

ÜBER DIE VERALLGEMEINERUNGEN EINES FUNKTIONALGLEICHUNGSSYSTEMS DER WIRTSCHAFTLICHKEIT

von

M. HOSSZÚ¹ und E. VINCZE¹

1. In einer früheren Arbeit [3] (bzw. [4]) findet man die Lösung des Funktionalgleichungssystems

$$\begin{aligned} (1) \quad & G(tx, ty, tz) = G(x, y, z), \\ (2) \quad & G(tx, y, tz) = t G(x, y, z), \\ (3) \quad & G(tx, ty, z) = f(t) G(x, y, z), \\ & (t, x, y, z > 0; \quad G, f > 0), \end{aligned}$$

die eine wichtige technische Anwendung hat, und zwar die die Lösung bildende Funktion

$$G(x, y, z) = c_1 \frac{x}{y} \left(\frac{x}{z} \right)^{c_2} \quad (c_1, c_2 = \text{konst.})$$

charakterisiert die Wirtschaftlichkeit eines Produktionsvorgangs (hier bedeuten x die Produktenmenge, y die Produktionszeit und z die Produktionskosten). Hierbei sei betont, dass der in [3] und [4] aufgeworfene Problemenkreis und seine mitgeteilte Lösung bei weitem nicht als abgeschlossen zu betrachten sind, sondern diese Lösung lediglich einen Ausgangspunkt der mathematischen Fassung der für die Wirtschaftlichkeit charakteristischen Faktoren bilden kann. Eben deshalb werden wir einige weitere Verallgemeinerungen des Gleichungssystems (1)–(3) auflösen, aber ohne in dieser Arbeit deren Anwendungen tiefer eingehend darzulegen.

Die Verallgemeinerungen des Gleichungssystems (1)–(3), die vom Gesichtspunkte der Anwendungen aus wichtig sind, erhalten wir, indem wir einerseits in dem die Funktion $G(x, y, z)$ bestimmenden Gleichungssystem die Zahl der Gleichungen verringern, andererseits in dieses Gleichungssystem mehrere unbekannte Funktionen schreiben, wobei wir aber auch im weiteren (ausgenommen einen Fall) die die Homogenität der Funktion $G(x, y, z)$ bedeutende Gleichung (1) fordern.

Es würde genügen, wenn wir die Funktionalgleichungen nur für die positiven Zahlen definierten und nur reelle stetige Funktionen behandelten, jedoch werden wir desöfteren auch noch allgemeinere Lösungen geben.

Zu diesem Problem möchten wir erwähnen, dass homogene und verwandte Funktionalgleichungen bzw. Gleichungssysteme vor allem im Buch

¹ Technische Hochschule für Schwerindustrie, Miskolc.

[1] von J. ACZÉL zu finden sind; in ähnlicher Weise enthält dieses Werk auch auf andere Ergebnisse bezügliche zahlreiche Hinweise und Literaturangaben.

2. Zuerst behandeln wir das Funktionalgleichungssystem

$$(1) \quad G(tx, ty, tz) = G(x, y, z),$$

$$(4) \quad G(x, ty, tz) = f(t, x, y) G(x, y, z),$$

$$(x, y, z, t \in Q_0; \quad G, f: Q_0 \times Q_0 \times Q_0 \rightarrow Q),$$

wo Q_0 in der Multiplikation eine Gruppe komplexer Zahlen bedeutet und Q die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet. Diese Bezeichnungen werden wir auch im weiteren benützen.

Es gilt der folgende

Satz 1. *Das allgemeinste Lösungssystem der für die Menge Q_0 geltenden Gleichungen (1) und (4) ist*

$$G(x, y, z) = p\left(\frac{x}{y}\right) q\left(\frac{y}{z}\right),$$

$$f(t, x, y) = \frac{p\left(\frac{x}{ty}\right)}{p\left(\frac{x}{y}\right)},$$

wo $p(t) \neq 0$ und $q(t)$ ($t \in Q_0$) beliebige komplexe Funktionen darstellen.

Beweis. Aus (4) und (1) folgt

$$f(t, x, y) = \frac{G(x, ty, tz)}{G(x, y, z)} = \frac{G\left(\frac{x}{tz}, \frac{y}{z}, 1\right)}{G\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right)},$$

und da die linke Seite von z nicht abhängt, kann man mit $z = y$ tatsächlich

$$(5) \quad f(t, x, y) = \frac{p\left(\frac{x}{ty}\right)}{p\left(\frac{x}{y}\right)},$$

$$\stackrel{\text{def}}{p(t)} = G(t, 1, 1)$$

schreiben.

Nach den Gleichungen (4), (5) und (1) ergibt sich

$$G(x, y, z) = \frac{p\left(\frac{x}{y}\right)}{p\left(\frac{x}{ty}\right)} G(x, ty, tz) = \frac{p\left(\frac{x}{y}\right)}{p\left(\frac{x}{tz}\right)} G\left(\frac{x}{tz}, \frac{y}{z}, 1\right),$$

und da die linke Seite von t nicht abhängt, können wir mit $t = x/z$ tatsächlich

$$(6) \quad G(x, y, z) = p\left(\frac{x}{y}\right) \frac{G\left(1, \frac{y}{z}, 1\right)}{p\left(\frac{z}{y}\right)} = p\left(\frac{x}{y}\right) q\left(\frac{x}{z}\right),$$

$$q(t) = \frac{\text{def } G(1, t, 1)}{p\left(\frac{1}{t}\right)}$$

schreiben.

Die Funktionen (5) und (6) genügen den Gleichungen (1) und (4); damit ist der Satz vollständig bewiesen.

3. Auf ähnliche Weise können wir das Gleichungssystem

$$(1) \quad G(tx, ty, tz) = G(x, y, z),$$

$$(7) \quad G(x, ty, tz) = f(t, y, z) G(x, y, z),$$

$$(x, y, z, t \in R_+; \quad G, f: R_+ \times R_+ \times R_+ \rightarrow R)$$

auflösen, wo R_+ die Menge der positiven Zahlen, bzw. R die Menge der reellen Zahlen bezeichnet.

Es gilt der

Satz 2. Das allgemeinste reelle (stetige) Lösungssystem der für die Menge R_+ geltenden Gleichungen (1) und (7) ist

$$G(x, y, z) = p\left(\frac{z}{y}\right) \left(\frac{x}{y}\right)^{q\left(\frac{y}{z}\right)},$$

$$f(t, y, z) = t^{-q\left(\frac{y}{z}\right)},$$

wo $p(t)$ und $q(t)$ ($t \in R_+$) beliebige reelle Funktionen darstellen.

Beweis. Die Gleichung

$$(8) \quad f(t, sy, sz) = f(t, y, z)$$

erhält man aus (7) und (1) auf folgende Weise:

$$f(t, y, z) = \frac{G(x, ty, tz)}{G(x, y, z)} = \frac{G(sx, tsy, tsz)}{G(sx, sy, sz)} = f(t, sy, sz).$$

Gleichfalls aus (7) und (1) ergibt sich

$$(9) \quad f(t, y, z) = \frac{G(x, ty, tz)}{G(x, y, z)} = \frac{G\left(\frac{x}{t}, y, z\right)}{G(x, y, z)}$$

und da die linke Seite von x nicht abhängt, können wir die Gleichung

$$(10) \quad \frac{G\left(\frac{x}{t}, y, z\right)}{G(x, y, z)} = \frac{G\left(\frac{1}{t}, y, z\right)}{G(1, y, z)}$$

schreiben. Hieraus erhalten wir die CAUCHYSche Gleichung

$$\frac{G\left(\frac{x}{t}, y, z\right)}{G(1, y, z)} = \frac{G(x, y, z)}{G(1, y, z)} \cdot \frac{G\left(\frac{1}{t}, y, z\right)}{G(1, y, z)},$$

also

$$(11) \quad G(x, y, z) = G(1, y, z) x^{g(y, z)}$$

ist; die triviale Lösung $G(x, y, z)/G(1, y, z) \equiv 0$ kann man ausser acht lassen.

Wir bemerken, dass die Stetigkeit nur hier und lediglich für die Funktion $G(x, y, z)/G(1, y, z)$ vorausgesetzt wurde, demzufolge sind die Funktionen $G(x, y, z)$ und $f(t, y, z)$ nicht unbedingt stetig.

Nunmehr erhalten wir nach (9), (10) und (11) die Gleichung

$$f(t, y, z) = t^{-g(y, z)},$$

und werden wegen (8)

$$(12) \quad g(y, z) = g\left(\frac{y}{z}, 1\right) = q\left(\frac{y}{z}\right),$$

$$(13) \quad f(t, y, z) = t^{-q\left(\frac{y}{z}\right)},$$

d. h. nach (11) und (1)

$$G(x, y, z) = G(1, y, z) x^{q\left(\frac{y}{z}\right)} = G(1, ty, tz) (xt)^{q\left(\frac{y}{z}\right)}$$

ist. Hieraus ergibt sich mit $t = 1/y$

$$(14) \quad G(1, y, z) = G\left(1, 1, \frac{z}{y}\right) \left(\frac{1}{y}\right)^{q\left(\frac{y}{z}\right)} = p\left(\frac{z}{y}\right) y^{-q\left(\frac{y}{z}\right)},$$

d. h. nach (11), (12) und (14) tatsächlich

$$(15) \quad G(x, y, z) = p \left(\frac{z}{y} \right) \left(\frac{x}{y} \right)^q \left(\frac{y}{z} \right)$$

gültig ist.

Die Funktionen (13) und (15) genügen den Gleichungen (1) und (7), also ist der Satz vollständig bewiesen.

4. Behandeln wir nun die folgende Verallgemeinerung des Gleichungssystems (1)–(3):

$$(1) \quad G(tx, ty, tz) = G(x, y, z),$$

$$(16) \quad G(tx, ty, z) = f(t, z) G(x, y, z) + g(t, z),$$

$(t, x, y, z \in Q_0; G: Q_0 \times Q_0 \times Q_0 \rightarrow Q; f, g: Q_0 \times Q_0 \rightarrow Q).$

Es gilt der folgende

Satz 3. Die allgemeinsten (nicht trivialen) Lösungssysteme der für die Menge Q_0 geltenden Gleichungen (1) und (16) sind folgende :

$$(17) \quad \begin{cases} G(x, y, z) = h \left(\frac{x}{y} \right) + g \left(\frac{y}{z} \right), \\ f(t, z) \equiv 1, \quad g(t, z) \equiv g(t); \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} G(x, y, z) = f \left(\frac{y}{z} \right) k \left(\frac{x}{y} \right) - C_0, \\ f(t, z) \equiv f(t), \quad g(t, z) \equiv C_0[f(t) - 1]; \end{cases}$$

wo die Funktionen $g(t)$ und $f(t)$ den Cauchyschen Gleichungen

$$(19) \quad g(st) = g(s) + g(t) \quad (s, t \in Q_0),$$

bzw.

$$(20) \quad f(st) = f(s) f(t) \quad (s, t \in Q_0)$$

genügen und die Funktionen $h(t), k(t)$ ($t \in Q_0$) beliebig sind (vgl. [2]).

Bemerkung. Ein triviales Lösungssystem der Gleichungen (1) und (16) ist noch

$$G(x, y, z) \equiv g(t, z) \equiv 0 \quad \text{und} \quad f(t, z) \quad \text{beliebig},$$

was wir jedoch ausser acht lassen können.

Beweis. Vor allem führen wir die Gleichungen (1) und (16) auf ein nur von zwei Veränderlichen abhängende Funktionen enthaltendes Gleichungssystem zurück, und zwar gilt nach (1)

$$(21) \quad G(x, y, z) = G \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \right) = H \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right),$$

und damit wird aus (16)

$$(22) \quad H\left(t \frac{x}{z}, t \frac{y}{z}\right) = f(t, z) H\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) + g(t, z).$$

Falls $x = y = z$ ist

$$(23) \quad H(t, t) = f(t, z) H(1, 1) + g(t, z),$$

d. h. man kann statt (22) die Gleichung

$$(24) \quad H_0\left(t \frac{x}{z}, t \frac{y}{z}\right) = f(t, z) H_0\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) + H_0(t, t)$$

schreiben, in der

$$(25) \quad H_0(x, y) = H(x, y) - H(1, 1)$$

ist.

Setzen wir nun $x = uz$ und $y = vz$ in (24) ein:

$$H_0(tu, tv) = f(t, z) H_0(u, v) + H_0(t, t),$$

daraus folgt, dass die Funktion $f(t, z)$ von der zweiten Veränderlichen nicht abhängt; in ähnlicher Weise hängt die Funktion $g(t, z)$ nach (23) von z gleichfalls nicht ab. Demnach kann man statt (22) die Gleichung

$$(26) \quad H(tu, tv) = f(t) H(u, v) + g(t)$$

schreiben. Daher gilt

$$f(t) [f(s) H(u, v) + g(s)] + g(t) = f(t) H(su, sv) + g(t) = H(tsu, tsv) = \dots$$

also

$$\dots = f(s) [f(t) H(u, v) + g(t)] + g(s),$$

$$g(s) [f(t) - 1] = g(t) [f(s) - 1]$$

ist, d. h. man muss folgende zwei Fälle unterscheiden:

$$(27) \quad f(t) \equiv 1,$$

$$(28) \quad g(t) = c_0 [f(t) - 1].$$

Im Falle (27) erhält man, dass die Funktion $g(t)$ der CAUCHYSCHEN Gleichung (19) tatsächlich genügt; aus (26) mit (27) folgt nämlich

$$H(u, v) + g(st) = H(stu, stv) = H(su, sv) + g(t) = H(u, v) + g(s) + g(t).$$

Ebenso ergibt sich aus (26)

$$H(u, v) = H\left(\frac{u}{v}, 1\right) + g(v) = h\left(\frac{u}{v}\right) + g(v)$$

und gemäss (21) gilt

$$(29) \quad G(x, y, z) = h\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{z}\right),$$

wo $h(t)$ eine beliebige komplexe Funktion darstellt.

Im Falle (28) erhält man aus (22) die Gleichung

$$(30) \quad H_1(tu, tv) = f(t) H_1(u, v),$$

$$(31) \quad H_1(u, v) = H(u, v) + c_0,$$

und dass die Funktion $f(t)$ der CAUCHYSchen Gleichung (20) tatsächlich genügt es folgt nämlich laut (30)

$$f(st) H_1(u, v) = H_1(stu, stv) = f(s) H_1(tu, tv) = f(s) f(t) H_1(u, v).$$

Gleichfalls aus (30) ergibt sich

$$H_1(x, y) = f(y) H_1\left(\frac{x}{y}, 1\right) = f(y) k\left(\frac{x}{y}\right)$$

und nach (31) und (21) ist

$$G(x, y, z) = f\left(\frac{y}{z}\right) k\left(\frac{x}{y}\right) - C_0,$$

wo $k(t)$ eine beliebige komplexe Funktion bedeutet.

Da die Funktion (17) und (18) den Gleichungen (1) und (16) tatsächlich genügen, ist der Satz vollständig bewiesen.

5. Beachten wir schliesslich das Gleichungssystem

$$(32) \quad G(tx_1, \dots, tx_{k-1}, x_k, tx_{k+1}, \dots, tx_{n+1}) = f_k(t) G(x_1, \dots, x_{n+1})$$

$$(k = 1, 2, \dots, n + 1 \geq 3)$$

$$(t, x_1, \dots, x_{n+1} \in Q^n; f_1, \dots, f_{n+1}: Q^n \rightarrow Q; G: Q^n \times \dots \times Q^n \rightarrow Q),$$

wo Q^n in der Multiplikation eine Gruppe komplexer Zahlen darstellt, worin die Gleichung

$$(33) \quad x^n = y_0 \quad (y_0 \in Q^n)$$

im Falle des beliebigen Elementes y_0 auch auflösbar ist.

Wir beweisen

Satz 4. *Das allgemeinste Lösungssystem des für die Menge Q^n geltenden Gleichungssystems (32) ist*

$$(34) \quad G(x_1, \dots, x_{n+1}) = C_0 \prod_{k=1}^{n+1} f_k \left(\frac{1}{x_k} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} \right)$$

$$(C_0 = \text{konst.}),$$

wo f_1, \dots, f_{n+1} der Cauchyschen Gleichung

$$(35) \quad f_k(st) = f_k(s) f_k(t) \quad (s, t \in Q^n; k = 1, 2, \dots, n + 1)$$

notwendig genügende komplexe Funktionen sind.

Beweis. Wegen der Gruppeneigenschaft von Q^n erhalten wir aus (32) die Gleichung

$$\begin{aligned}
 (36) \quad G(x_1, \dots, x_{n+1}) &= f_1(y_1) G\left(\frac{y_1 x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{y_1}\right) = \\
 &= f_1(y_1) f_2(y_2) G\left(\frac{y_1 x_1}{y_1 y_2}, \frac{y_2 x_2}{y_1 y_2}, \frac{x_3}{y_1 y_2}, \dots, \frac{x_{n+1}}{y_1 y_2}\right) = \dots \\
 &\dots = G\left(\frac{y_1 x_1}{y}, \frac{y_2 x_2}{y}, \dots, \frac{y_{n+1} x_{n+1}}{y}\right) \prod_{k=1}^{n+1} f_k(y_k), \\
 &\quad (y = y_1 y_2 \dots y_{n+1}).
 \end{aligned}$$

Es sei nun

$$(37) \quad x_k y_k = y \quad (k = 1, 2, \dots, n+1);$$

wozu die Bemerkung genügt, dass die Gleichungen (37) voneinander unabhängig sind. Lösen wir das Gleichungssystem (37) auf, dann erhalten wir, indem auch die Eigenschaft (33) von Q^n beachtet wurde, die Lösung

$$(38) \quad y_k = \frac{1}{x_k} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} = \frac{1}{x_k} \sqrt[n]{x} \quad (k = 1, 2, \dots, n+1).$$

Wenn wir nun die Gleichungen (37) und (38) in Betracht ziehen, erhalten wir aus (36) die Lösung

$$G(x_1, \dots, x_{n+1}) = G(1, 1, \dots, 1) \prod_{k=1}^{n+1} f_k\left(\frac{1}{x_k} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}}\right).$$

Um zu beweisen, dass die Funktionen f_1, \dots, f_{n+1} der Cauchyschen Gleichung (35) genügen, substituieren wir die Lösung in (32) zurück:

$$\begin{aligned}
 G(1, \dots, 1) \left[\prod_{j=1}^{k-1} f_j\left(\frac{1}{tx_j} \sqrt[t^n]{t^n x}\right) \right] f_k\left(\frac{1}{x_k} \sqrt[t^n]{t^n x}\right) \left[\prod_{j=k+1}^{n+1} f_j\left(\frac{1}{tx_j} \sqrt[t^n]{t^n x}\right) \right] = \\
 = f_k(t) G(1, \dots, 1) \prod_{j=1}^{n+1} f_j\left(\frac{1}{x_j} \sqrt{x}\right) \quad (k = 1, 2, \dots, n+1),
 \end{aligned}$$

also gilt tatsächlich

$$f_k\left(\frac{t}{x_k} \sqrt{x}\right) = f_k(t) f_k\left(\frac{1}{x_k} \sqrt{x}\right) \quad (k = 1, 2, \dots, n+1).$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

(Eingegangen: 24. Januar, 1961.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ACZÉL, J.: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, § 5. und § 7.1.2. Basel, 1961.
- [2] HOSSZÚ M.—VINCZE E.: „Műszaki fogalom — matematikai tükröződés”. *Nehézipari Műszaki Egyetem Közl.*, ...
- [3] VINCZE, E.: „Über das Problem der Berechnung der Wirtschaftlichkeit”. *Acta Technica* **28** (1960) 33—41.
- [4] VINCZE, E.: „A gazdaságosság számításának problémájáról”. *Nehézipari Műszaki Egyetem Közl.*, ...

ОБ ОБОБЩЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭКОНОМИЧНОСТИ

M. HOSSZÚ и E. VINCZE

Резюме

В связи с предыдущими статьями авторов, в настоящей статье дается решение системы, являющейся обобщением системы (1)—(3) функциональных уравнений. Эта система функциональных уравнений связана с некоторыми задачами экономичности. В этих уравнениях через $g(x, y, z)$ обозначена функция, характеризующая экономичность, которая зависит от количества фабриката x , от времени производства y и от расходов производства z . Рассматривая отдельно системы уравнений (1), (2) соответственно (1), (3), мы получим интересные для практики обобщения. Дальнейшие обобщения даны уравнениями (16) и (32).