SUR LA VITESSE DE CONVERGENCE DU DEVELOPPEMENT SELON DES FONCTIONS PROPRES DE STURM-LIOUVILLE

par

G. FREUD et M. SALLAY

Soit $q(x)$ continue dans l'intervalle $[0, \pi]$ et considérons dans cette intervalle l'équation différentielle

$$y'' + [\lambda - q(x)]\, y = 0$$

avec les conditions aux limites

$$a_1\, y(0) + b_1\, y'(0) = 0\,; \quad a_2\, y(\pi) + b_2\, y'(\pi) = 0\,. \tag{1}$$

Désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ les valeurs propres de l'équation et par $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x), \ldots$ les fonctions propres normées.

Il est bien connu qu'au cas où $q(x)$ est continue il existe une suite des valeurs propres $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_n \leqq \ldots$ (les λ_n sont réelles) telles que les fonctions leur appartenant forment un système orthonormal et complet. De plus nous pouvons écrire pour les valeurs propres λ_n et pour les fonctions $v_n(x)$ les formules asymptotiques suivantes (voir [3]):

$$\lambda_n = n^2 + O(1)\,,$$

$$v_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cos nx + O(n^{-1}) & \text{pour} \quad b_1 b_2 \neq 0\,, \\[2ex] \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin nx + O(n^{-2}) & \text{pour} \quad b_1 = b_2 = 0\,, \\[2ex] \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cos \left(n + \dfrac{1}{2}\right) x + O(n^{-2}) & \text{pour} \quad b_2 = 0,\ \ b_1 \neq 0\,, \\[2ex] \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin \left(n + \dfrac{1}{2}\right) x + O(n^{-1}) & \text{pour} \quad b_1 = 0\,,\ b_2 \neq 0\,, \end{cases}$$

où les fonctions $v_n(x)$ sont déterminées par la condition que $v_n(x)$ soit positive dans le voisinage à droite du point 0.

Soit $f(x)$ continue dans l'intervalle $[0, \pi]$ et satisfaisant aux conditions (1). Nous entendons par développement selon des fonctions propres de Sturm—Liouville la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, v_k(x) \qquad \text{où} \qquad a_k = \int_0^{\pi} f(x)\, v_k(x)\, dx\,. \tag{2}$$

On sait que la série (2) est convergente ou divergente suivant que la série de Fourier de $f(x)$ est convergente ou divergente. (Voir [1] et [2]). De plus d'après les formules asymptotiques connues:

$$\int_0^\pi \left| \sum_0^n v_k(x)\, v_k(\xi) \right| dx = O(\log n) . \tag{3}$$

Dans son travail [4] M. G. I. NATANSON a affirmé les propositions suivantes:

Soit $f(x)$ continue dans l'intervalle $[0, \pi]$ et satisfaisant aux conditions (1), et désignons par $\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k v_k(x)$ le polynôme de la meilleure approximation de $f(x)$ dans la norme C selon les fonctions propres de Sturm—Liouville. Alors

$$\text{A.)} \qquad |f(x) - \Phi_n(x)| = O(1) \left[\omega(f, n^{-1}) + \frac{1}{n} \|f\| \right],$$

où $\omega(f, \delta)$ est le module de la continuité ordinaire.

Supposons maintenant que les fonctions $f(x)$ et $q(x)$ admettent une r-ième dérivée continue et désignons par $L^{(i)}$; $i = 0,1, \ldots, k = \left[\frac{r-1}{2}\right]$ les opérateurs

$$L^{(0)} f = f(x)\, ;\ L^{(1)} f = f'' - q(x) f(x);\ \ldots\ ; L^{(i)} f = L^{(1)} (L^{(i-1)} f)\, ,$$

où les fonctions $L^{(i)} f$ satisfont aux conditions (1). Alors

$$\text{B.)} \qquad |f(x) - \Phi_n(x)| = O(n^{-r}) \left[\omega(f^{(r)}, n^{-1}) + \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{r} \|f^{(r)}\| \right].$$

Soit maintenant $s_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, v_k(x)$. En considérant les théorèmes de NATANSON, et d'après (3), nous pouvons écrire l'estimation suivante:

$$|f(x) - s_n(x; f)| \leq O(n^{-r} \log n) \left[\omega(f^{(r)}, n^{-1}) + \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{r} \|f^{(m)}\| \right]. \tag{4}$$

Dans notre ouvrage nous donnerons une estimation plus précise de la vitesse de convergence de la série (2) à l'aide de $\omega_2(f, \delta)$, où

$$\omega_2(f, \delta) = \max_{\substack{|h| \leq \delta \\ x \in [0, \pi]}} |f(x+h) - 2 f(x) + f(x-h)|\, .$$

Nous démontrerons notamment les théorèmes suivants:

Théorème I. *Soit $f(x)$ continue dans l'intervalle $[0, \pi]$ et satisfaisant aux condicitions* (1).[1] *Supposons de plus que le déterminant*[2]

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2\pi + b_2 \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{5}$$

Alors

$$|f(x) - s_n(x, f)| \leqq K_1 \log n \,[\omega_2(f, n^{-1}) + K_2 n^{-1} \max_{i=0,1} \|\delta^{(i)} f\|]$$

où

$$\delta^{(0)} f = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad b_1 = 0 \\ \dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{n}\right) - f(0)}{\dfrac{\pi}{n}} - f'(0) & \text{pour} \quad b_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta^{(1)} f = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad b_2 = 0 \\ \dfrac{f(\pi) - f\left(\pi - \dfrac{\pi}{n}\right)}{\dfrac{\pi}{n}} - f'(\pi) & \text{pour} \quad b_2 \neq 0 \end{cases}$$

K_1 et K_2 *sont des constantes indépendantes de x, n et f.*

Nous remarquons que pour établir notre théorème nous donnerons une démonstration directe sans appliqer le théorème de NATANSON.

Démonstration. Dans les travaux [6] et [7] nous avons démontré la proposition suivante.

Soit $\mathcal{C}^*$ la classe des fonctions $g(x)$ pour lesquelles $g(x)$ est continue dans l'intervalle $[0, \pi]$ et satisfait aux conditions

$$a_i g(0) + b_i g(\pi) + c_i g'(0) + d_i g'(\pi) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) .$$

Désignons par $\mathcal{C}_2^*$ la classe des fonctions admettant une seconde dérivée continue appartenant à la classe $\mathcal{C}^*$.

Soit H une transformation linéaire qui applique la classe $\mathcal{C}^*$ dans l'espace de Banach B de telle manière que

$$\|Hg\|_B \leqq \alpha \|g\|_C \qquad (g \in \mathcal{C}^*) ,$$
$$\|Hg\|_B \leqq \beta \|g''\|_C \qquad (g \in \mathcal{C}_2^*) ;$$

alors pour tous les $v \geqq 1$ entiers :

$$\|Hg\|_B \leqq K(\alpha + \beta v^2) \left[\omega_2(g, v^{-1}) + \frac{1}{v} \max_{i=0,1} \|\delta^{(i)} g\|\right]. \tag{6}$$

[1] Si dans les conditions (1) $b_i = 0$ $(i = 1, 2)$, nous ne faisons aucune restriction sur le fait que la fonction est dérivable aux extremités de l'intervalle.

[2] D'après cette condition, parmi les fonctions $f(x)$, il n'y a pas de fonction linéaire excepté la fonction $f(x) \equiv 0$.

Soit maintenant $\{Hf\} = \{f - s_n(x\,;\,f)\}$ et $v = n$. Alors en vertu du théorème (6) il nous suffit de démontrer les assertions suivantes:

Soit $\mathcal{C}^*$ la classe des fonctions $f(x)$ pour lesquelles $f(x)$ est continue dans l'intervalle $[0, \pi]$ et satisfait aux conditions (1), et supposons que la condition (5) est remplie.

Assertions:

$$\|s_n(x\,;f)\| \leqq k_1 \log n\, \|f(x)\| \qquad (f \in \mathcal{C}^*), \tag{7}$$

$$\|f(x) - s_n(x\,;f)\| \leqq k_2\, n^{-2} \log n\, \|f''\| \qquad (f \in \mathcal{C}_2^*), \tag{8}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes indépendantes de x, n et f.

La première assertion découle immédiatement des formules asymptotiques obtenues pour les fonctions $v_k(x)$.

Soit maintenant $f \in \mathcal{C}_2^*$. Alors la fonction $f(x)$ peut être établie comme la solution de l'équation

$$f''(x) - q(x)\,f(x) = h(x) \qquad (\text{où } h(x) \text{ est continue}) \tag{9}$$

avec les conditions aux limites (1), et nous pouvons obtenir la solution sous la forme

$$f(x) = -\int_0^\pi \sum_{k=0}^\infty \frac{v_k(x)\, v_k(\xi)}{\lambda_k}\, h(\xi)\, d\,\xi\,.$$

En vertu des formules asymptotiques, nous pouvons écrire l'estimation suivante:

$$|f(x) - s_n(x\,;f)| = \left| \int_0^\pi \sum_{k=n+1}^\infty \frac{v_k(x)\, v_k(\xi)}{\lambda_k}\, h(\xi)\, d\xi \right| \leqq$$

$$\leqq \left\{ \int_0^\pi \left| \sum_{k=n+1}^\infty \frac{\cos kt}{k^2} \right| dt + O\left(\sum_{n+1}^\infty k^{-3} \right) \right\} \max |h(x)|\,.$$

En considérant que

$$\sum_{k=n+1}^\infty \left| \frac{\cos kt}{k^2} \right| \leqq \frac{\pi}{n^2\, |t|} \qquad (0 < \delta \leqq t \leqq \pi)$$

et

$$\sum_{k=n+1}^\infty \frac{\cos kt}{k^2} \leqq \frac{1}{n} < 1 \qquad (0 \leqq t \leqq \delta)\,,$$

nous obtenons

$$|f(x) - s_n(x\,;f)| \leqq \max |h(x)| \left\{ \int_0^{\frac{1}{n^2}} dt + \frac{\pi}{n^2} \int_{\frac{1}{n^2}}^\pi \frac{dt}{t} + O(n^{-2}) \right\} =$$

$$= \max |h(x)|\, n^{-2} [\log n + O(1)]\,.$$

Pour établir l'assertion (8) il faut encore démontrer que

$$\text{(10)} \qquad \max |h(x)| \leqq C_1 \max |f''(x)| \qquad (C_1 = \text{const.}).$$

D'après la forme (9) de $h(x)$ il suffit de montrer qu'au cas où $f(x) \in \mathcal{C}_2^*$

$$\max |f(x)| \leqq C_2 \max |f''(x)|,$$

où C_2 est une constante indépendante de $f(x)$.

Opérons de la manière suivante:

Cherchons la solution de l'équation différentielle $y'' = g(x)$ avec les conditions aux limites (1). Nous pouvons obtenir la solution sous la forme

$$y(x) = \int_0^x (x-t)\, g(t)\, dt + Ax + B.$$

Pour déterminer A et B les conditions (1) forment un système d'équations linéaires qui est résoluble d'après la condition (5). Nous obtenons

$$y(x) = \int_0^x (x-t)\, y''(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{a_1 a_2 \pi + b_2 a_1 - a_2 b_1} \left[(b_1 a_2 - a_1 a_2 x) \int_0^\pi (\pi - t)\, y''(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + (b_1 b_2 - a_1 b_2 x) \int_0^\pi y''(t)\, dt \right],$$

d'où

$$\max |y(x)| \leqq C \max |y''(x)|.$$

Ceci établit notre proposition (8).

Supposons maintenant que les fonctions $f(x)$ et $q(x)$ admettent une r-ième dérivée continue, que les fonctions $L^{(i)} f$, $i = 1, 2, \ldots, k = \left[\frac{r-1}{2}\right]$ satisfont aux conditions (1) et que (5) est remplie.

Théorème 2.

$$|f(x) - s_n(x\,; f)| \leqq O\left(\frac{\log n}{n^r}\right) \left[\omega_2(f^{(n)}, n^{-1}) + \frac{1}{n^2} \sum_{m=0}^{r} \|f^{(m)}\| + \frac{1}{n} \max_{i=0,1} \sum_{m=1}^{r} \|\delta^{(i)} f^{(m)}\| \right].$$
(11)

Démonstration. Soit

$$\bar{\tau}_n(x\,; f) = \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{2n} s_n(x, f)}{n}$$

a moyenne de DE LA VALLÉE POUSSIN de $f(x)$ selon des fonction propres $v_n(x)$.

Désignons par $\tau_n(x; f)$ la moyenne de DE LA VALLÉE POUSSIN formée à partir de la série de Fourier de $f(x)$. Alors en vertu des théorèmes relatifs à l'équiconvergence et selon une estimation bien connue de la norme de $\tau_n(x)$ (Voir [5]):

$$|\bar{\tau}_n(x, f)| \leqq |\bar{\tau}_n - \tau_n| + |\tau_n| \leqq (3 + K)\|f\|. \tag{12}$$

Compte tenu de $\bar{\tau}_n\,(\Phi(x)) = \Phi_n(x; f)$ nous obtenons

$$\begin{aligned} |\bar{\tau}_n(x, f) - f(x)| &= |\tau_n\,[f - \Phi_n(x; f)] - \\ &- [f - \Phi_n(x; f)]\,| \leqq K\,|f - \Phi_n(x, f)| \qquad (K = \text{const}). \end{aligned} \tag{13}$$

D'autre part, vu que

$$\|f(x) - s_n(x, f)\| \leqq \|f(x) - \bar{\tau}_n(x, f)\| + \|\bar{\tau}_n(x, f) - s_n(x, f)\|,$$

d'après les relations (3), (12) et (13) pour établir notre théorème 2 il nous suffit de démontrer la proposition suivante:

$$\begin{aligned} \|f(x) - \bar{\tau}_n(x, f)\| \leqq O(n^{-r}) \Bigg[& \omega_2(f^{(r)}, n^{-1}) + \frac{1}{n^2} \sum_{m=0}^{r} \|f^{(m)}\| + \\ & + \frac{1}{n} \max_{i=0,1} \sum_{m=0}^{r} \|\delta^{(i)} f^{(m)}\| \Bigg]. \end{aligned} \tag{14}$$

Tout d'abord nous vérifierons les propositions suivantes:

a) Soit $g(x) \in \mathcal{C}^*$. Soit de plus H une transformation linéaire qui applique a classe $\mathcal{C}^*$ dans l'espace de Banach B de telle manière que

$$\|Hg\|_B \leqq O(1)\,\|g\| \qquad (g \in \mathcal{C}^*)$$

$$\|Hg\|_B \leqq O(n^{-2}) \left[\|g''\| + \frac{1}{n}(\|g\| + \|g'\|) \right] \qquad (g \in \mathcal{C}_2^*)$$

alors pour tous les $v \geqq 1$ entiers:

$$\|Hg\|_B \leqq O(1) \left[\omega_2(g, v^{-1}) + \frac{1}{v^2}\|g\| + \frac{1}{v} \max_{i=0,1} \|\delta^{(i)} g\| \right]. \tag{15}$$

L'idée de la démonstration est analogue à la démonstration [7]; il ne faut que remarquer que le polynôme $p_v(x)$ défini dans [7] satisfait aux relations

$$\|p_v(x)\| \leqq O(1)\,\|g(x)\|; \quad \|p_v'(x)\| \leqq O(v)\,\|g(x)\|.$$

b) Soit $L^{(i)} f \in \mathcal{C}_2^*, \quad i = 0, 1, \ldots, \left[\dfrac{r-1}{2}\right] = k.$

Alors

$$\|L^{(k)} f\| \leqq O(1)\,\|f^{(k)}\|. \tag{16}$$

Nous vérifions (16) par récurrence. D'après (10) il découle que pour $L^{(i)} f \in \mathcal{C}_2^*$

$$\|L^{(i)} f\| \leqq O(1)\,\|(L^{(i)} f)''\|. \tag{17}$$

Supposons que

$$\|L^{(k-1)}f\| \leq O(1)\,\|f^{(r-2)}\|\,.$$

Alors en vertu de la définition de $L^{(k)}f$ et d'après (17):

$$\|L^{(k)}f\| = \|(L^{(k-1)}f)'' - q(x)\,L^{(k-1)}f\| \leq [O(1) + \|q(x)\|]\,\|L^{(k-1)}f\| \leq$$
$$\leq O(1)\,\|f^{(r-2)''}\| = O(1)\,\|f^{(r)}\|\,.$$

c) Soit $L^{(k)}f \in \mathcal{C}^*$, alors

$$\omega_2(L^{(k)}f, n^{-1}) \leq O(1)\,\omega_2(f^{(r)}, n^{-1}) + O(n^{-2}) \sum_{m=0}^{r} \|f^{(m)}\|\,. \tag{18}$$

En vertu de la définition de $L^{(k)}f$ nous pouvons écrire $L^{(k)}f$ sous la forme

$$L^{(k)}f = f^{(r)}(x) + r(x)$$

où

$$r(x) = -\sum_{i=1}^{k-1} [q(x)\,L^{(i-1)}f(x)]^{(r-2[i+1])}\,,$$

et $r(x)$ admet une seconde dérivée continue, ainsi

$$\omega_2\big(r(x), n^{-1}\big) \leq O(n^{-2})\,\|r(x)\|\,,$$

alors

$$\omega_2(L^{(k)}f, n^{-1}) \leq O(1)\,\omega_2(f^{(r)}, n^{-1}) + O(n^{-2})\,\|r(x)\|\,,$$

d'où découle l'assertion (18) d'après (17).
d) $\bar{\tau}_n(x\,, f)$ étant une transformation des coefficients de $f(x)$:

$$\bar{\tau}_n(L^{(k)}f) = L^{(k)}[\bar{\tau}_n(f)]\,. \tag{19}$$

Considérons maintenant la classe des fonctions $L^{(k)}f$. En vertu des théorèmes A.) et B.) de NATANSON et d'après (13) nous pouvons écrire les estimations suivantes:

$$\|L^{(k)}f - \bar{\tau}_n(L^{(k)}f, x)\| \leq O(1)\,\|L^{(k)}f\|\,; \qquad (L^{(k)}f \in \mathcal{C}^*)$$

$$\|L^{(k)}f - \bar{\tau}_n(L^{(k)}f, x)\| \leq O(n^{-2})\left[\|L^{(k)}f''\| + \frac{1}{n}(\|L^{(k)}f\| + L^{(k)}f')\right]; \quad (L^{(k)}f \in \mathcal{C}_2^*)\,.$$

La suite des tranformations $\{H_n\} = \{E(L^{(k)}f, x) - \tau_n(L^{(k)}f, x)\}$ est déjà une suite de transformations linéaires; alors en appliquant (15) et (10) nous obtenons

$$\|L^{(k)}[f - \bar{\tau}_n(x\,; f)]\| = \|L^{(k)}f - \bar{\tau}_n(x, L^{(k)})\| \leq$$
$$\leq O(1)\left[\omega_2(L^{(k)}f, n^{-1}) + \frac{1}{n^2}\|L^{(k)}f\| + \frac{1}{n}\max_{i=0,1}\|\delta^{(i)}L^{(k)}f\|\right],$$

d'où d'après (17) et (18)

$$\|L^{(k)}[f - \bar{\tau}_n(x, f)]\| \leq$$

(21)
$$\leq O(1)\left[\omega_2(f^{(r)}, n^{-1}) + \frac{1}{n^2}\sum_1^r \|f^{(m)}\| + \frac{1}{n}\max_{i=0,1}\sum_1^r \|\delta^{(i)} f^{(m)}\|\right].$$

Considérons maintenant la fonction $F(x) = f(x) - \tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x; f)$. La fonction $F(x)$ admet une r-ième dérivée continue et satisfait aux conditions (1). Alors en vertu du théorème de Natanson:

$$\|F(x) - \tau_{\left[\frac{n}{2}\right]} F(x)\| \leq O(n^{-r})\left[\omega(F, n^{-1}) + \frac{1}{n}\sum_0^r \|F^{(m)}(x)\|\right] =$$

$$= O(n^{-r})\left[\|L^{(k)} F(x)\| + \frac{1}{n}\sum_0^r \|L^{(k)} F(x)^{(m)}\|\right].$$

Alors

$$\|f(x) - \bar{\tau}_n(x, f)\| = \|[f(x) - \bar{\tau}_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x, f)] - \bar{\tau}_n[f(x) - \tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x, f)]\| \leq$$

$$\leq O(n^{-r})\left[\|L^{(k)}(f - \tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x, f)) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^r \|L^{(k)}(f - \tau_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x, f))\|\right],$$

d'où découle immédiatement l'assertion (14) d'après la relation (16).

(Reçu le 24 Novembre 1960.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] HAAR, A.: "Zur Theorie der orthogonale Funktionensysteme, I". *Matematische Annalen* **69** (1910) 331—371.

[2] ZYGMUND, A.: "Sur la théorie Riemanienne de certains systèmes orthogonaux, I." *Studia Mathematica* **2** (1930) 97—170.

[3] ЛЕВИТАН, Б. М.: *Разложение по собственным функциям.* Государственное издательство технико-теоретического литературы. Москва, 1950. 9—39.

[4] НАТАНСОН, Г. И.: "К теории рприближения функций линейными комбинациями собственных функций задачи Штурма—Лиувилла." *Доклады Академии Наук СССР* **114** (1957) 2, 263—266.

[5] НАТАНСОН, И. П.: *Конструктивная теория функций.* Государственное издательство технико-теоретического литературы. Москва—Ленинград, 1949.

[6] FREUD, G.: "Sui procedimenti lineari d'approssimazione". *Rend. Sc. Fis. Math. e Nat.* serie VIII, Vol XXVI, fasc. 5.

[7] SALLAY, M.: "Sur une procédé d'approximation avec des conditions aux limites." *MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **6** (1961) 65—70.

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ШТУРМА—ЛИУВИЛЬЯ

G. FREUD и M. SALLAY

Резюме

Обозначим через $v_n(x)$ нормированные собственные функции дифференциального уравнения

$$y'' + [\lambda - q(x)]\, y = 0$$

удовлетворяющие условиям (1) и пусть будет

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k v_k(x) \qquad \text{где} \qquad a_k = \int_0^{\pi} f(x)\, v_n(x)\, dx$$

разложение в ряд по собственным функциям $v_k(x)$ функций $f(x)$ непрерывных и удовлетворяющих условиям (1) в интервале $[0, \pi]$.

В настоящей статье авторы исследуют скорость сходимости вышеуказанного ряда и доказывают следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ функция непрерывная в интервале $[0, \pi]$ и удовлетворяющая в нем условиям* (1) *и пусть далее*

$$S_n(x\,; f) = \sum_{k=0}^{n} a_k v_k(x)\,.$$

Тогда

$$|f(x) - S_n(x\,; f)| \leqq k_1 \log n\, [\omega_2(f, n^{-1}) + k_2 n^{-1} \max_{i=0,1} \|\delta^{(i)} f\|]\,,$$

$$\delta^{(0)} f = \begin{cases} 0 & \textit{если} \quad b_1 = 0 \\ \dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{n}\right) - f(0)}{\dfrac{\pi}{n}} - f(0) & \textit{если} \quad b_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta^{(1)} f = \begin{cases} 0 & \textit{если} \quad b_2 = 0 \\ \dfrac{f(\pi) - f\left(\pi - \dfrac{\pi}{n}\right)}{\dfrac{\pi}{n}} - f'(\pi) & \textit{если} \quad b_2 \neq 0 \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ в интервале $[0, \pi]$ r-раз непрерывно дифференцируемы. Пусть $L^{(0)} f = f$, $L^{(1)} f = f'' - q(x) f$ и $L^{(i)} f = L^{(1)} L^{(i-1)} f$ $(i = 2, 3, \ldots)$. Предположим далее, что функции $L^{(i)} f$ $\left(i = 0, 1, \ldots, \left[\dfrac{r-1}{2}\right]\right)$ удовлетворяют условиям* (1). *Тогда*

$$|f(x) - S_n(x\,; f)| \leqq O\left(\frac{\log n}{n^r}\right)\left[\omega^2(f^{(r)}, n^{-1}) + \frac{1}{n^2} \sum_{m=0}^{r} \|f^{(m)}\| + \frac{1}{n} \max_{i=1,0} \|\delta^{(i)} f^{(m)}\|\right].$$