2 4}{c_0 \log 2 \,.\, 4^{4^n} \log 4} = $$

$$= \frac{2}{c_0} \left(\frac{1}{4}\right)^{4^n - 2.4^\nu} < \left(\frac{1}{4}\right)^{4^n - 3.4^\nu}.$$

On constate de plus que

$$\text{(2.12)} \qquad \frac{r_\nu^2}{\log k_n} = \frac{r_\nu^2}{r_n} = \frac{4^{2.4^\nu} \log^2 4}{4^{4^n} \log 4} < \left(\frac{1}{4}\right)^{4^n - 3.4^\nu}.$$

Il découle de (2.10), (2.11) et (2.12) que

$$\text{(2.13)} \qquad Y''_n < \left(\frac{1}{4}\right)^{(4^n - 3.4^\nu)\{p(r_n) - p(r_\nu)\}}.$$

Les inégalités (2.9) et (2.13) signifient que

$$\text{(2.14)} \qquad \sum_{n=1}^{\nu-1} Y'_n = o(1)\,; \quad \sum_{n=\nu+1}^{\infty} Y''_n = o(1)\,.$$

En vertu de (2.8) et (2.14) on a

$$\text{(2.15)} \qquad |f_0(r_\nu e^{i\vartheta})| = B_\nu \{1 + o(1)\}\,.$$

Posons l'expression (2.15) dans l'intégrale (2.7) en tenant compte de (2.6), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
I_\nu > \log B_\nu - o(1) &= p(r_\nu)\left(k_\nu \operatorname{loglog} k_\nu - \sum_{l=2}^{k_\nu} \operatorname{loglog} l\right) - o(1) = \\
(2.16) \qquad &= p(r_\nu)\left\{k_\nu \operatorname{loglog} k_\nu - \int_{e^e}^{k_\nu} \operatorname{loglog} x\,dx - O(1)\right\} = \\
&= p(r_\nu)\left\{- O(1) + \int_{e^e}^{k_\nu} \frac{dx}{\log x}\right\} = \\
&= p(r_\nu)\left\{1 + o(1)\right\}\frac{k_\nu}{\log k_\nu} > \left\{1 - o(1)\right\} p(r_\nu)\,\frac{e^{r_\nu}}{r_\nu} \overset{\text{def}}{=} A_\nu\,.
\end{aligned}
$$

On peut aussi conclure de (2.15) que pour chaque $\nu > d_0(b)$ et $|z| = r_\nu$

$$
|f_0(r_\nu e^{i\vartheta}) - b| = B_\nu\{1 + o(1)\}, \tag{2.17}
$$

donc d'après (2.16) et (2.17)

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f_0(r_\nu e^{i\vartheta}) - b|\,d\vartheta > \log B_\nu - o(1) > A_\nu\,. \tag{2.18}
$$

Il faut discuter par la suite séparément le cas où $b \neq 1$ et celui où $b = 1$. Supposons d'abord que $b \neq 1$. Dans ce cas $z = 0$ n'est pas un zéro de la fonction $f_0(z) - b = F(z)$, la formule de JENSEN peut donc être appliquée sur les zéros de $F(z)$ contenus dans le cercle $|z| \leq r_\nu$. Selon cette formule et la relation (2.18)

$$
\log|F(0)| + \sum_{|z_n| \leq r_\nu} \log\frac{r_\nu}{|z_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(r_\nu e^{i\vartheta})|\,d\vartheta > A_\nu\,. \tag{2.19}
$$

Décomposons en deux parties la somme qui figure dans (2.19). Considérons d'abord la partie où n'interviennent que les zéros situés dans le cercle $|z| \leq 1$. Si ν est suffisamment grand $(\nu > d_1(b))$, alors $r_\nu |z_n| > 1$ pour tous les $|z_n| \leq 1$ et

$$
\sum_{|z_n| \leq 1} \log\frac{r_\nu}{|z_n|} < c_1 \log r_\nu \tag{2.20}
$$

où c_1 est une constante convenablement choisie. En désignant ensuite par $N_b(r_\nu)$ le nombre de tous les zéros de $F(z)$ qui tombent dans le cercle $|z| \leq r_\nu$, nous pouvons écrire

$$
\sum_{1 < |z_n| \leq r_\nu} \log\frac{r_\nu}{|z_n|} < N_b(r_\nu)\log r_\nu\,. \tag{2.21}
$$

En conséquence de (2.19), (2.20) et (2.21) si ν est assez grand, soit $\nu > d_2(b)$, on a

$$N_b(r_\nu) > \frac{A_\nu}{\log r_\nu}.$$

On peut donc choisir parmi les r_ν une suite monotone croissante $r_{\nu_1} < r_{\nu_2} < \ldots < r_{\nu_s} < \ldots$ telle que l'on ait

$$N_b(r_{\nu_s}) - N_b(r_{\nu_{s-1}}) > \frac{A_{\nu_s}}{\log r_{\nu_s}} \qquad (s = 1, 2, \ldots)\,. \tag{2.22}$$

Compte tenu de (2.22) la somme (2.1) satisfait à l'inégalité

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_0(|z_n|) &> \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{r_{\nu_{s-1}} < |z_n| \leq r_{\nu_s}} \varphi_0(|z_n|) > \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_0(r_{\nu_s}) \{N_b(r_{\nu_s}) - N_b(r_{\nu_{s-1}})\} > \\ &> \{1 - o(1)\} \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_0(r_{\nu_s})\, p(r_{\nu_s}) \frac{e^{r_{\nu_s}}}{r_{\nu_s} \log r_{\nu_s}}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

(2.2) et (2.3) entraînent que le dernier terme de (2.23) tend vers $+\infty$. Le théorème est ainsi démontré pour $b \neq 1$.

Reste à examiner le cas où $b = 1$, mais celui-ci peut être facilement ramené au précédent. Nous avons d'après (2.5)

$$f_0(z) - 1 = \left(\frac{z^{k_1}}{g(k_1)}\right)^{p(r_1)} \left\{\varepsilon_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n \frac{g(k_1)^{p(r_1)} z^{k_n p(r_n) - k_1 p(r_1)}}{g(k_n)^{p(r_n)}}\right\} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{z^{k_1}}{g(k_1)}\right)^{p(r_1)} f_1(z)\,.$$

Par suite $f_1(0) = \varepsilon_1$ et les zéros de $f_1(z)$ coincident avec les racines non nulles de l'équation $f_0(z) = 1$. Soit en outre

$$B_{1\nu} = \left(\frac{r_\nu^{k_1}}{g(k_1)}\right)^{p(r_1)}, \qquad \frac{B_\nu}{B_{1\nu}} = C_\nu = \frac{g(k_1)^{p(r_1)}}{g(k_\nu)^{p(r_\nu)}} r_\nu^{k_\nu p(r_\nu) - k_1 p(r_1)}\,. \tag{2.24}$$

Selon (2.14) et (2.24) nous avons sur la circonférence $|z| = r_\nu$

$$\left| f_1(z) - \varepsilon_\nu \frac{g(k_1)^{p(r_1)} z^{k_\nu p(r_\nu) - k_1 p(r_1)}}{g(k_\nu)^{p(r_\nu)}} \right| \leq o(C_\nu) + C_\nu \left(\sum_{n=2}^{\nu-1} Y'_n + \sum_{n=\nu+1}^{\infty} Y''_n\right) = o(C_\nu)\,,$$

et il s'ensuit que

$$|f_1(r_\nu e^{i\vartheta})| = C_\nu \{1 + o(1)\}\,.$$

La formule de Jensen s'applique donc à nouveau. $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n, \ldots$ représentant les zéros de $f_1(z)$, chacun pris selon sa multiplicité et vu (2.18) il vient

$$\begin{aligned} \sum_{|z'_n| \leq r_\nu} \log \frac{r_\nu}{|z'_n|} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f_1(r_\nu e^{i\vartheta})|\, d\vartheta > \\ &> \log C_\nu - o(1) = \{1 - o(1)\} B_\nu > A_\nu\,. \end{aligned} \tag{2.25}$$

À partir de l'expression (2.25) se reproduit la même démonstration qui a suivi la relation (2.18). La fonction $f_1(z)$ ne possède donc aucune valeur exceptionnelle φ_0 et à plus forte raison $f_0(z)$ non plus.

Remarque ajoutée lors de la correction des épreuves. Nous avons aperçu, plusieurs mois après avoir achevé cet ouvrage, que le théorème énoncé est valable avec quelques modifications pour certaines fonctions régulières dans le cercle-unité. Nous signalons ce résultat comme un corollaire de notre théorème sans le démontrer, la démonstration étant d'ailleurs assez simple.

Corollaire. *La fonction $\varphi_0(x)$ étant donnée, on peut trouver une fonction $h_0(\zeta)$ régulière dans le cercle $|\zeta| \leqq 1$, excepté le point $\zeta = 1$, telle que pour un b quelconque la fonction $h_0(\zeta) - b$ possède une infinité de zéros, dans le cercle $|\zeta| < 1$, soient $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\mu, \ldots$, chacun pris avec sa multiplicité ayant pour point d'accumulation $\zeta = 1$, et*

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \varphi_0 \left(\frac{1}{|1 - \zeta_\mu|} \right) = + \infty .$$

On peut prendre par exemple $h_0(\zeta) = f_0 \left(\dfrac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right)$.

(Reçu le 20 Octobre 1960.)

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

L. ALPÁR и P. TURÁN

Резюме

Пусть $\varphi(x)$ есть определенная при $x \geqq 0$ положительная функция, как угодно быстро стремящаяся к 0 если $x \to \infty$; $f(x)$ — целая функция. Комплексное число b называется φ-исключительным значением функции $f(z)$, если

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(|z_\nu|) < + \infty ,$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$ корни уравнения $f(z) = b$, взятые с их кратностью.

Из одной известной теоремы Бореля следует, что если $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x)\, x^a = 0$ при любом $a > 0$, и $f(z)$ целая функция конечного порядка, то все конечные числа φ-исключительные значения. В связи с этим возникает следующий вопрос: существует ли такая функция $\varphi(x)$, что каждое комплексное число является φ-исключительным значением всякой целой функции? Оказы-

вается, что таких функций $\varphi(x)$ не существует, более того, ко всякой положительной функции $\varphi_0(x)$, как угодно быстро стремящейся строго монотонно к 0 при $x \to \infty$, можно подобрать такую целую функцию $f_0(z)$ не конечного порядка, которая не имеет φ-исключительных значений. Другими словами, если $\varphi_0(x) > 0$ и $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi_0(x) = 0$, то можно задать функцию $f_0(z)$ так, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_0(|z_\nu|) = +\infty ,$$

каким бы ни было комплексное число b, где $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$ корни уравнения $f_0(z) = b$, взятые с их кратностью.