SUR LA THÉORIE UNITAIRE DES MÉTHODES D'ITÉRATION POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES NON-LINÉAIRES, I

par

BÉLA JANKÓ[1]

Jusqu'ici on a traité des différentes méthodes d'itération comme la méthode de Newton, de Tchebycheff et la méthode des hyperboles tangentes etc. [1—5]. Le but de ce travail est d'indiquer la source commune de ces méthodes, d'étudier simultanément les conditions de convergence respectives et d'en déduire de nouvelles méthodes d'itération.

§ 1. Les relations entre les méthodes de Newton, de Tchebycheff et des hyperboles tangentes

1. *L'ordre de convergence.* Nous considérons l'équation opérationnelle

$$\varphi(x) = 0 \tag{1}$$

où l'opération non-linéaire $\varphi(x)$ est définie dans l'espace de Banach X, prenant ses valeurs aussi en X, en outre elle est continue et k-fois différentiable au sens de FRÉCHET. Pour résoudre l'équation (1) nous appliquons d'habitude une certaine méthode d'itération ayant la forme générale

$$x_{n+1} = \Phi_n(x_n), \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{2}$$

où x_0 est l'approximation initiale et $x_1, x_2, \ldots$ les approximations successives. L'opération non-linéaire $\Phi_n(x)$ sera choisie ultérieurement par la formule (3). Nous supposons pour le moment que l'équation (1) admet la solution $\bar{x}$ dans un domaine $D \subset X$. L'opération $\Phi_n(x)$ est continue, k-fois différentiable au sens de FRÉCHET et possède encore la propriété $\bar{x} = \Phi_n(\bar{x})$ pour chaque n. En tenant compte de cette propriété nous pouvons considérer la formule de Taylor généralisée sous la forme

$$\left\| \bar{x} - x_{n+1} - \Phi_n'(x_n)(\bar{x} - x_n) - \ldots - \frac{1}{(k-1)!} \Phi_n^{(k-1)}(x_n)(\bar{x} - x_n)^{k-1} \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{k!} \sup_{\xi_n} \|\Phi_n^{(k)}(\xi_n)\| \, \|\bar{x} - x_n\|^k$$

ou $\xi_n = x_n + \Theta(\bar{x} - x_n)$; $0 \leq \Theta \leq 1$ et $\bar{x}, x_n, \xi_n \in D$.

[1] Cluj.

Définition 1. Nous disons que la méthode d'itération (2) est convergente d'ordre k, si

a) la norme $\| \bar{x} - x_n \|$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, et

b) les dérivées de $\Phi_n(x)$ jouissent des propriétés

$$\Phi'_n(x_n) \equiv 0, \; \ldots, \; \Phi_n^{(k-1)}(x_n) \equiv 0 \,; \quad \Phi_n^{(k)}(x_n) \not\equiv 0$$

pour toutes les valeurs de n où 0 est l'opération nulle.

2. *L'énoncé du problème.* Il convient de souligner qu'en ce qui suit, notre problème sera de remplacer l'opération $\varphi(x)$ de l'équation (1) par une autre opération $\Phi_n(x) \equiv \mathrm{F}[\varphi(x), x_n]$, ayant les propriétés

α) la méthode d'itération engendrée par l'opération $\Phi_n(x)$ c'est-à-dire, $x_{n+1} = \Phi_n(x_n)$, soit convergente d'ordre k,

β) les équations $\varphi(x) = 0$ et $x - \Phi_n(x) = 0$ soient équivalentes pour chaque n.

Nous montrerons que l'ordre de convergence a une influence directe sur la structure des méthodes d'itérations suivantes:

méthode de Newton,

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n \varphi(x_n), \quad \Gamma_n = [\varphi'(x_n)]^{-1},$$

méthode de Tchebycheff,

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n \varphi(x_n) - \frac{1}{2} \Gamma_n \varphi''(x_n) [\Gamma_n \varphi(x_n)]^2,$$

méthode des hyperboles tangentes

$$x_{n+1} = x_n - \left[\varphi'(x_n) - \frac{1}{2} \varphi''(x_n) \Gamma_n \varphi(x_n)\right]^{-1} \varphi(x_n).$$

3. *La construction des méthodes.* Nous considérons l'opération $\Phi_n(x)$ sous la forme suivante

$$\Phi_n(x) \equiv x - \lambda_0(x_n)\varphi(x) - \lambda_1(x_n)\varphi(x)(x - x_n) - \lambda_2(x_n)\varphi^2(x), \tag{3}$$

$\lambda_0(x_n)$ étant un opérateur (linéaire), puis $\lambda_1(x_n)$, $\lambda_2(x_n)$ sont des opérations bilinéaires définies pour touts les couples d'éléments de l'espace X, ayant ses valeurs aussi dans X.

A) Si nous posons maintenant $\lambda_1(x_n) \equiv \lambda_2(x_n) \equiv 0$ et encore nous imposons la condition *b)* de la Définition 1, pour $k = 2$, c'est-à-dire $\Phi'_n(x_n) \equiv 0$, $\Phi''_n(x_n) \not\equiv 0$, alors il en résulte que $\lambda_0(x_n)$ est de la forme

$$\lambda_0(x_n) = \Gamma_n.$$

Il est évident que de cette manière nous avons retrouvé la méthode de Newton[1].

B) Si $\lambda_2(x_n) \equiv 0$ et si nous imposons les conditions $\Phi'_n(x_n) \equiv 0$, $\Phi''_n(x_n) \equiv 0$, alors nous avons le système

$$\begin{aligned} \Phi'_n(x_n)\Delta x &\equiv \Delta x - \lambda_0(x_n)\varphi(x_n)\Delta x - \lambda_1(x_n)\varphi(x_n)\Delta x = 0 \\ \Phi''_n(x_n)\Delta x' \Delta x'' &\equiv -\lambda_0(x_n)\varphi''(x_n)\Delta x' \Delta x'' - 2\lambda_1(x_n)\varphi'(x_n)\Delta x' \Delta x'' = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

pour chaque $\Delta x, \Delta x', \Delta x'' \in D$. Pour obtenir la solution $\{\lambda_0(x_n), \lambda_1(x_n)\}$

de ce système des équations opérationnelles on suppose d'abord que $\Delta x' = -\frac{1}{2}\Gamma_n \varphi(x_n)$ et $\Delta x = \Delta x''$. De cette manière nous pouvons déterminer

$$\lambda_0(x_n) \equiv \left[\varphi'(x_n) - \frac{1}{2}\varphi''(x_n)\,\Gamma_n \varphi(x_n)\right]^{-1}.$$

En posant dans la deuxième équation $-\frac{1}{2}\Gamma_n \Delta x'$ au lieu de $\Delta x'$ il en découle que l'opération bilinéaire $\lambda_1(x_n)$ est de la forme

$$\lambda_1(x_n)\,\Delta\xi\,\Delta\xi' \equiv -\frac{1}{2}\left[\varphi'(x_n) - \frac{1}{2}\varphi''(x_n)\,\Gamma_n \varphi(x_n)\right]^{-1}(\Gamma_n \Delta\xi)\,\Delta\xi'$$

pour touts les couples d'éléments $\Delta\xi$, $\Delta\xi' \in D$. On peut vérifier facilement que la solution obtenue satisfait au système (4) pour $\Delta x'$, $\Delta x''$ et Δx quelconques. Ainsi nous avons retrouvé la méthode connue des hyberboles tangentes [4].

C) Si nous posons $\lambda_1(x_n) \equiv 0$ et supposons encore

$$\Phi'_n(x_n) \equiv 0\,, \quad \Phi''_n(x_n) \equiv 0\,,$$

alors nous obtenons le système

$$\begin{aligned} &\lambda_0(x_n)\,\varphi'(x_n)\,\Delta x + \lambda_2(x_n)\,[\varphi'(x_n)\,\Delta x]\,\varphi(x_n) + \lambda_2(x_n)\,\varphi(x_n)\,[\varphi'(x_n)\,\Delta x] = \Delta x \\ (4') \qquad &\lambda_0(x_n)\,\varphi''(x_n)\,\Delta x'\,\Delta x'' + \lambda_2(x_n)\,[\varphi''(x_n)\,\Delta x'\,\Delta x'']\,\varphi(x_n) + \\ &+ 2\lambda_2(x_n)\,[\varphi'(x_n)\Delta x']\,[\varphi'(x_n)\,\Delta x''] + \lambda_2(x_n)\,\varphi(x_n)\,[\varphi''(x_n)\,\Delta x'\,\Delta x''] = 0\,. \end{aligned}$$

En substituant dans (4') $\Delta x = \Gamma_n \varphi''(x_n)\,\Delta x'\,\Delta x''$ nous pouvons déterminer facilement que l'opération bilinéaire $\lambda_2(x_n)$ a la forme

$$\lambda_2(x_n)\,\Delta\xi_1\,\Delta\xi_2 \equiv -\frac{1}{2}\Gamma_n \varphi''(x_n)\,[\Gamma_n \Delta\xi_1]\,[\Gamma_n \Delta\xi_2]$$

pour touts les couples d'éléments $\Delta\xi_1$, $\Delta\xi_2 \in D$. Utilisant la relation de $\lambda_2(x_n)$ déjà calculée, il résulte de la première équation du système (4') que

$$\begin{aligned} \lambda_0(x_n)\,\Delta\xi \equiv \Gamma_n \Delta\xi + \frac{1}{2}\Gamma_n \varphi''(x_n)\,[\Gamma_n \Delta\xi]\,[\Gamma_n \varphi(x_n)] + \\ + \frac{1}{2}\Gamma_n \varphi''(x_n)\,[\Gamma_n \varphi(x_n)]\,[\Gamma_n \Delta\xi] \end{aligned}$$

où l'opération bilinéaire $\varphi''(x_n)$ n'est pas toujours symétrique; d'autre part l'élement $\Delta\xi$ qui figure dans l'expression de $\lambda_0(x_n)\,\Delta\xi$, est un élément quelconque du domaine D.

Ainsi nous avons obtenu la méthode connue de Tchebycheff [5]. Dans ces calculs nous avons supposé que les opérations $\varphi'(x_n)$, $\varphi''(x_n)$ et aussi les opérations $\lambda_i(x_n)$, $(i = 0, 1, 2)$ calculées antérieurement existent et sont bien déterminées.

Remarque. Dans l'expression (3) de $\Phi_n(x_n)$ nous pouvons poser au lieu de $\varphi(x)$ le produit $p(x)$. $\varphi(x)$ en supposant que les équations $\varphi(x) = 0$ et $p(x) \cdot \varphi(x) = 0$ sont équivalentes. Ici le produit $p(x) \cdot \varphi(x)$ est défini au sens de M. K. GAVURIN [6]. Nous pouvons obtenir de telle façon des nouvelles méthodes d'itération. Observons encore qu'en général les méthodes d'itération d'ordre k, ayant la forme (2) peuvent être engendrées par l'opération $\Phi_n(x)$, qui a une forme générale

$$\Phi_n(x) \equiv x - \sum_{i,j=1}^{k'} \lambda_{i,j}(x_n)(x - x_n)^i \varphi(x)^j , \tag{3'}$$

$\lambda_{i,j}(x_n)$ étant des operations multilinéaires. Naturellement dans ce cas on doit supposer aussi que les operations $\varphi'(x_n), \ldots, \varphi^{(k-1)}(x_n)$ et $\lambda_{i,j}(x_n)$, qui interviennent dans le calcul, existent et sont bien déterminées.

§ 2. Nouvelle méthodes d'itération

1. Dans ce paragraphe nous servirons d'une autre définition de l'ordre de convergence, introduite par E. SCHRÖDER [7] pour le cas des fonctions de variable réelle. Cette notion peut être immédiatement généralisée pour le cas des opérations non-linéaires définies dans l'espace de Banach. Pour cela nous considérons de nouveau l'équation (1) et encore une méthode d'itération ayant la forme générale

$$x_{n+1} = \Psi(x_n) \tag{2'}$$

où l'opération $\Psi(x)$ sera choisie ultérieurement. Nous supposons que $\Psi(x)$ est continue, k-fois différentiable et possède aussi la propriété $\bar{x} = \Psi(\bar{x})$, $\bar{x}$ étant la solution de l'équation (1). Dans ces conditions nous considérons pour l'opération $\Psi(x)$ le développement de Taylor généralisé, sous la forme

$$\left\| x_{n+1} - \bar{x} - \Psi'(\bar{x})(x_n - \bar{x}) - \ldots - \frac{1}{(k-1)!} \Psi^{(k-1)}(\bar{x})(x_n - \bar{x})^{k-1} \right\| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{k!} \sup_{\xi'_n} \|\Psi^{(k)}(\xi'_n)\| \, \|x_n - \bar{x}\|^k$$

où $\xi'_n = \bar{x} + \Theta(x_n - \bar{x})$, $0 \leqq \Theta \leqq 1$ et $\bar{x}$, ξ_n, $x_n \in D$.
L'extension de la définition de l'ordre de convergence au sens de E. SCHRÖDER s'énonce de la manière suivante.

Définition 1'. La méthode d'iteration (2') est dite convergente et d'ordre k, si

a') $\|x_n - \bar{x}\| \to 0$ lorsque $n \to \infty$,

b') $\Psi'(\bar{x}) \equiv 0, \ldots, \Psi^{(k-1)}(\bar{x}) \equiv 0$; $\Psi^{(k)}(\bar{x}) \not\equiv 0$.

2. *L'énoncé* de notre problème est analogue à celui du § 1: l'opération $\varphi(x)$ on se remplace par une autre opération de la forme $\Psi(x) \equiv F[\varphi(x)]$, telle que

α') la méthode d'itération $x_{n+1} = \Psi(x_n)$ engendrée par $\Psi(x)$ soit convergente de l'ordre k au sens de E. SCHRÖDER,

β') les équations $\varphi(x) = 0$ et $x - \Psi(x) = 0$ soient équivalentes.

3. *La construction des méthodes.* Considérons l'opération $\Psi(x)$ sous la forme

$$\Psi(x) \equiv x + \Lambda_1(x)\,\varphi(x), \tag{5}$$

$\Lambda_1(x)$ étant un opérateur pour x donné (fixé). Si nous imposons la condition $\Psi'(\bar{x}) \equiv 0$, alors il en résulte que

$$\Lambda_1(\bar{x}) \equiv -[\varphi'(\bar{x})]^{-1}. \tag{6}$$

La condition (6) est satisfaite si nous choisissons $\Lambda_1(x)$ pour $x \in D$ quelconque telle que

$$\Lambda_1(x) \equiv -[\varphi'(x) + \mu(x)\,\varphi(x)]^{-1} + \Lambda_2(x)\,\varphi(x) \tag{7}$$

où $\mu(x)$ et $\Lambda_2(x)$ sont des opérations bilinéaires (pour x fixé) et arbitraires pour le moment. En substituant l'expression (7) de l'opération $\Lambda_1(x)$ dans (5) nous obtenons une classe entière des méthodes d'itération

$$x_{n+1} = x_n - [\varphi'(x_n) + \mu(x_n)\,\varphi(x_n)]^{-1}\,\varphi(x_n) + \Lambda_2(x_n)\,\varphi^2(x_n).$$

Si nous posons $\Lambda_2(x) \equiv \mu(x) \equiv 0$, alors nous retrouvons la méthode de Newton.

Considérons maintenant $\Psi(x)$ sous la forme

$$\Psi(x) \equiv x - [\varphi'(x) + \mu(x)\,\varphi(x)]^{-1}\,\varphi(x) + \Lambda_2(x)\,\varphi^2(x) \tag{5'}$$

et imposons encore la condition

$$\begin{aligned}\Psi''(\bar{x})\,\Delta x_1\,\Delta x_2 \equiv \Gamma(\bar{x})\,\varphi''(\bar{x})\,\Delta x_1\,\Delta x_2 + 2\,\Gamma(\bar{x})\,\mu(\bar{x})\,[\varphi'(\bar{x})\,\Delta x_1]\,\Delta x_2 +\\ + 2\,\Lambda_2(\bar{x})\,[\varphi'(\bar{x})\,\Delta x_1]\,[\varphi'(\bar{x})\,\Delta x_2] = 0\end{aligned} \tag{8}$$

pour chaque $\Delta x_1,\ \Delta x_2 \in D$.

Si nous substituons dans la formule (8) $\Lambda_2(x) \equiv 0$, alors nous obtenons que l'opération $\mu\,(x)$ est de la forme

$$\mu(\bar{x})\,\Delta x_1\,\Delta x_2 \equiv -\frac{1}{2}\,\varphi''(\bar{x})\,[\Gamma(\bar{x})\,\Delta x_1]\,\Delta x_2$$

pour touts les couples d'éléments $\Delta x_1,\ \Delta x_2$. En choisissant pour x quelconque

$$\mu(x)\,\Delta x_1\,\Delta x_2 \equiv -\frac{1}{2}\,\varphi''(x)\,[\Gamma(x)\,\Delta x_1]\,\Delta x_2$$

nous retrouvons de nouveau la méthode des hyperboles tangentes. Dans un autre cas si nous posons $\mu(\bar{x}) = 0$ il résulte de la formule (8) que

$$\Lambda_2(\bar{x})\,\Delta x_1\,\Delta x_2 \equiv -\frac{1}{2}\,\Gamma(\bar{x})\,\varphi''(\bar{x})\,[\Gamma(\bar{x})\,\Delta x_1]\,[\Gamma(\bar{x})\,\Delta x_2]$$

et si nous admettons

$$\Lambda_2(x)\,\Delta x_1\,\Delta x_2 \equiv -\frac{1}{2}\,\Gamma(x)\,\varphi''(x)\,[\Gamma(x)\,\Delta x_1]\,[\Gamma(x)\,\Delta x_2]$$

pour x quelconque, alors nous obtenons la méthode de Tchebycheff.

En particularisant les opérations $\Lambda_2(x)$ et $\mu(x)$ on peut construire plusieurs méthodes ayant l'ordre de convergence 3. Dans ces calculs nous avons supposé que dans le voisinage D de x sont satisfaites les conditions

γ) les opérations $\varphi(x)$, $\mu(x)$, $\Lambda_2(x)$, $\Gamma(x)$, $[\varphi'(x)+\mu(x)\,\varphi(x)]^{-1}$ et aussi les dérivées $\varphi^{(\nu)}(x)$, $(\nu = 1, 2, 3)$; $\mu^{(i)}(x)$, $\Lambda_2^{(i)}(x)$, $(i = 1, 2)$ existent et toutes les opérations qui interviennent dans le calcul des relations $\Psi'(\bar{x})\,\Delta x \equiv \equiv 0$, $\Psi''(\bar{x})\,\Delta x_1\,\Delta x_2 \equiv 0$ sont bien déterminées.

Pour le cas des fonctions de variable réelle nous retrouvons quelques résultats de E. Bodewig [8] et R. Ludwig [9].

Nous faisons l'observation qu'au lieu de (5′) nous pouvons considérer une autre opération $\widetilde{\Psi}(x)$ de la forme

$$\widetilde{\Psi}(x) \equiv x - [\varphi'(x)+\mu(x)\,\varphi(x)]^{-1}\big(\varphi(x)+\Lambda_2(x)\,\varphi^2(x)\big)\,. \tag{5″}$$

Si nous imposons dans ce cas la condition $\widetilde{\Psi}''(x)\,\Delta x_1\,\Delta x_2 \equiv 0$ alors nous obtenons une autre relation entre les opérations bilinéaires $\mu(x)$ et $\Lambda_2(x)$, c'est-à-dire

$$\varphi''(\bar{x})\,\Delta x_1\,\Delta x_2 + 2\,\mu(\bar{x})\,[\varphi'(\bar{x})\,\Delta x_1]\,\Delta x_2 = 2\,\Lambda_2(\bar{x})\,[\varphi'(\bar{x})\,\Delta x_1]\,[\varphi'(\bar{x})\,\Delta x_2]. \tag{8′}$$

Ainsi nous avons obtenu une nouvelle classe des méthodes d'itération de la forme $x_{n+1} = \widetilde{\Psi}(x_n)$, d'ordre 3. En faisant

$$\mu(x)\,\Delta x_1\,\Delta x_2 \equiv -\,\varphi''(x)\,[\Gamma(x)\,\Delta x_1]\,\Delta x_2$$

dans la formule (8′), il en découle que $\Lambda_2(x)$ est de la forme

$$\Lambda_2(\bar{x})\,\Delta x_1\,\Delta x_2 \equiv -\frac{1}{2}\,\varphi''(\bar{x})\,[\Gamma(\bar{x})\,\Delta x_1]\,[\Gamma(\bar{x})\,\Delta x_2]\,.$$

Si nous admettons que

$$\Lambda_2(x)\,\Delta x_1\,\Delta x_2 \equiv -\frac{1}{2}\,\varphi''(x)\,[\Gamma(x)\,\Delta x_1]\,[\Gamma(x)\,\Delta x_2]$$

pour chaque $x \in D$, alors nous retrouvons la méthode de L. K. Võhandu [10].

Enfin nous mentionnons que la forme générale de l'opération $\Psi(x)$ peut être choisie, pour obtenir des méthodes d'ordre $k \geq 3$, de la manière suivante

$$\Psi(x) \equiv x - \{\varphi'(x) + \mu_1(x)\,\varphi(x) + \ldots + \mu_{i+1}(x)\,[\varphi(x)]^{i+1}\}^{-1}\,\varphi(x) + \\ + \Lambda_2(x)\,[\varphi(x)]^2 + \ldots + \Lambda_{j+1}(x)\,[\varphi(x)]^{j+1} \tag{9}$$

où les opérations multilinéaires $\mu_r(x)$, $\Lambda_s(x)$, $(r = 1, 2, \ldots, i;\ s = 1, 2, \ldots, j;\ i + j = k - 1)$ sont déterminées par la condition $\Psi^{(p)}(\bar{x})\,\Delta x_1 \ldots \Delta x_p \equiv 0$, $(p = 2, \ldots, k - 1)$ et les opérations $\mu_{j+1}(x)$ et $\Lambda_{j+1}(x)$ sont arbitraires.

La forme générale de $\widetilde{\Psi}(x)$ peut être donnée

$$(9') \qquad \widetilde{\Psi}(x) \equiv x - \{\varphi'(x) + \mu_1(x)\,\varphi(x) + \ldots + \mu_{i+1}(x)\,[\varphi(x)]^{i+1}\}^{-1} \times \\ \times \{\varphi(x) + \Lambda_2(x)\,[\varphi(x)]^2 + \ldots + \Lambda_{j+1}(x)\,[\varphi(x)]^{j+1}\}.$$

Naturellement pour ces cas généraux on doit supposer des conditions analogues à (γ), c'est-à-dire, nous nous servirons des conditions que

(γ') toutes les opérations — qui interviennent dans les dérivées de Fréchet $\Psi^{(\nu)}(x)$ resp. $\widetilde{\Psi}^{(\nu)}(x)$ et dans les relations $\Psi^{(\nu)}(\bar{x})\,\Delta x_1 \ldots \Delta x_\nu = 0$ resp. $\widetilde{\Psi}^{(\nu)}(\bar{x})\,\Delta x_1 \ldots \Delta x_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k-1)$ — existent, sont bien déterminées et les conditions des dérivabilitées sont satisfaites.

§ 3. Conditions de convergence

Les conditions de convergence pour les méthodes de la forme générale

$$x_{n+1} = x_n + \Phi\big(\varphi(x_n), \varphi'(x_n), \varphi''(x_n), \ldots\big)$$

ont déjà été étudiée par Iu. Ia. Kaazik [11, 12] — où $\varphi(x)$ est supposée analytique —, et part par L. Collatz [13] pour le cas ou Γ est uniformément bornée en norme. Nous donnerons dans ce qui suit des autres conditions.

Supposons que les conditions suivantes sont remplies:

1° l'approximation initiale x_0 satisfait à la relation

$$\|\varphi(x_0)\| \leqq \eta_0 ;$$

2° l'opération $\Gamma(x)$ est uniformément bornée en norme

$$\|\Gamma(x)\| \leqq B$$

dans le domaine D défini par l'inégalité

$$(D) \qquad \|x - x_0\| \leqq HB\eta_0 = \delta_0$$

où

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{h_0}{2}\right)^{2^k-1} ;$$

3° la deuxième dérivée de Fréchet de l'opération $\varphi(x)$ est uniformément bornée en norme

$$\|\varphi''(x)\| \leqq K$$

où $x \in D$;

4° nous avons satisfait à l'inégalité

$$h_0 = B^2 K\,\eta_0 < 2 ;$$

5° l'opération $\Psi(x)$ est bien définie par l'égalité (9) elle est k-fois différentiable au sens de Fréchet, satisfaisant encore à la condition (γ') pour $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$, puis

$$\Psi^{(\nu)}(x)\,\Delta x_1 \ldots \Delta x_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1)$$

pour chaque $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_\nu$ différentes de l'élément zéro, et encore

$$\Psi^{(k)}(\bar{x}) \neq 0 .$$

6° nous supposons enfin que

$$\| \Psi^{(k)}(\xi) \| \leqq M_k$$

pour $\| \xi - x_0 \| \leqq 3\,\delta_0$, et que

$$(2\,\delta_0)^{k-1} M_k < k!\,.$$

Théorème 1. *Si les conditions* 1°—6° *sont satisfaites, alors l'équation opérationnelle* $\varphi(x) = 0$, *définie dans le domaine* D, *admet une solution unique* $x \in D$, *le procédé d'itération* $x_{n+1} = \Psi(x_n)$ *est convergent et la vitesse de convergence est caractérisée par la délimitation*

$$\| \bar{x} - x_0 \| \leqq \delta_0^{k^n} \left(\frac{M_k}{k!} \right)^{\frac{k^n - 1}{k-1}} . \tag{10}$$

Démonstration. Les condition 1°—4°, qui sont éxactement les conditions établies par I. P. MYSOVSKIH, assurent l'existence d'une solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ dans le domaine D [2]. Nous montrerons que la solution est unique. Il est évident que l'équation $F(x) \equiv x - \Psi(x) = 0$ admet aussi au moins une solution. Nous supposons d'abord qu'elle a deux solutions distinctes $\bar{x}, \bar{x}' \in D$ et considérons le développement de Taylor pour $F(x)$,

$$\| F(\bar{x}') - F(\bar{x}) - F'(\bar{x})(\bar{x}' - \bar{x}) - \ldots - \frac{1}{(k-1)!} F^{(k-1)}(\bar{x})(\bar{x}' - \bar{x})^{k-1} \| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{k!} \sup_{\xi} \| F^{(k)}(\xi) \| \, \| \bar{x}' - \bar{x} \|^k$$

où $\xi = \bar{x} + \Theta(\bar{x}' - \bar{x})$, $0 \leqq \Theta \leqq 1$. La structure de l'opération $F(x)$ et les conditions 5°—6° entraînent

$$\left(1 - \frac{M_k}{k!}(2\,\delta_0)^{k-1}\right) \| \bar{x}' - \bar{x} \| \leqq \| F(\bar{x}') - F(\bar{x}) \| = 0$$

et en utilisant la condition 6° nous obtenons que $\bar{x}' = \bar{x}$. Alors $F(x) = 0$ ayant une solution unique dans le domaine D, il résulte que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet aussi une seule et même solution $\bar{x}$, c'est-à-dire les deux équations sont équivalentes.

Pour démontrer la convergence, nous considérons la formule de Taylor

$$\| \Psi(x_{n-1}) - \Psi(\bar{x}) - \Psi'(\bar{x})(x_{n-1} - \bar{x}) - \ldots -$$

$$- \frac{1}{(k-1)!} \Psi^{(k-1)}(\bar{x})(x_{n-1} - \bar{x})^{k-1} \| \leqq \frac{1}{k!} \sup_{\xi_{n-1}} \| \Psi^{(k)}\, \xi_{n-1}) \| \, \| x_{n-1} - \bar{x} \|^k$$

où $\xi_n = \bar{x} + \Theta (x_{n-1} - \bar{x})$ et $0 \leq \Theta \leqq 1$. Il résulte que

$$\| x_n - \bar{x} \| \leqq \frac{M_k}{k!} \| x_{n-1} - \bar{x} \|^k$$

ou

$$\| x_n - \bar{x} \| \leqq \| x_0 - \bar{x} \|^{k^n} \left(\frac{M_k}{k!} \right)^{\frac{k^n-1}{k-1}}$$

qui entraîne l'inégalité (10).

Remarque. Nous pouvons mentionner que dans notre théorème sont groupées séparement les conditions d'existence et les conditions de convergence. En connection avec les conditions 1°—4°, qui assurent l'existence de la solution, nous remarquons qu'elles peuvent être remplacées par des autres conditions d'existence par ex. par les conditions de V. E. MIRAKOV [14], appliquées dans le cas de la méthode des hyperboles tangentes où l'opération $\Gamma(x)$ est supposée bornée uniformément en norme. Naturellement celles-ci sont un peu plus compliquées que celles de 1°—4°.

Les méthodes de la forme $x_{n+1} = \Phi_n(x)$ traitées dans le § 1 sont contenues dans la catégorie générale des méthodes ayant la forme $x_{n+1} = \Psi(x_n)$. Quand même ayant en vue le fait qu'en général l'expression $\| \Phi_n^{(k)}(x) \|$ est relativement plus simple que celle de $\| \Psi^{(k)}(x) \|$, par conséquent la délimination des erreurs établie *à* l'aide $\| \Phi_n^{(k)}(x) \|$ sera plus simple que la formule donnée par (10). Pour les méthodes $x_{n+1} = \Phi_n(x_n)$ on peut établir un théorème analogue, mais les propriétés de $\Phi_n^{(\nu)}(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k-1)$ different de celles de $\Psi^{(\nu)}(x)$ données dans les conditions (γ'), c'est pourquoi la démonstration de ce théorème differera aussi un peu de la démonstration du théorème précédent.

Théorème 1'. *Si les conditions* 1°—4° *du théorème* 1 *sont remplies et en autre l'opération* $\Phi_n(x)$ *définie par* (3) *respectivement* (3') *est k-fois differentiable au sens de Fréchet satisfaisant les conditions*

$$\Phi_n^{(\nu)}(x_n) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots k-1), \qquad \Phi_n^{(k)}(x_n) \not\equiv 0$$

et encore

$$\delta_0^{k-1} N_k < k!$$

où

$$\| \Phi_n^{(k)}(\xi) \| \leqq N_k, \quad \| \xi - x_0 \| \leqq 2\delta_0,$$

pour n'importe quel n, alors l'équation opérationnelle admet une solution unique $\bar{x} \in D$, *le procédé* $x_{n+1} = \Phi_n(x_n)$ *est convergent et la vitesse de convergence est donnée par*

$$\| \bar{x} - x_n \| \leqq \delta_0^{k^n} \left(\frac{N_k}{k!} \right)^{\frac{k^n-1}{k-1}}.$$

Démonstration. Conformément aux conditions 1°—4° il résulte que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution $\bar{x} \in D$. Pour démontrer la convergence nous considérons le développement de Taylor

$$\Big\| \Phi_n(\bar{x}) - \Phi_n(x_n) - \Phi_n'(x_n)\,(\bar{x} - x_n) - \ldots -$$

$$- \frac{1}{(k-1)!}\,\Phi_n^{(k-1)}(x_n)\,(\bar{x} - x_n)^{k-1} \Big\| \leqq \frac{1}{k!} \sup_{\xi_n} \| \Phi_n^{(k)}(\xi_n) \| \, \| \bar{x} - x_n \|^k$$

où $\xi_n = \bar{x} + \Theta\,(x_{n-1} - \bar{x})$, $0 \leqq \Theta \leqq 1$. Il résulte de cette formule que

$$\| \bar{x} - x_{n+1} \| \leqq \frac{N_k}{k!} \, \| \bar{x} - x_n \|^k$$

et on trouve

$$\| \bar{x} - x_n \| \leqq \delta_0^{k^n} \left(\frac{N_k}{k!} \right)^{\frac{k^n - 1}{k-1}}$$

c'est-à-dire $\bar{x} = \lim x_n$ au sens de norme. Nous allons montrer enfin que la solution $\bar{x}$ est unique. Supposons pour le moment qu'il existe encore une solution $\bar{x}' \in D$ et considérons la formule

$$\Big\| \Phi_n(\bar{x}') - \Phi_n(x_n) - \Phi_n'(x_n)\,(\bar{x}' - x_n) - \ldots - \frac{1}{(k-1)!}\,\Phi_n^{(k-1)}(x_n) \times$$

$$\times\,(\bar{x}' - x_n)^{k-1} \Big\| \leqq \frac{1}{k!} \sup_{\xi_n'} \| \Phi_n^{(k)}(\xi_n') \| \, \| \bar{x}' - x_n \|^k$$

où $\xi_n' = \bar{x}' + \Theta\,(x_{n-1} - \bar{x}')$, $0 \leqq \Theta \leqq 1$. On peut obtenir facilement que

$$\| \bar{x}' - x_n \| \leqq \delta_n^{k^n} \left(\frac{N_k}{k!} \right)^{\frac{k^n - 1}{k-1}}$$

par conséquent $\bar{x}' = \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$, c. q. f. d.

(Recu le 12 Janvier 1961.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] КАНТОРОВИЧ, Л. В.: "О методе Ньютона." *Труды Мат. Инст. Стеклова* **28** (1949) 104—144.

[2] МЫСОВСКИХ, И.' П.: "К вопросу о сходимости метода Ньютона." idem **28** (1949) 145—147.

[3] FENYŐ, I.: "Über die Lösung der im Banachsen-Räume definierten nichtlinearen Gleichungen." *Acta Math. Hung.* **5** (1954) 85—93.

[4] МЕРТВЕЦОВА, М. А.: "Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений." *Д. А. Н.* **88** (1953) 611—614.

[5] НЕЧЕПУРЕНКО, М. Т.: "О методе Чебышева для функциональных уравнений." *Успехи Мат. Наук* **9** (1954) 163—170.

[6] Гавурин, М. К.: "Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразовании." *Ученный Зап. Л. У. сер. Мат.* **19** (1950) 72.
[7] Schröder, E.: „Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen." *Math. Annalen* **2** (1870) 317—369.
[8] Bodewig, E.: „On types of convergence and on the behavior of approximations in neighbourhood of a multiple rot an equation." *Quaterly Appl. Math.* (1949) 325—334.
[9] Ludwig, R.: "Über Iterationsverfahren für Gleichungen und Gleichungssystemen." *Z. A. M. M.* **34** (1954) 210—225.
[10] Выханду, Л. К.: "Об итерационных методах при решении уравнений." Автореферат диссертации. *Тартусский государств. унив.*, 1955.
[11] Каазик, Ю. Я.: "О приближенном решении нелинейных операторных уравнений итеративными методами." *Успехи Мат. Наук* **12** (1957) 195—199.
[12] Каазик, Ю. Я.: "Об одном итерационных процессов для приближенного решения операторных уравнений." *Д. А. Н.* **112** (1957) 579—582.
[13] Collatz, L.: "Näherungsverfahren höherer Ordnung für Gleichungen in Banach-Räumen." *Archiv for Rational Mechanics and Analysis* **2** (1958) 66—75.
[14] Мираков, В. Е.: "О сходимости метода касательных гипербол для нелинейных функциональных уравнений при условии типа Коти." *Труды московского физ.-техн. ин-та.* **1** (1958) 204—213.

ОБ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ I.

B. JANKÓ

Резюме

В этой работе построена общая итерационная формула $x_{n+1} = \Psi(x_n)$, из которой в частных случаях были получены все итерационные методы, например: метод Ньютона, Чебышева, метод касательных гипербол и т. д. Наряду с этим были получены новые категории методов, которые были классифицированы на основе порядка сходимости. Были также выработаны общие условия сходимости.