OSZILLATIONSSÄTZE FÜR EINEN TYP VON NICHTLINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

von

L. PINTÉR[1]

Einleitung

Die Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichungen verhalten sich in Bezug auf den Oszillationscharakter wesentlich anders als die der linearen. Im Falle einer linearen Differentialgleichung oszilliert entweder jede, oder aber keine der Lösungen, hingegen kann im nichtlinearen Fall vorkommen, dass gleichzeitig oszillatorische und auch nicht-oszillatorische Lösungen existieren (vgl. [1]).

Wir wollen in diesem Artikel die Lösungen der Differentialgleichungen

$$y'' + f(t)\, g(y)\, h(y') = 0$$

und allgemeiner der Differentialgleichungen

$$\text{(D)} \qquad y'' + \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, g_i(y)\, h_i(y') = 0$$

bezüglich der Oszillation untersuchen.

§ 1.

In diesem und im folgenden Paragraphen erweitern wir zwei Resultate von F. V. Atkinson [2] über die Differentialgleichung

$$y'' + f(t)\, y^{2k+1} = 0$$

auf den allgemeineren Typ (D). Wir werden unsere Resultate durch eine weitere Entwicklung der Methode von Atkinson erzielen.

Satz 1. *Es sei in der Differentialgleichung* (D), *für* $i = 1, \ldots, n$,
a) $f_i(t)$ *eine im Intervall* $[0, \infty)$ *definierte, positive, stetige Funktion,*
b) $g_i(t)$ *eine im Intervall* $(-\infty, \infty)$ *definierte, monoton wachsende, stetige Funktion mit* $\operatorname{sg} g_i(t) = \operatorname{sg} t$,
c) $h_i(t)$ *eine im Intervall* $(-\infty, \infty)$ *definierte, monoton wachsende, positive, stetige Funktion ; und man nehme weiter an :*
d) *es gibt ein* $a > 0$, *so dass* $g_i(t)$ *und* $h_i(t)$ *entweder im Intrevall* $[0, a]$, *oder im Intervall* $[-a, 0]$ *der Lipschitz-Bedingung genügen* $(i = 1, \ldots, n)$.

[1] Bolyai Institut der Universität, Szeged.

Es gelten dann die folgenden Behauptungen:

α) Damit alle Lösungen von (D) *oszillatorisch sind, ist es hinreichend, dass es mindestens für ein $k(1 \leqq k \leqq n)$*

$$\text{(A)} \qquad \int_0^\infty t f_k(t)\,dt = \infty$$

und für jedes $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{ds}{g_k(s)} < \infty\,, \qquad \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{ds}{g_k(s)} < \infty$$

gültig seien.

β) Für die Existenz einer nichtoszillatorischen Lösung von (D) *ist es hinreichend, dass*

$$\int_0^\infty t \sum_{i=1}^n f_i(t)\,dt < \infty$$

besteht.

Bemerkung. Man kann von der Behauptung des Satzes folgern, dass z. B. im Falle, in dem für jedes $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i=1}^n \left(\int_\varepsilon^\infty \frac{ds}{g_i(s)} + \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{ds}{g_i(s)} \right) < \infty$$

ist, die Gültigkeit der Relation

$$\text{(B)} \qquad \int_0^\infty t \sum_{i=1}^n f_i(t)\,dt = \infty$$

notwendig und hinreichend dazu ist, dass alle Lösungen der Differentialgleichung (D) oszillatorisch seien.

Beweis. Ad *α)* Wir nehmen an, dass es eine nicht-oszillatorische Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung (D) existiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass für $t \geqq b > 0$ auch $y(t) > 0$ ist. Es ist klar, dass $y'(t)$ im Intervall $[b, \infty)$ eine monoton abnehmende Funktion ist, also existiert $\lim y'(t)$ und ist nichtnegativ. Im Intervall $[b,\infty)$ is talso $y'(t) \geqq 0$, d. h. $y(t)$ eine nicht-abnehmende Funktion. Integrieren wir (D) von t_0 bis $t (b \leqq t_0 < t)$, so wird:

$$\text{(1)} \qquad y'(t) - y'(t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(y(s))\, h_i(y'(s))\,ds = 0\,.$$

Da nach den vorigen $\lim\limits_{t\to\infty} y'(t)$ existiert und nichtnegativ ist, wird:

$$\text{(2)} \qquad y'(t) \geqq \int_t^\infty \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(y(s))\, h_i(y'(s))\,ds \qquad \text{für} \quad t \geqq b\,.$$

Integrieren wir beide Seiten dieser Ungleichung von b bis t $(b < t)$, so bekommen wir mit einer einfachen Abschätzung:

$$y(t) \geqq \int_b^t (s-b) \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(y(s))\, h_i(y'(s))\, ds \geqq \int_b^t (s-b) f_k(s)\, g_k(y(s))\, h_k(y'(s)) ds, \tag{3}$$

wo $f_k(t)$ und $g_k(t)$ den im Satze angegebenen Bedingungen genügen. $g_k(t)$ und $h_k(t)$ sind wegen b) und c) monoton wachsende Funktionen, folglich hat man:

$$\frac{g_k(y(t))}{g_k\left(\int_b^t (s-b) f_k(s)\, g_k(y(s))\, h_k(y'(s))\, ds\right)} \geqq 1, \tag{4}$$

$$\frac{h_k(y'(t))}{h_k(0)} \geqq 1. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt

$$\frac{(t-b) f_k(t)\, g_k(y(t))\, h_k(y'(t))}{h_k(0)\, g_k\left(\int_b^t (s-b) f_k(s)\, g_k(y(s))\, h_k(y'(s))\, ds\right)} \geqq (t-b) f_k(t). \tag{6}$$

Integrieren wir (6) von t_1 bis t_2 $(b < t_1 < t_2)$ und führen wir die Bezeichnung:

$$G_k(t) = \int_b^t \frac{ds}{g_k(s)}$$

ein, so wird:

$$\frac{1}{h_k(0)}\left[G_k\left(\int_b^{t_2} (s-b) f_k(s)\, g_k(y(s))\, h_k(y'(s))\, ds\right) - \right.$$

$$\left. - G_k\left(\int_b^{t_1} (s-b) f_k(s)\, g_k(y(s))\, h_k(y'(s))\, ds\right)\right] \geqq \int_{t_1}^{t_2} (s-b) f_k(s)\, ds.$$

Wenn jetzt $t_2 \to \infty$, so bleibt die linke Seite dieser Ungleichung wegen der Existenz von $\lim_{t\to\infty} G_k(t)$ endlich, während die rechte Seite auf Grund von (A) über allen Grenzen wächst, was ein Widerspruch ist.

Damit haben wir Behauptung α bewiesen.

Ad β). Wir nehmen jetzt an, dass

$$\int_0^\infty t \sum_{i=1}^n f_i(t)\, dt < \infty$$

und die Bedingung d) im Intervall $[0, a]$ für $g_i(t)$ und $h_i(t)$ erfüllt ist, wo $0 < a < \infty$ besteht. Offenbar können wir $a \leqq 1$ bedingen.

Wir zeigen, dass in diesem Falle (D) eine nicht-oszillatorische Lösung hat.

Man kann durch Ableitung leicht zeigen, dass wenn die Gleichung

$$y(t) = a - \int_t^\infty (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i\big(y(s)\big)\, h_i\big(y'(s)\big)\, ds \tag{7}$$

mindestens eine gleichmässig beschränkte stetige Lösung hat, dann diese Lösung auch eine Lösung von (D) ist. Diese Lösung kann wegen

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = a \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} y'(t) = 0$$

gewiss nicht oszillatorisch sein.

Wir konstruieren durch sukzessive Approximation eine solche Lösung. Es sei

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= a,\\
y_2(t) &= a - \int_t^\infty (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i\big(y_1(s)\big)\, h_i\big(y_1'(s)\big)\, ds,\\
&\;\;\vdots\\
y_m(t) &= a - \int_t^\infty (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i\big(y_{m-1}(s)\big)\, h_i\big(y_{m-1}'(s)\big)\, ds,\\
&\;\;\vdots
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass die auf diese Weise angegebene Folge im Intervalle $[c, \infty)$ gleichmässig konvergent ist. (c bestimmen wir später.)

Erstens beweisen wir, dass ein Punkt $t_0 \geqq 0$ existiert, so dass im Intervall $[t_0, \infty)$ für jedes m gilt:

$$0 \leqq y_m(t) \leqq a \quad \text{und} \quad 0 \leqq y_m'(t) \leqq a\,. \tag{8}$$

Wir werden den Beweis durch vollständige Induktion durchführen. Für $m = 1$ ist (8) offensichtlich erfüllt. Im Falle $m = 2$ ist nach der Definition

$$y_2(t) = a - \int_t^\infty (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(a)\, h_i(0)\, ds\,,$$

$$y_2'(t) = \int_t^\infty \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(a)\, h_i(0)\, ds\,.$$

Wählen wir jetzt t_0 so gross, dass

$$2 \int_t^\infty (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(a)\, h_i(a)\, ds < a$$

und

$$2 \int_t^\infty \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(a)\, h_i(a)\, ds < a$$

gültig seien, falls $t \geqq t_0$. Solches t_0 existiert immer, da nach der Annahme

$$\int_0^\infty t \sum_{i=1}^n f_i(t)\, dt < \infty, \quad \text{und umso mehr} \quad \int_0^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t)\, dt < \infty .$$

Da die Funktionen $h_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ monoton wachsen, wird für $t \geqq t_0$

$$y_2(t) \geqq a - \int_t^\infty (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(a)\, h_i(a)\, ds > 0 ,$$

andererseits ist wegen

$$\int_t^\infty (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(a)\, h_i(0)\, ds > 0$$

$y_2(t) \leqq a$. Ferner ist

$$y_2'(t) = \int_t^\infty \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(a)\, h_i(0)\, ds \leqq \int_t^\infty \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(a)\, h_i(a)\, ds < a$$

für $t \geqq t_0$; und es ist offensichtlich, dass $y_2'(t) \geqq 0$ ist.

Wir nehmen jetzt an, dass

$$0 \leqq y_m(t) \leqq a\,; \quad 0 \leqq y_m'(t) \leqq a \quad \text{für} \quad t \geqq t_0$$

und zeigen, dass

$$0 \leqq y_{m+1}(t) \leqq a \quad \text{und} \quad 0 \leqq y_{m+1}'(t) \leqq a \quad \text{für} \quad t \geqq t_0 .$$

Nach der Definition ist

$$y_{m+1}(t) = a - \int_t^\infty (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(y_m(s))\, h_i(y_m'(s))\, ds \geqq$$

$$\geqq a - \int_t^\infty (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(a)\, h_i(a)\, ds \geqq 0 .$$

Andererseits hat man

$$\int_t^\infty (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(y_m(s))\, h_i(y_m'(s))\, ds \geqq 0 ,$$

und somit ist $y_{m+1}(t) \leqq a$, wenn $t \geqq t_0$.

In ähnlicher Weise ist

$$y_{m+1}'(t) = \int_t^\infty \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(y_m(s))\, h_i(y_m'(s))\, ds \geqq 0 ,$$

$$y_{m+1}'(t) \leqq \int_t^\infty \sum_{i=1}^n f_i(s) g_i(a)\, h_i(a)\, ds \leqq a , \quad \text{wenn} \quad t \geqq t_0 .$$

Somit haben wir bewiesen, dass für jedes m

$$0 \leqq y_m(t) \leqq a \quad \text{und} \quad 0 \leqq y_m'(t) \leqq a .$$

Die Funktionen $g_i(t)$ und $h_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ genügen im Intervall $[0, a]$ einer Lipsichtz-Bedingung, d. h.

$$|g_i(t) - g_i(s)| \leqq G_i |t-s| ,$$
$$|h_i(t) - h_i(s)| \leqq H_i |t-s| ,$$
$$i = 1, \ldots, n ; \quad t, s \in [0, a] .$$

Wählen wir jetzt ein t_1 so, dass für $t \geqq t_1$

$$2 \int_t^\infty (s + 1 - t) \sum_{i=1}^n f_i(s) [g_i(a) H_i + h_i(a) G_i]\, ds \leqq q < 1$$

ist. Offenbar existiert nach den auf die Funktionen $f_i(t)$ gestellten Forderungen ein solches t_1.

Wir beweisen, dass im Falle $m \geqq 2$ für $t \geqq t_1$

(9) $$|y_{m+1}(t) - y_m(t)| + |y_{m+1}'(t) - y_m'(t)| \leqq q^{m-1}$$

ist.

Wir schliessen durch vollständige Induktion. Für $m = 2$ ist

$$|y_3(t) - y_2(t)| + |y_3'(t) - y_2'(t)| \leqq$$

$$\leqq \int_t^\infty (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) \, |g_i(y_2(s))\, h_i(y_2'(s)) - g_i(y_1(s))\, h_i(y_1'(s))| \, ds \leqq$$

$$\leqq \int_t^\infty (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) \, [g_i(a) \, |h_i(y_2'(s)) - h_i(y_1'(s))| + h_i(a) \, |g_i(y_2(s)) -$$

$$- g_i(y_1(s))|] \, ds \leqq 2a \int_t^\infty (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) \, [g_i(a) \, H_i + h_i(a) \, G_i] \, ds \leqq q \, .$$

Die Behauptung gilt also für $m = 2$.

Wir nehmen jetzt an dass (9) für ein $m (\geqq 2)$ besteht und schliessen daraus auf die Gültigkeit von (9) für $m + 1$. Man hat nämlich

$$|y_{m+2}(t) - y_{m+1}(t)| + |y_{m+2}'(t) - y_{m+1}'(t)| \leqq$$

$$\leqq \int_t^\infty (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) \, |g_i(y_{m+1}(s))\, h_i(y_{m+1}'(s)) - g_i(y_m(s))\, h_i(y_m'(s))| \, ds \leqq$$

$$\leqq \int_t^\infty (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) \, [g_i(a) \, |h_i(y_{m+1}'(s)) - h_i(y_m'(s))| +$$

$$+ h_i(a) \, |g_i(y_{m+1}(s)) - g_i(y_m(s))| \,] \, ds \leqq$$

$$\leqq \int_t^\infty (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) \, [g_i(a) \, H_i \, |y_{m+1}'(s) - y_m'(s)| +$$

$$+ h_i(a) \, G_i \, |y_{m+1}(s) - y_m(s)| \,] \, ds \leqq$$

$$\leqq q^{m-1} \int_t^\infty (s+1-t) \sum_{i=1}^n f_i(s) \, [g_i(a) \, H_i + h_i(a) \, G_i] \, ds \leqq q^m \, ,$$

für $t \geqq t_1$.

Somit wurde (9) für jedes m und für $t \geqq t_1$ bewiesen. Nach unserer Annahme ist $0 < q < 1$, somit ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty q^n$ konvergent. Diese numerische Reihe ist nach (9) eine Majorante der Reihen

$$\sum_{n=1}^\infty |y_{n+2}(t) - y_{n+1}(t)| \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^\infty |y_{n+2}'(t) - y_{n+1}'(t)| \, ,$$

woraus die gleichmässigen Konvergenzen

$$y_n(t) \Rightarrow y(t) \quad \text{und} \quad y'_m(t) \Rightarrow y'(t)$$

folgen. Wir haben also bewiesen, dass eine Lösung $y(t)$ von (7) existiert, die im Intervall $[t_1, \infty)$ den Bedingungen $y(\infty) = a$ und $y'(\infty) = 0$ genügt, d. h. nicht-oszillatorisch ist.

Ist die Bedingung d) im Intervall $[-a, 0)$ erfüllt, so konstruieren wir mit der vorigen Methode statt (7) die Lösung von

$$(7') \qquad y(t) = -a - \int_t^\infty (s-t) \sum_{i=1}^n f_i(s)\, g_i(y(s))\, h_i(y'(s))\, ds\,.$$

§ 2.

Im folgenden Satz geben wir eine hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung

$$(\mathrm{D}^*) \qquad y'' + \sum_{i=1}^n f_i(t)\, g_i(y)\, h(y') = 0$$

eine nicht oszillatorische Lösung habe.

Satz 2. *Die Funktionen $f_i(t)$, $g_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $h(t)$ sollen den folgenden Bedingungen genügen :*

a) *$f_i(t)$ ist eine im Intervall $(0, \infty)$ definierte positive, stetig differenzierbare, monoton abnehmende Funktion $(i = 1, \ldots, n)$;*

b) *$g_i(t)$ ist eine im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte stetige, monoton wachsende Funktion, $\operatorname{sg} g_i(t) = \operatorname{sg} t$, ferner ist $g_i(t)$ submultiplikativ, d. h. $g_i(t_1 t_2) \leq g_i(t_1)\, g_i(t_2)$ für beliebiges t_1 und t_2; endlich ist $g_i(t) = O(t)$, wenn $t \to 0$;*

c) *$h(t)$ ist eine im Intervall $(-\infty, \infty)$ definierte positive, stetige Funktion mit*

$$\int_0^t \frac{s}{h(s)}\, ds \to \infty \quad \text{für} \quad t \to \infty\,.$$

Ist

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t)\, g_i(t)\, dt < \infty\,,$$

so ist jede im Intervall $[a, \infty)$ definierte Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung (D^*) *gleichmässig beschränkt, und für $t \to \infty$ strebt $y(t)$ nach einem von Null verschiedenen Grenzwert.*

Beweis. Erstens zeigen wir, dass wenn $y(t)$ eine im Intervall $[a, \infty)$ definierte Lösung der Differentialgleichung (D^*) ist, dann $y'(t)$ gleichmässig beschränkt ist. Wir zeigen diese Behauptung durch die Anwendung einer wohlbekannten Methode.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$H(t) = \int_0^t \frac{s\,ds}{h(s)}\,; \quad G_i(t) = \int_0^t g_i(s)\,ds\,,$$

$$E(t) = H(y'(t)) + \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, G_i(y(t))\,.$$

So wird

$$E'(t) = \frac{y'(t)\, y''(t)}{h(y'(t))} + \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, G_i(y(t)) + \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, g_i(y(t))\, y'(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i'(t)\, G_i(y(t)) \leqq 0.$$

$y'(t)$ ist also gleichmässig beschränkt.

Da die in der Differentialgleichung vorkommenden Funktionen ziemlich allgemein sind, kann man nicht hoffen, dass für die Lösungen auch Unizität bestehe. Es kann vorkommen, dass die Nullstellen nicht isoliert sind. Es ist aber offensichtlich, dass eine nicht-isolierte Nullstelle entweder ein innerer Punkt eines Intervalls ist, wo die Lösung verschwindet, oder aber ist sie ein Häufungspunkt von isolierten Nullstellen. Deswegen ist es klar, dass wenn eine Lösung oszillatorisch ist, dann isolierte Nullstellen im Intervall $t < a$ für beliebiges a existieren. Von der Differentialgleichung (D*) ist ersichtlich, dass die Lösung an jeder isolierten Nullstelle das Vorzeichen verändert, anderseits ist $y'(t)$ zwischen zwei nacheinanderfolgenden Nullstellen monoton wachsend, bzw. monoton abnehmend, je nachdem $y(t) > 0$, bzw. $y(t) < 0$ gilt. Es folgt von den bisherigen, dass es eine aus isolierten Nullstellen von $y(t)$ bestehende monoton zunehmende Folge $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}, \ldots, t_{n1}, t_{n2}, \ldots$ existiert, so dass im Intervall (t_{k1}, t_{k2}) $y(t) > 0$ ist und $y'(t)$ nur einmal, etwa im Punkte t_k^0, $(t_{k1} < t_k^0 < t_{k2})$ verschwindet.

Integrieren wir (D*) von t_{k1} bis t_k^0:

$$y'(t_k^0) - y'(t_{kl}) + \int_{t_{k_1}}^{t_k^0} \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, g_i(y(s))\, h(y'(s))\, ds = 0\,,$$

d. h.

$$y'(t_{k1}) = \int_{t_{k_1}}^{t_k^0} \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, g_i\,(y(s))\, h\,(y'(s))\, ds\,;$$

$y'(t)$ ist im Intervall (t_{k1}, t_k^0) monoton abnehmend, somit ist hier

$$0 \leqq y(t) \leqq y'(t_{k1})\,(t - t_{k1}),$$

Beachten wir diese Relation im vorigen Integral, so wird

$$y'(t_{k1}) \leqq \int_{t_{k_1}}^{t_k^0} \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, g_i\big(y'(t_{k1})(s - t_{kl})\big)\, h\big(y'(t_{k1})\big)\, ds \leqq$$

$$\leqq h\big(y'(t_{kl})\big) \int_{t_{k_1}}^{t_k^0} \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, g_i(s - t_{kl})\, g_i\big(y'(t_{kl})\big)\, ds$$

$y'(t_{k1}) > 0$ und, da $y'(t)$ gleichmässig beschränkt ist, hat man

$$1 \leqq K \int_{t_{k_1}}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, g_i(s)\, ds\,.$$

Das ist aber ein Widerspruch.

§ 3.

Es ist leicht zu beweisen, dass im Falle der linearen Differentialgleichungen die Bedingung (B) notwendig dazu ist, dass alle Lösungen oszillatorisch seien. Das folgende Beispiel zeigt aber, dass diese Bedingung nicht hinreichend ist. Betrachten wir die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{4(t+1)^2}\, y = 0\,.$$

Es ist hier

$$\int_0^{\infty} t f(t)\, dt = \int_0^{\infty} \frac{t}{4(t+1)^2}\, dt = \infty\,,$$

und eine Lösung dieser Differentialgleichung ist $\sqrt{t+1}$, die nicht-oszillatorisch ist.

Man kann die folgende Frage stellen: Existiert immer eine stetige Funktion $f(t) > 0$ derart, dass die Differentialgleichung

$$y'' + f(t)\, g(y) = 0$$

eine nicht-oszillatorische Lösung hat, falls $g(t)$ solche Eigenschaften besitzt, wie im b), mit der Ausnahme der Bedingung

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} = \infty,$$

Die Antwort auf diese Frage ist bejahend. Es sei nämlich

$$f(t) = \frac{1}{4(t+1)^{\frac{3}{2}}\, g\big((t+1)^{\frac{1}{2}}\big)}\,.$$

Wir zeigen zuerst, dass $\int\limits_0^\infty (t+1)\,f(t)\,dt = \infty$; daraus folgt offensichtlich auch $\int\limits_0^\infty tf(t)\,dt = \infty$. Nun ist

$$\int\limits_0^s (t+1)\,f(t)\,dt = \int\limits_0^s (t+1)\frac{1}{4(t+1)^{\frac{3}{2}}g\big((t+1)^{\frac{1}{2}}\big)}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_1^{(s+1)^{\frac{1}{2}}}\frac{du}{g(u)} \to \infty$$

für $s \to \infty$.

Die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{4(t+1)^{\frac{3}{2}}\,g\big((t+1)^{\frac{1}{2}}\big)}\,g(y) = 0$$

hat nicht-oszillatorische Lösungen, eine solche ist z. B. $y = \sqrt{t+1}$.

Geben wir jetzt hinreichende Bedingungen dafür an, dass alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\text{(D)} \qquad y'' + \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\,g_i\big(y(t)\big)\,h_i\big(y'(t)\big) = 0,$$

wo $f_i(t)$, $g_i(t)$ und $h_i(t)$ solche Funktionen sind, wie im ersten Satz, oszillatorisch seien.

Die erste leicht beweisbare Bemerkung ist die folgende:
Wenn für mindestens ein $k\,(1 \leqq k \leqq n)$

$$\int\limits_0^\infty f_k(t)\,dt = \infty\,,$$

dann ist jede Lösung von (D) oszillatorisch.

Angenommen, es gebe eine nicht-oszillatorische Lösung $y(t)$, dann ist $y(t) > 0$ für $t \geqq a$ und $y'(t)$ ist eine monoton abnehmende nichtnegative Funktion. Nach Integration der Differentialgleichung (D) bekommen wir durch eine einfache Abschätzung:

$$y'(a) - y'(t) = \int\limits_a^t \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\,g_i\big(y(s)\big)\,h_i\big(y'(s)\big)\,ds \geqq g_k\big(y(a)\big)\,h_k(0)\int\limits_a^t f_k(s)\,ds.$$

Das ist aber ein Widerspruch, da die rechte Seite über allen Grenzen wächst, die linke Seite aber wegen $y'(a) \geqq y'(t) \geqq 0$ endlich bleibt.

Im folgenden wollen wir einen Satz beweisen, der ähnlich zu dem für die linearen Differentialgleichungen bestehenden Satze von M. Zlámal [3] ist. Durch die Anwendung unseres Satzes können wir in gewissen Fällen bezüglich unserer Frage auch schärfere Resultate erreichen als bei dem obigen Satze.

Satz 3. *Es seien $f_i(t)$, $g_i(t)$, $h_i(t)$ wie in Satz* 1 [a), b), c)] *und wir nehmen an, dass es eine im Intervall* $[0, \infty)$ *definierte, positive, stetig differenzierbare Funktion* $\alpha(t)$ *gibt, die den folgenden beiden Bedingungen genügt :*

1) *für mindestens ein* $k\,(1 \leqq k \leqq n)$ *ist* $\frac{g_k(t)}{t}$ *eine im Intervall* $(-\infty, 0)$ *monoton wachsende, im Intervall* $(0, \infty)$ *aber monoton abnehmende Funktion, und für jedes* $\varepsilon > 0$ *ist*

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \alpha(t)\, f_k(t) \frac{g_k(t)}{t}\, dt = \infty ,$$

2)
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\alpha'^2(t)}{\alpha(t)}\, dt < \infty .$$

Dann ist jede Lösung der Differentialgleichung

$$\text{(D)} \qquad y'' + \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, g_i(y) h_i(y') = 0$$

oszillatorisch.

Beweis. Wir nehmen an, dass es eine nicht-oszillatorische Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung (D) gibt. Man kann annehmen, dass für $t \geqq a$, $y(t) > 0$ ist. Aus der Differentialgleichung (D) bekommen wir, dass

$$\left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' = \frac{y''(t)\, y(t) - y'^2(t)}{y^2(t)} = - \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \frac{g_i(y(t))}{y(t)} h_i(y'(t)) - \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)^2 .$$

Multiplizieren wir jetzt beide Seiten mit $\alpha(t)$. Nach partieller Integration von t_1 bis t erhält man unter Verwendung der Schwarzschen Ungleichung:

$$\alpha(t) \frac{y'(t)}{y(t)} = \alpha(t_1) \frac{y'(t_1)}{y(t_1)} - \int_{t_1}^{t} \alpha(s) \sum_{i=1}^{n} f_i(s) \frac{g_i(y(s))}{y(s)} h_i(y'(s))\, ds -$$

$$- \int_{t_1}^{t} \alpha(s) \left(\frac{y'(s)}{y(s)}\right)^2 ds + \int_{t_1}^{t} \alpha'(s) \frac{y'(s)}{y(s)}\, ds \leqq \alpha(t_1) \frac{y'(t_1)}{y(t_1)} -$$

$$- \int_{t_1}^{t} \alpha(s) \sum_{i=1}^{n} f_i(s) \frac{g_i(y(s))}{y(s)} h_i(y'(s))\, ds - \int_{t_1}^{t} \alpha(s) \left(\frac{y'(s)}{y(s)}\right)^2 ds +$$

$$+ \left\{ \int_{t_1}^{t} \frac{\alpha'^2(s)}{\alpha(s)}\, ds \int_{t_1}^{t} \alpha(s) \left(\frac{y'(s)}{y(s)}\right)^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Also ist

$$\alpha(t)\frac{y'(t)}{y(t)} \leqq K_1 - \int_{t_1}^{t} \alpha(s) \sum_{i=1}^{n} f_i(s) \frac{g_i(y(s))}{y(t)} h_i(y'(s))\, ds \leqq$$

$$\leqq K_1 - \int_{t_1}^{t} \alpha(s) f_k(s) \frac{g_k(y(s))}{y(s)} h_k(y'(s))\, ds,$$

wo K_1 eine geeignete positive Konstante ist.

Beachten wir jetzt a), b) und c), so erhalten wir, dass $y(t)$ für $t \geqq a$ monoton wachsend, $y'(t)$ aber monoton abnehmend ist; daraus folgt, dass $y(t) \leq y(a) + y'(a)(t-a)$. $y'(a) > 0$, somit ist von einem t_0 $y(t) \leq K_2 t$, wo $K_2 \geqq 1$ eine geeignete Konstante bedeutet. Es sei $t_1 \geqq t_0$, dann wird unter Verwendung von 1.:

$$\alpha(t)\frac{y'(t)}{y(t)} \leqq K_1 - h_k(0) \int_{t_1}^{t} \alpha(s) f_k(s) \frac{g_k(K_2 s)}{K_2 s}\, ds \leqq K_1 - \frac{h_k(0)}{K_2} \int_{t_1}^{t} \alpha(s) f_k(s) \frac{g_k(s)}{s}\, ds.$$

Die rechte Seite wird wegen 1) für hinreichend grosse t negativ. Das ist aber ein Widerspruch, da nach unserer Annahme $\alpha(t)\dfrac{y'(t)}{y(t)} > 0$ ist. Somit ist der Satz bewiesen.

Wir geben eine Anwendung. Es sei

$$\alpha(t) = \frac{(t+1)^{2-\varepsilon}}{g(t+1)},$$

mit konstantem $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$\frac{\alpha'^2(t)}{\alpha(t)} = (2-\varepsilon)^2 \frac{(t+1)^{-\varepsilon}}{g(t+1)} - \frac{2(2-\varepsilon)(t+1)^{1-\varepsilon} g'(t+1)}{g^2(t+1)} +$$

$$+ \frac{(t+1)^{2-\varepsilon} g'^2(t+1)}{g^3(t+1)}.$$

Ist $g'(t)$ gleichmässig beschränkt, so ist für die Gültigkeit von

$$\int_0^\infty \frac{\alpha'^2(s)}{\alpha(s)}\, ds < \infty$$

hinreichend, dass ε so gross sei, dass

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(t+1)^\varepsilon g(t+1)} < \infty$$

bestehe. Jetzt ist die erste Bedingung:

$$\int_a^\infty \alpha(t)\, f_k(t) \frac{g(t)}{t}\, dt = \int_a^\infty t^{1-\varepsilon} f_k(t) \frac{(t+1)^{2-\varepsilon}}{t^{2-\varepsilon}} \frac{g(t)}{g(t+1)}\, dt = \infty\,.$$

Das bedeutet, dass

$$\int_0^\infty t^{1-\varepsilon} f_k(t)\, dt = \infty$$

hinreichend ist dazu, dass jede Lösung von (D) oszillatorisch sei.

§ 4.

Sind die Bedingungen a), b) und c) im Satze 1 gültig, so sind alle nicht-oszillatorische Lösungen der Differentialgleichung (D) monoton, im Intervalle (b, ∞), wo b genügend gross ist. In dem Beweis des Satzes 1 haben wir gezeigt, dass im Falle $\int_0^\infty t \sum_{i=1}^n f_i(t)\, dt < \infty$, und $\alpha \neq 0$, eine solche Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung (D) existiert, für welche $\lim_{t\to\infty} y(t) = \alpha$. Wir werden jetzt über die nicht-beschränkte, nicht-oszillatorische Lösungen der Differentialgleichung (D) beweisen, dass

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{t} = p \neq 0$$

ist. Die Beweisführung ist ähnlich zu der von R. A. Moore und Z. Nehari [1].

Satz 4. *Sind die Bedingungen des Satzes 1 gültig, und sind die Funktionen $\frac{g_i(t)}{t}$ für $t \geqq 0$ monoton wachsend und für $t \leqq 0$ monoton abnehmend $(i = 1, \ldots, n)$, ferner ist $g_i(st) \leqq g_i(s)\, g_i(t)$ und*

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t)\, g_i(t)\, dt < \infty\,,$$

so ist die nicht-oszillatorische Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung (D) *entweder gleichmässig beschränkt, oder es ist*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{t} = p \neq 0\,.$$

Beweis. $y(t)$ sei eine nicht-oszillatorische, nichtbeschränkte Lösung der Differentialgleichung (D). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass für $t \geqq a$, $y(t) > 0$ ist. Diese Lösung ist also im Intervall

$[a, \infty)$ monoton wachsend. Integrieren wir (D) zweimal von a_1 bis $t (a_1 > a \geqq 0)$. Wir bekommen dann:

$$y(t) = y(a_1) + (t - a_1)\, y'(t) + \int_{a_1}^{t} (s - a_1) \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, g_i(y(s))\, h_i(y'(s))\, ds \tag{1}$$

Da $y'(a) > 0$ ist, so für ein geeignetes α, $\alpha y'(a) \geqq y(a)$, und so bekommen wir mit Benützung des Lagrangeschen Mittelwertsatzes, dass für

$$t > \max(|\alpha - a|, a) = \beta\,,$$

$$y(t) \leqq y(a) + y'(a)(t - a) \leqq y'(a)(t + \alpha - a) \leqq 2y'(a)\, t \tag{2}$$

ist. Wählen wir jetzt a_1 so gross, dass $a_1 > \beta$ sei, dann wird wegen (2)

$$1 \leqq \frac{y(a_1)}{y(t)} + \frac{ty'(t)}{y(t)} + \int_{a_1}^{t} s \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, \frac{g_i(2y'(a))\, g_i(s)}{2y'(a)\, s}\, h_i(y'(s))\, ds \leqq$$

$$\leqq \frac{y(a_1)}{y(t)} + \frac{ty'(t)}{y(t)} + \frac{1}{2\,y'(a)} \int_{a_1}^{t} \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, g_i(2y'(a))\, g_i(s)\, h_i(0)\, ds\,.$$

Es ist immer möglich für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein a^* zu finden, so dass für $a_1 > a^*$

$$\frac{1}{2y'(a)} \int_{a_1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, g_i(2y'(a))\, g_i(s)\, h_i(0)\, ds < \varepsilon$$

sei. Dann bekommen wir aus (3) für $a_1 > a^*$

$$1 - \varepsilon \leqq \frac{y(a_1)}{y(t)} + \frac{ty'(t)}{y(t)}\,.$$

Wegen der Voraussetzung $y(t) \to \infty$, ist nach (D) offensichtlich, dass $y(t)$ von unten konkav ist, d. h.

$$y'(t) \leqq \frac{y(t) - y(a)}{t - a} \leqq \frac{y(t)}{t}\, \frac{t}{t - a}\,,$$

also

$$1 - \varepsilon \leqq \frac{y(a_1)}{y(t)} + \frac{t}{t - a}\,.$$

Da ε beliebig klein sein kann, und die rechte Seite gegen 1 konvergiert $(t \to \infty)$, folgt die Gültigkeit der Relation:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{ty'(t)}{y(t)} = 1\,. \tag{4}$$

Wir müssen noch beweisen, dass $y'(t)$ eine positive untere Grenze hat. Wählen wir a_1 so gross, dass $ty'(t) > (1 - \varepsilon)\, y(t)$, falls $t > a_1$ ist, dann bekommen wir

$$(1-\varepsilon)\big(y'(a_1) - y'(t)\big) = (1-\varepsilon)\int_{a_1}^{t} \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\, g_i\big(y(s)\big)\, h_i\big(y'(s)\big)\, ds =$$

$$= \int_{a_1}^{t} \sum_{i=1}^{n} f_i(s) \frac{g_i(y(s))}{y(s)} (1-\varepsilon)\, y(s)\, h_i(y'(s))\, ds \leqq$$

$$\leqq \int_{a_1}^{t} \sum_{i=1}^{n} f_i(s) \frac{g_i(y(s))}{y(s)}\, s\, y'(s)\, h_i(y'(s))\, ds \leqq$$

$$\leqq \int_{a_1}^{t} \sum_{i=1}^{n} f_i(s) \frac{g_i(2y'(a_1))}{2y'(a_1)} \frac{g_i(s)}{s} sy'(a_1)\, h_i(0)\, ds \leqq y'(a_1) \max_{1\leqq i\leqq n} h_i(0)\, \varepsilon\,,$$

d. h.

$$y'(a_1)\big(1 - \varepsilon(1 + \max_{1\leqq i\leqq n} h_i(0))\big) \leqq y'(t)\,(1-\varepsilon)\,.$$

Ist $\varepsilon < (1 + \max h_i(0))^{-1}$, so folgt aus der vorigen Ungleichung, dass $y(t)$ für $t \geqq a$ eine positive untere Grenze p hat. Da $y'(t)$ monoton abnehmend ist, wird $\lim\limits_{t\to\infty} y'(t) = p$ bestehen.

Aus (4) bekommen wir also:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{t} = p\,.$$

Bemerkung 1. Die Abschätzung $|\, y(t)\, | \leqq Kt$ ist auch für allgemeinere Differentialgleichungen gültig. Betrachten wir die Differentialgleichung (D). Für die Funktionen $f_i(t), g_i(t), h_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ seien die Bedingungen des Satzes 1 erfüllt, ferner seien die $g_i(t)$ submultiplikativ, $|\, g_i(t)\, | \leqq cg_i(|\, t\, |)$, wo $c > 0$ konstant ist, und die $h_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ seien gleichmässig beschränkte Funktionen, $f_i(t)$ müssen aber jetzt nicht positiv sein. Die Anwendung des verallgemeinerten Bellmanschen Lemmas [4] ergibt, dass

$$|y(t)| \leqq Kt\,,$$

wenn $\int\limits_a^\infty \sum\limits_{i=1}^{n} |\, f_i(s)\, |\, g_i(s)\, ds < \infty$ und der Wertbereich der Funktionen $G_i(t) = \int\limits^t \frac{ds}{g_i(s)}$ die ganze Gerade ist.

Es ist leicht zu beweisen, dass auch $y'(t)$ gleichmässig beschränkt ist.

Bemerkung 2. Wir werden jetzt noch einen Satz formulieren.

Satz 5. *Sind die Bedingungen* a), b), c) *des Satzes* 1, 2 *erfüllt, dann ist die Gültigkeit der Bedingung* d) *notwendig und hinreichend dafür, dass eine Lösung* $y(t)$ *existiere, für die*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{t}=a\neq 0$$

ist.

Dieser Satz ist mit den vorigen Methoden leicht beweisbar.

(Eingegangen: 20. April, 1961.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Moore, R. A.—Nehari, Z.: „Nonoscillation theorems for a class of nonlinear differential equations". *Trans. Amer. Math. Soc.* **93** (1959) 30—52.

[2] Atkinson, F. V.: „On second-order non-linear oscillations". *Pacific J. Math.* **5** (1955) 643—647.

[3] Zlámal, M.: „Oscillation criterions". *Cas. Mat. Phys.* **75** (1950) 217—221.

[4] Bihari, I.: „A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations." *Acta Math. Hungarica* **7** (1956) 81—95.

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОГО ТИПА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

L. PINTÉR

Резюме

Теорема 1. Все решения уравнения (D) колеблющиеся, если выполняются условия:

а) $f_i(t)>0$, непрерывная функция, $1\leqq i\leqq n$, $0\leqq t<\infty$,

б) $g_i(t)$ непрерывная, возрастающая функция, $\mathrm{sg}\, g_i(t)=\mathrm{sg}\, t$, $-\infty<t<\infty$, $1\leqq i\leqq n$,

в) $h_i(t)>0$ непрерывная, возрастающая функция, $1\leqq i\leqq n$,

г) является такой $a>0$, что $g_i(t)$ и $h_i(t)$ $(i=1,2,\dots,n)$ либо в $[-a,0]$, либо в $[0,a]$ удовлетворяют условием Липшица,

д) является $k(1\leqq k\leqq n)$, что

$$\int_0^\infty t\, f_k(t)\, dt=\infty$$

и если $\varepsilon>0$, то

$$\int_\varepsilon^\infty\frac{ds}{g_k(s)}<\infty,\qquad \int_{-\varepsilon}^{-\infty}\frac{ds}{g_k(s)}<\infty,$$

Если же

$$\int_0^\infty t \sum_{k=,}^{n} f_k(t)\, dt < \infty\,,$$

то (D) обладает неколеблющиеся решениями. (Но может быть, что существуют и колеблющиеся решения.)

Теорема 3. $f_i(t)$, $g_i(t)$ и $h_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ такие же, как в теореме I. Существует $\alpha(t) > 0$ $(0 \leq t < \infty)$ непрерывно дифференцируемая функция, и

1) существует по крайней мере одно k $(1 \leq k \leq n)$, что $\dfrac{g_k(t)}{t}$ возрастающая в $(-\infty, 0)$, и убывающая в $(0, \infty)$, и если $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\infty \alpha(t)\, f_k(t) \frac{g_k(t)}{t}\, dt = \infty$$

(2) $$\int_0^\infty \frac{\alpha'^2(t)}{\alpha(t)}\, dt < \infty\,,$$

то решения (D) колеблющиеся.

Теорема 4. $f_i(t)$, $g_i(t)$ и $h_i(t)$ удовлетворяют условием а, б, в теоремы 1 и функция $\dfrac{g_i(t)}{t}$ возрастающая если $t \geqq 0$, и убывающая если $t \leqq 0$, $g_i(st) \leqq$ $\leqq g_i(s)\, g_i(t)$ и

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\, g_i(t)\, dt < \infty,$$

то неколеблющиеся решения (D) либо равномерно ограниченная либо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{t} = p \neq 0.$$