

EÖTVÖS-INGA MÉRÉSEK FELHASZNÁLÁSÁNAK LEHETŐSÉGEI A GRADIOMETRIAI PEREMÉRTÉK- FELADAT MEGOLDÁSAIBAN

Szűcs Eszter*, Benedek Judit*



Possible applications of Eötvös torsion balance measurements in the practical evaluation of gradiometric boundary value problems – Based on numerical evaluation of integral transforms of synthetic gravity field quantities with different kernel modification of gradiometric boundary value problems it was investigated that in which frequency band could gravity gradients measured by Eötvös torsion balance contribute to gravity field recovery and refinement of gravity field features. Special attention was paid to integral equations of transforming horizontal gravity gradients to vertical gravity gradient, gravity anomaly and potential. Closed-loop differences between gravity field quantities derived from horizontal gradients via integral transformations and their “true” value were analysed for various wavelength bands both in space and in frequency domain.

Keywords: gradiometric boundary value problem, synthetic data sets, spectrally modified integral kernels

A gradiometriai peremérték-feladatok numerikus megoldásai során a magfüggvény módosításain keresztül szintetikus adatok felhasználásával vizsgáltuk, hogy az Eötvös-ingával mérhető horizontális gradiensek mely frekvenciatartományokban használhatók fel a nehézségi erőter meghatározása, pontosítása során. A vizsgálatokat a horizontális gradienseket vertikális gradienssé, gravitációs anomáliává és potenciálzavarrá transzformáló felületi integrálokra végeztük el. A szintetikus adatok felhasználásával adekvát módon meghatározhatóak és értelmezhetőek a gradiensekből számított erőtermenységek és azok valódi értékei közötti eltérések, melyeket különböző hullámhosszakon mind tér- mind frekvenciatartományban megvizsgáltunk.

Kulcsszavak: gradiens peremérték-feladatok, szintetikus adatrendszerek, magfüggvény módosítás

1 Bevezetés

A geoidmodellezés gyakorlati célja, hogy kapcsolatot teremtsen az ellipszoid feletti magasságok és a mindennapokban használt tengerszint feletti magasságok között. A nehézségi erőter modellezésben, különösen a nagy pontosságú geoidszámításban a cél általában a cm-pontosságú geoidmodell előállítás. A geoidfelület leírásában jellemzően a nagy hullámhosszúságú összetevők dominálnak, azonban ha a geoidot a spektrális tartományban vizsgáljuk, akkor az erőter spektrumát globálisan leíró analitikus modellek alapján (pl. Tscherning és Rapp 1974) körülbelül $l = 10000$ fokszámig kell elvégezni a sorfejtést, hogy a magas frekvenciás tagok elhanyagolásából származó hiba hatása 1 cm alatt maradjon. Az egyedülállóan nagy felbontású globális geopotenciál modell, az EGM2008 (Pavlis et al. 2012), is „csak” $l = 2160$ fokszámig tartalmazza az erőter spektrumát leíró együtthatókat, így a gyakorlati megoldásoknál különböző típusú mért nehézségi erőter mennyiségek és a topográfiát leíró digitális domborzatmodellek felhasználásával állítják elő a geoid közepes és magas frekvenciás összetevőit.

Mivel a mért erőtermenységek nagy felbontásban csak korlátozott területre állnak rendelkezésre, így ezek a különböző geodéziai peremérték-feladatok integrál-transzformációs megoldásaiban használhatók fel az erőter meghatározásához. Vizsgálataink a geodéziai peremérték-feladatok megoldásait leíró, a nehézségi erőter különböző paramétereit közötti kapcsolatot megteremtő felületi integrálok, ezek közül is az Eötvös-ingával mért horizontális gradienseken alapuló megoldások gyakorlati számításainak kérdéseire koncentrálnak.

2 A gradiometriai peremérték-feladatok

A matematikában a peremérték-feladat egy adott tartományon értelmezett differenciálegyenletek és a tartomány határán előírt peremfeltételek együttese. A peremérték-feladat megoldása a differenciálegyenlet megoldásai közül az, amely a peremfelületen eleget tesz az előírt peremfeltételeknek. A geodéziai peremérték-feladatok a Föld tömegét tartalmazó zárt Ω felületen kívül harmonikus W nehézségi erőter-potenciálra felírható másodrendű elliptikus differenciálegyenlet – a $\Delta W = 0$ Laplace egyenlet – megoldásán keresztül a Föld alakjának és nehézségi erőterének meghatározására irányulnak a Föld felszínén vagy annak külső terében végzett mérések (peremértékek) alapján. A nehézségi erőterben meghatározható mennyiségek nemlineáris függvénykapcsolatban állnak a nehézségi erőter W potenciáljával. Mivel a nemlineáris peremérték-feladat megoldása nem ismert, ezért a megoldás linearizálással történik (Torge 2001, Denker 2013). A különböző f erőtermennyiségek az \mathbf{r} helyvektornak és a nehézségi erőter W potenciáljának függvényei $f = F(\mathbf{r}, W)$.

A peremértékek linearizálásához valamely alkalmasan választott \mathbf{r}_0 közelítő felület és U referencia-potenciálfüggvény szükséges, azaz $f = F(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}, U + T)$. Ismert peremfelület esetén a referenciapotenciállal történő linearizálás *zavar* típusú peremértékeket eredményez, míg ismeretlen peremfelület esetén a helyvektor és a referenciapotenciál szerinti linearizálással *anomália* típusú peremértékekhez jutunk. A geodéziai peremérték-feladatok megoldása során a Föld alakját a telluroiddal (peremfelület: fizikai földfelszín) vagy az ellipszoiddal (peremfelület: geoid) közelítjük, nehézségi erőterét pedig a normál nehézségi erőterrel, vagy a különböző közelítési hibák hatásának csökkentése érdekében, valamely rendelkezésre álló geopotenciális modellből meghatározható erőterrel.

A peremérték-feladatok analitikus, zárt alakú megoldásait leggyakrabban a peremfelület egy R sugarú gömbbel való közelítésével határozzák meg. Ezek a megoldások alkotják a különböző, a gömb alaktól eltérő (ellipszoid, fizikai földfelszín) peremfelületekre vonatkozó iteratív megoldások domináns tagjait.

Gömb alakú peremfelület esetén peremérték-feladatok megoldása megadható gömbfüggvénysor és felületi integrál összefüggés alakjában. Az utóbbinak nagy előnye, hogy lokális számítások esetén előnyösen használható (Jekeli 2009), mivel a peremérték-feladatot megoldó Green-függvények (integrál-magfüggvények) a számítási pont és adatpont közötti távolsággal vagy annak hatványaival fordítottan arányosak, így a távoli adatpontok (peremértékek) kicsiny változása nem okoz jelentős változást a megoldásban.

A geodéziai peremérték-feladatok lehetővé teszik bármely erőter-paraméter meghatározását a peremfelületen és a vonzó tömegon kívüli térben a peremfelületen adott erőter mennyiségből. A következőkben az R sugarú gömbön értelmezett gradiometriai peremérték-feladatok megoldásai közül a horizontális gradienseken alapuló megoldásokat vizsgáljuk, azaz azokat az összefüggéseket, melyek az Eötvös-inga által mért horizontális gradienseket valamely más, a gyakorlat szempontjából könnyebben hasznosítható erőtermennyiségekké (potenciálzavar, gravitációs anomália, vertikális gravitációs gradiens) transzformálják.

2.1 A gradiometriai peremérték-feladatok jelentősége

A geodéziai peremérték-feladatok a Föld alakjának és nehézségi erőterének meghatározását teszik lehetővé a különböző erőterre végzett mérések (peremértékek) alapján. A hagyományos gravimetriai peremérték-feladat, a Stokes-integrál – a klasszikus harmadfajú peremérték feladat megoldása gömb alakú peremfelület esetén – mellett az új típusú mérési mennyiségek, különösen GOCE műhold által mért nehézségi erőter gradiensek új típusú peremérték-feladatok megoldásaihoz vezettek.

Magyarországon egyedülállóan nagy számban állnak rendelkezésre a nehézségi erőter második deriváltjaival kapcsolatos földfelszíni gradiens mérések. Az Eötvös-inga mérések, amelyeket elsősorban geofizikai nyersanyagkutatás, vagyis a lokális, maximum 2000 m - 3000 m mélységű sűrűség-rendellenességek térképezése céljából végeztek, elméletileg jól felhasználhatóak a nehézségi erőter, kifejezetten annak nagyfrekvenciás összetevőjének meghatározásában. A geoid finomszerkezete meghatározásának egyik módja a görbületi gradiensekből nem túl távoli pontok esetében vonal-

integrál alkalmazásával függővonal-elhajlás értékek számítása (Ullmann 2013), vagy hasonló eljárással a horizontális gradiensekből gravitációs anomáliák (Völgyesi et al. 2007) meghatározása. Azonban a mért gradiensértékek közvetlenül is felhasználhatók a regionális geoidmeghatározás gravimetriai (Bíró et al. 2013) – azaz az erőterménységek egymás közötti fizikai kapcsolatán alapuló – módszereiben, így a legkisebb négyzetes kollokáció (Tóth 2009) vagy a különböző geodéziai peremérték-feladatok eljárásaiban.

Van Gelderen és Rummel (2001, 2002) általános levezetést adtak a potenciálzavart megadó túlhatározott, különböző típusú nehézségi erőter-mennyisek kombinációján alapuló peremérték-feladatokra, mind ismert, mind ismeretlen peremfelület esetén. Az általuk meghatározott gradiometriai peremérték-feladatokat Martinec (2003) továbbfejlesztette és megadta a peremérték-feladatokat megoldó függvények zárt alakját $r > R$ számítási pont esetére. Tóth (2002, 2003) levezette a potenciálzavar, valamint a nehézségi rendellenesség meghatározására szolgáló, kizárólag az Eötvös-inga által mérhető gradiens és görbületi értékeket felhasználó túlhatározott peremérték-feladat megoldását. Tóth et al. (2005) vizsgálták a GOCE műhold által mért vertikális gradiens validálási lehetőségét földfelszíni gradiens értékek alapján. Šprlák et al. (2014) a gradiometriai peremérték-feladatok Martinec-féle (2003) analitikus megoldásai alapján meghatározták az Eötvös-tenzor valamennyi elemét előállító integrál-összefüggéseket, ezzel lehetővé téve a GOCE műhold által mért valamennyi gradiens ellenőrzését földfelszíni, mért gradiens adatok alapján. Munkájukkal a műhold pályamagasságából a földfelszínre számítható gradiensekkel (mért gradiensek lefele folytatása) a különböző geofizikai, a Föld belső sűrűségeloszlásának pontosítására irányuló kutatásokhoz is hozzájárultak.

2.2 A horizontális gradienseken alapuló gradiometriai peremérték-feladatok megoldása

Jelen tanulmány kizárólag a horizontális gradienseket más, a gyakorlatban könnyebben hasznosítható mennyiségekké átranzformáló (egyértelműen meghatározott) peremérték-feladatok gyakorlati számításainak kérdéseit vizsgálja. A számítások az $r = R$ esetre korlátozódnak, az integrál-összefüggések meghatározásánál a peremfelületet ismertnek tételezzük fel. A túlhatározott gradiometriai peremérték-feladatok megoldásai megtalálhatók Rummel és Teunissen (1989), van Gelderen és Rummel (2001, 2002) valamint Tóth (2002, 2003) és Tóth et al. (2002) munkáiban, melyekből speciális eseként levezethető a kizárólag horizontális gradienseken alapuló megoldás, amely alapvető összefüggéseit itt közöljük.

A gömb geometriájának következtében valamely, a σ egységgömb felületén értelmezett négyzetesen integrálható függvény kétváltozós Fourier-spektrumának meghatározásához speciális ortonormális bázisfüggvény-rendszer szükséges.

A potenciálzavar gömbfüggvénysor alakban $P(\lambda, \varphi, r)$ pontban

$$T(P) = k \sum_{lm} T_{lm} Y_{lm}(P), \tag{1}$$

ahol $T_{lm} = \frac{\bar{C}_{lm}}{\bar{S}_{lm}}$ a potenciálzavar együtthatói,

$$Y_{lm}(\lambda, \varphi, r) = \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \begin{cases} \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \cos m\lambda, & m \geq 0 \\ \bar{P}_{lm}(\sin \varphi) \sin |m|\lambda, & m < 0 \end{cases} \quad \text{a skalár értékű térbeli gömb-}$$

függvényeket (bázisfüggvények) jelöli,

l és m a fok- és rendszámnak nevezett hullámszámok,

$\bar{P}_{lm}(\sin \varphi)$ a normalizált Legendre-függvények,

k egy, a skálázást biztosító konstans (a továbbiakban eltekintünk tőle),

R a referencia sugár.

A T_{lm} együtthatók a felületi gömbfüggvények ortogonalitása alapján határozhatók meg

$$T_{lm} = \iint_{\sigma} T(P) Y_{lm}(P) d\sigma. \quad (2)$$

A tömegvonzási erőter különböző paraméterei funkcionál-kapcsolatban állnak a potenciálzavarral: valamely f erőtermenység a potenciálzavarból a gravitációs paramétert definiáló \mathcal{L} differenciáloperátor alkalmazásával nyerhető. A tértartományban alkalmazott operátor λ_l spektrumbeli sajátértéke pedig a potenciálzavar és a gravitációs erőterhez kapcsolódó mennyiség spektrumbeli együtthatósora között teremt kapcsolatot ($\lambda_l \neq 0$)

$$\begin{array}{ccc} \text{tértartomány} & & \text{spektrális tartomány} \\ f = \mathcal{L}(T) & \leftrightarrow & f_{lm} = \lambda_l T_{lm} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ T = \mathcal{L}^{-1}(f) & \leftrightarrow & T_{lm} = \frac{1}{\lambda_l} f_{lm}. \end{array} \quad (3)$$

Az (1)-hez hasonlóan valamely erőtermenység felírható

$$f(P) = \sum_{lm} f_{lm} \mathbf{X}_{lm}(P) \quad (4)$$

alakban, ahol \mathbf{X}_{lm} szintén egy olyan ortonormális bázis, amely az f mennyiséget definiáló lineáris differenciáloperátor skalár értékű gömbfüggvényre alkalmazásával állítható elő

$$\mathbf{X}_{lm}(P) = \frac{1}{\lambda_l} \mathcal{L}(Y_{lm}(P)). \quad (5)$$

\mathbf{X}_{lm} az alkalmazott \mathcal{L} differenciáloperátortól függően skalár, vektor (potenciálzavar elsőrendű horizontális deriváltjai esetén) vagy tenzor (potenciálzavar másodrendű horizontális deriváltjai esetén) értékű gömbfüggvényt jelent (van Gelderen és Rummel 1992). Az f mennyiség együtthatósora (2)-höz hasonlóan az ortogonalitás alapján

$$f_{lm} = \iint_{\sigma} f(P) \mathbf{X}_{lm}(P) d\sigma = \iint_{\sigma} f(P) \frac{1}{\lambda_l} \mathcal{L}(Y_{lm}(P)) d\sigma. \quad (6)$$

Az (1)-be (3)-at és (6)-ot behelyettesítve, az összegzést az integrálással felcserélve a potenciálzavarra vonatkozót peremérték-feladat általános alakja (van Gelderen és Rummel 2001)

$$T(P) = \sum_{lm} T_{lm} Y_{lm}(P) = \sum_{lm} \frac{1}{\lambda_l} f_{lm} Y_{lm}(P) = \iint_{\sigma} f(Q) \sum_{lm} \frac{1}{\lambda_l^2} \mathcal{L}(Y_{lm}(Q)) Y_{lm}(P) d\sigma. \quad (7)$$

A (7)-beli integrál a fizikai geodéziában szokásos konvolúciós integrál alakra egyszerűsíthető, ha a

$$K(P, Q) = \sum_{lm} \frac{1}{\lambda_l^2} \mathcal{L}(Y_{lm}(Q)) Y_{lm}(P) \quad (8)$$

peremérték-feladatot megoldó Green-függvény (magfüggvény) és az $f(Q)$ mennyiség σ egység-gömbre vett szorzatintegráljának meghatározásánál felhasználjuk a potenciálzavar és a különböző erőter paraméterek együtthatói közötti kapcsolatot megadó λ_l sajátértékeket, valamint a skalár és tenzor értékű gömbfüggvények összegezési tételeit (van Gelderen és Rummel 2001).

A vizsgált peremérték-feladatok esetében a peremfelületen adott $f(Q)$ mennyiségek a horizontális gradiens, melyek a megfelelő magfüggvényrel potenciálzavarrá, gravitációs anomáliává és vertikális gradienssé transzformálhatók. Ha a cél gravitációs anomália vagy vertikális gradiens

meghatározása a P számítási pontban, akkor a magfüggvény (8) alakjában a gravitációs anomáliát, vertikális gradienst definiáló \mathcal{L} differenciál operátort kell alkalmazni a P pontban értelmezett skalár értékű gömbfüggvényre.

A potenciálzavar tisztán z -irányú deriváltjai esetén egyszerű a spektrumbeli kapcsolat meghatározása, az (1)-ben adott összefüggésre alkalmazzuk a peremértékek linearizálására kapott összefüggéseket, a gravitációs anomália esetén gömbi közelítést alkalmazva

a tértartományban

$$\Delta g = \mathcal{L}_{\Delta g}(T) = -\partial_z T - \frac{2}{r} T = -\partial_r T - \frac{2}{r} T = \sum_l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+2} \frac{(l-1)}{R} \sum_m T_{lm} Y_{lm}, \quad (9)$$

a spektrumban

$$\Delta g_{lm} = \frac{(l-1)}{R} T_{lm}, \quad \lambda_l(\Delta g) = l-1.$$

A vertikális gradienst a ∂_{zz} operátor definiálja, (1)-ből z -szerinti kétszeri deriválás után a tértartományban

$$T_{zz} = \mathcal{L}_{T_{zz}}(T) = -\partial_{zz} T = -\partial_{rr} T = \sum_l \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \frac{(l+1)(l+2)}{R^2} \sum_m T_{lm} Y_{lm}, \quad (10)$$

a spektrumban

$$(T_{zz})_{lm} = \frac{(l+1)(l+2)}{R^2} T_{lm}, \quad \lambda_l(T_{zz}) = (l+1)(l+2).$$

A (7)-beli integrál egyszerűbb alakra hozásához felhasználjuk, hogy z -irányú deriváltak esetén $\mathcal{L}(Y_{lm}) = \lambda_l Y_{lm}$, valamint a skalár értékű gömbfüggvények összegezési tételét

$$\sum_{lm} Y_{lm}(P) Y_{lm}(Q) = \sum_l (2l+1) P_l(\cos \psi). \quad (11)$$

A potenciálzavar T_{lm} együtthatói és az Eötvös-tenzor horizontális deriváltakat tartalmazó elemei együtthatósora közötti kapcsolatot megadó λ_l spektrumbeli sajátérték meghatározása korántsem ilyen egyszerű. A (7)-beli integrál a potenciálzavar $\mathcal{L} = \{\partial_{xz}, \partial_{yz}\}$ horizontális irányú deriváltjai esetén a gömbfelületen értelmezett f mennyiség és a K magfüggvény helyi koordináta-rendszerben vett horizontális deriváltjaiból képzett vektor értékű kombináció felületi integrálját eredményezi. Az Eötvös-inga által mért horizontális gradiensek esetén pont ezek a $\{T_{xz}, T_{yz}\}$ mérés-kombinációk állnak rendelkezésre a magfüggvény deriváltjai pedig gömbháromszögtani összefüggések alapján átirthatók az α azimut és a ψ a gömbi szögtávolság függvényeként. Van Gelderen és Rummel (1992) cikkükben meghatározták a potenciálzavar és az Eötvös-tenzor bizonyos elemkombinációi, így a $\{T_{xz}, T_{yz}\}$ mennyiség közötti kapcsolatot megadó spektrumbeli sajátértékeket, $\lambda_1(\{T_{zx}, T_{zy}\}) = \sqrt{l(l+1)(l+2)}$. Így

$$T(P) = k \iint_{\sigma} E^T(\psi) (T_{xz}(Q) \cos \alpha_Q + T_{yz}(Q) \sin \alpha_Q) d\sigma, \quad (12)$$

ahol a potenciálzavarra vonatkozó Eötvös-magfüggvény a (8), (11) és $\lambda_1(\{T_{zx}, T_{zy}\})$ alapján

$$E^T(\psi) = -\frac{\partial}{\partial\psi} \sum_l \frac{(2l+1)}{l(l+1)(l+2)} P_l(\cos\psi) = \sum_l \frac{(2l+1)}{l(l+1)(l+2)} P_{l1}(\cos\psi), \quad (13a)$$

α_Q a Q integrálási pontból a P számítási pontban mért azimut, és $P_{l1}(\cos\psi)$ az l -ed fokú 1-rendű Legendre függvényeket jelöli.

A (12)-hez hasonló összefüggések vezethetők le a gradiensekből a gravitációs anomália illetve a vertikális gradiens transzformációjára. A magfüggvények meghatározásánál (13a)-ban figyelembe vesszük a gravitációs anomália valamint a vertikális gradiens és a potenciálzavar között meghatározott (9) és (10) szerinti spektrumbeli összefüggést, mely a következő Eötvös-magfüggvényeket adja spektrális alakban

$$E^{\Delta g}(\psi) = -\frac{\partial}{\partial\psi} \sum_l \frac{(2l+1)(l-1)}{l(l+1)(l+2)} P_l(\cos\psi) = \sum_l \frac{(2l+1)(l-1)}{l(l+1)(l+2)} P_{l1}(\cos\psi), \quad (14a)$$

valamint

$$E^{T_{zz}}(\psi) = -\frac{\partial}{\partial\psi} \sum_l \frac{(2l+1)(l+1)(l+2)}{l(l+1)(l+2)} P_l(\cos\psi) = \sum_l \frac{(2l+1)}{l} P_{l1}(\cos\psi). \quad (15a)$$

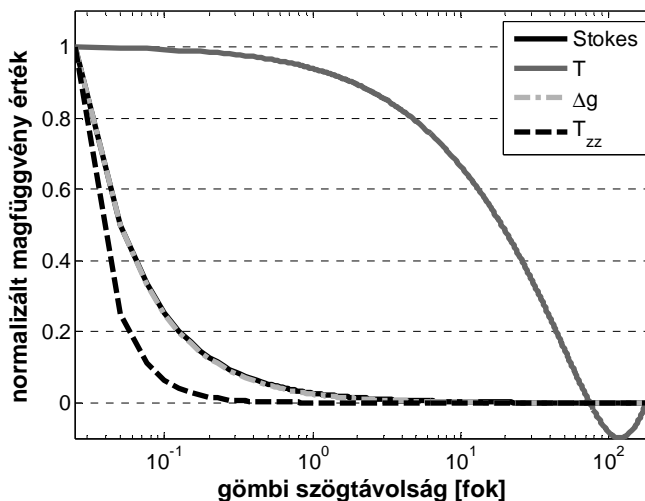
A Legendre-polinomok összegzési tételeit felhasználva gradiens peremérték-feladatot megoldó (13a)-(15a) magfüggvények a tértartományban felírhatók zárt alakban (van Gelderen és Rummel 2001)

$$E^T(\psi) = \frac{\sin(\psi)}{2} - \frac{3 \cos(\frac{\psi}{2})}{2} - \frac{3 \cos(\frac{\psi}{2})}{2(\sin^2 \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2})} + \frac{3 \ln\left(\frac{\sin \frac{\psi}{2} + 1}{\sin \frac{\psi}{2}}\right) \sin\psi}{2} - \frac{\cos \frac{\psi}{2}}{2(\sin \frac{\psi}{2} + 1)} + \frac{3 \cos^3 \frac{\psi}{2}}{2(\sin^2 \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2})}, \quad (13b)$$

$$E^{\Delta g}(\psi) = \cos \frac{\psi}{2} \left(10 \sin \frac{\psi}{2} - 18 \sin^2 \frac{\psi}{2} \ln\left(\frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} + 1\right) - 18 \sin^3 \frac{\psi}{2} \ln\left(\frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} + 1\right) - 9 \cos^2 \frac{\psi}{2} + 9 \sin^2 \frac{\psi}{2} + 7 \right) / \left(2 \sin \frac{\psi}{2} \left(\sin \frac{\psi}{2} + 1 \right) \right), \quad (14b)$$

$$E^{T_{zz}}(\psi) = \frac{\cos \frac{\psi}{2} \left(-12 \sin^4 \frac{\psi}{2} - 12 \sin^3 \frac{\psi}{2} + 2 \sin^2 \frac{\psi}{2} + 2 \sin \frac{\psi}{2} + 1 \right)}{2 \sin^2 \frac{\psi}{2} \left(\sin \frac{\psi}{2} + 1 \right)}. \quad (15b)$$

A felületi integrálok megoldásaiban szereplő magfüggvények a távolság valamely hatványával fordítottan arányosak. A gradiens peremérték-feladatokat megoldó Green-függvények alakja jól mutatja a gradiensek nehézségi erőter számításban való alkalmazhatóságát. A potenciálzavar meghatározására szolgáló $E^T(\psi)$ függvény korlátos $\psi = 0$ esetén a távoli adatpontok hatása nem hanyagolható el (Tóth 2003, Martinec 2003), az integrálási sugár korlátozásából eredő csonkítási hiba jelentős (1. ábra).



1. ábra. A gradiens peremérték-feladatot megoldó normalizált magfüggvények a potenciálzavar, a nehézségi rendellenesség és a vertikális gradiens esetében. Összehasonlításként a Stokes magfüggvény is látható

Az $E^{\Delta g}(\psi)$ függvény hasonló a Stokes-féle magfüggvényhez, $\psi = 0$ esetén szinguláris, és a gömbi szögtávolság növekedésével gyorsan lecsökken. Az $E^{T_{zz}}(\psi)$ függvény szintén szinguláris zérus szögtávolság esetén, a függvény csökkenése még gyorsabb, mint az $E^{\Delta g}(\psi)$ függvényé, így jelentősen kisebb területről szükségesek gradiens adatok T_{zz} meghatározására.

3. Numerikus vizsgálatok

3.1 Felhasznált adatok

A fizikai geodéziai feladatok megoldásai, a megoldások numerikus módszerei, valamint a különböző paraméterek (adatsűrűség, mérési zaj,...) változtatásának megoldásra gyakorolt hatásai jól ellenőrizhetők az egymással konzisztens, szintetikus adatrendszerek alapján. A szintetikus adatrendszerek (Vaniček et al. 2013, Hirt et al. 2013) előállíthatók gömbfüggvény sorfejtéssel a rendelkezésre álló globális geopotenciális modellek (GGM) felhasználásával, ez az ún. *effect modeling*, illetve valamely diszkrétizált sűrűségmodellből a newtoni tömegvonzási integrál alkalmazásával, mely a *source modeling* módszere. A két eljárás kombinálásával olyan szintetikus adatrendszer állítható elő, mely jól közelíti a valódi földi nehézségi erőteret, mivel annak hosszú és közepes hullámhosszú összetevője GGM-eken alapul, másrészt felbontása és információ tartalma összemérhető a gyakorlatban végzett különböző gravitációs mérésekével, hiszen tartalmazza a nagy felbontásban rendelkezésre álló DTM-ekből meghatározható topográfiai tömegek hatását, mely a nehézségi erőter magas frekvenciájú összetevőjének forrása. A source modeling számítási igényessége miatt - viszonylag nagy adatterületre, nagy sűrűségben szükségesek gradiens adatok - vizsgálataink az EGM2008 GGM felhasználására korlátozódnak, amely egyedülállóan nagy felbontása - kb. 9 km a szélességi foktól függően - lehetővé teszi a vizsgálatok elvégzését. Másrészt a newtoni integrál numerikus számítása során a leggyakrabban alkalmazott térfogatelem, a derékszögű prizma esetében, ha a számítási pont kellően közel esik a ható éleihez, akkor a potenciál második deriváltjai esetében ezek az élek mesterséges (fizikai tartalom nélküli) hatásokat eredményeznek. Ahogy Benedek (2009) megállapította a második deriváltak esetén a felszínhez közeli számítási pontokban a poliéder térfogatelem alkalmazása célszerűbb, azonban ennek számítási igényessége átlagosan 1.5-szer nagyobb, mint a derékszögű hasáb térfogatelemnek.

A számításokhoz a horizontális gradienseket valamint a vertikális gradienst, a gravitációs anomáliát és a geoidundulációt az EGM2008 modell felbontásának megfelelően egy 5' x 5' felbontású

rácsra határoztuk meg a modellből (Smith 1998), a gradiensek számításához Petrovskaya és Vershkov (2006) összefüggéseit használtuk fel, melyekkel elkerülhető a Legendre függvények deriváltjainak számítása. Az adatterület kiterjedése $10^\circ < \lambda < 30^\circ$ és $40^\circ < \varphi < 55^\circ$, a számítási területé $15^\circ < \lambda < 25^\circ$ és $45^\circ < \varphi < 50^\circ$, ennek megfelelően a csonkítási hiba számításával nem foglalkoztunk. A számítások $h = 0$ ellipszoid feletti magasságra vonatkoznak. A választott adatterületen a gradiensek széles skálán [-300E, +300E] mozognak, szórásuk ± 25 E körüli, így a vizsgálat szempontjából a választott terület reprezentatívnak tekinthető (1. táblázat).

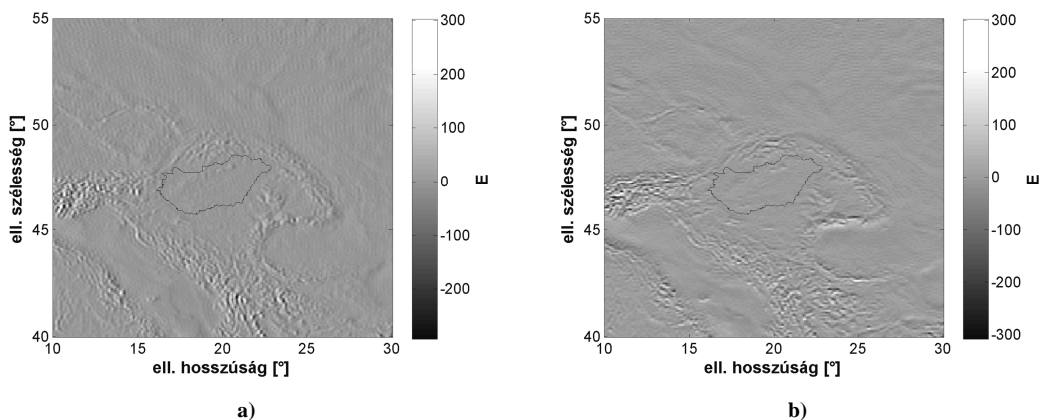
3.2 Alkalmazott számítási eljárás

Szintetikus gravitációs erőter mennyiségek alapján bármely erőter-paraméterből bármely más erőter-paraméterre történő akár geometriai, akár fizikai összefüggéseken alapuló transzformáció numerikus megvalósítása kvantitatívan vizsgálható, hiszen az egymással konzisztens erőter mennyiségek adekvát ellenőrzési lehetőséget nyújtanak, az alkalmazott fizikai geodéziai összefüggések pedig egy-egy leképezést biztosítanak. A kiinduló adatok diszkrét voltából így az analitikus összefüggések numerikus számításából fakadó elhanyagolások, közelítések szintetikus erőteradatok alapján meghatározhatók. Az integrál transzformációk gyakorlati számításában az adatok diszkretizációjával a teljes egységgömbön értelmezett folytonos adat és a magfüggvény konvolúciója helyett az eredmény a véges kiterjedésű adatterületen az adatrács felbontásának megfelelő, véges $\Delta\varphi \Delta\lambda \cos\varphi$ kiterjedésű adatcella értéke és a konvolúció magfüggvényének az adatcella középpontjára vonatkozó súlyozott összegeként írható fel.

A felületi integrálok esetében szintetikus adatrendszerek felhasználásával gyakran vizsgált paraméter a szükséges adatsűrűség elemzése, azaz, annak meghatározása, hogy mekkora az a minimális adatpont távolság amely mellett a konvolúciós integrálból a kívánt erőter paraméter megadott hibakorlát alatt meghatározható (Benedek 2000).

1. táblázat. Horizontális gradiensek statisztikai jellemzői a $10^\circ < \lambda < 30^\circ$ és $40^\circ < \varphi < 55^\circ$ adatterületen, spektrális tartomány: 2-2160 foksszám, [E]

	T_{zx}	T_{zy}
átlag	-0.2	-0.1
szórás	26.6	25.3
min.	-308.6	-292.7
max.	300.0	303.1



2. ábra. a) T_{zx} (meridián irányú) és b) T_{zy} (első vertikális sík irányú) gradiens a számítási területen, spektrális tartomány: 2-2160 foksszám

Egy másik gyakran vizsgált paraméter a csonkítási sugár nagysága és a magfüggvény különböző módosítási eljárásainak vizsgálata (Featherstone (2013) és az abban szereplő hivatkozások). A különböző magfüggvény-módosítási eljárásokról a Hotine-integrál (gravitációs zavart potenciálzavarrá transzformáló összefüggés) kapcsán Featherstone (2013) ad részletes összefoglalást. A felületi integrálok magfüggvényeinek spektrumbeli módosítása spektrális szűrőként is felfogható és ezen keresztül szabályozható, hogy az egyes adatrendszerekből mely frekvenciatartományokból kerüljenek adatok a megoldásba.

Az EGM2008 modell maximális felbontását használva a tanulmányban azt vizsgáljuk, hogy a horizontális gradienseken alapuló integrál-transzformációk numerikus megoldásaiban a gradiensnek mely frekvenciatartományokon használhatók legjobban a vertikális gradiens, gravitációs anomália és geoidmagasság meghatározásában, melyhez a magfüggvények (13a, 14a, 15a) sorfejtéses alakjait használjuk fel.

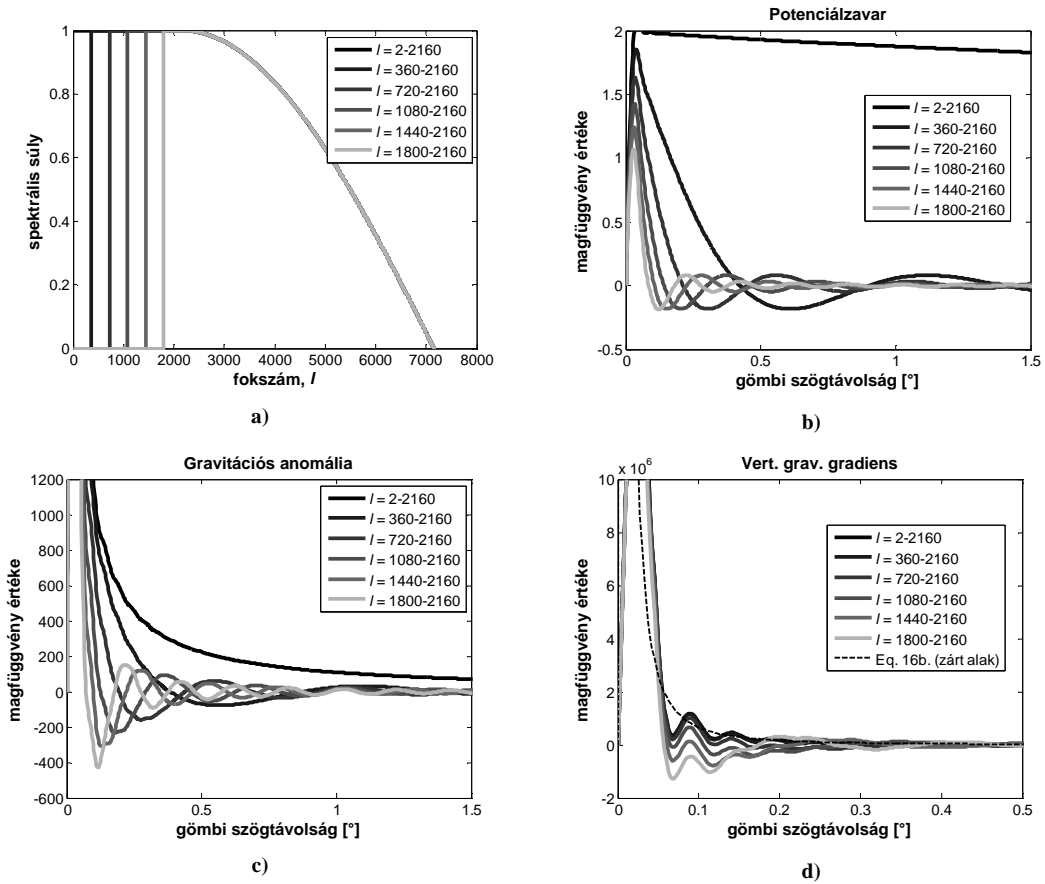
A magfüggvényeket Legendre-sor alakjában egy egyszerű téglalap ablakkal határoztuk meg, hogy a számítás során mely frekvencia tartományokat engedje át a magfüggvény, és melyeket nyomja el. A kezdő hullámszámok rendre a következők voltak: $l_1 = 2, 360, 720, 1080, 1440, 1800$ a végső hullámszám pedig minden esetben $l_2 = 2160$ (3.a ábra). Az $l_2 = 2160$ foknál levő éles levágás miatt a tértartományban számított magfüggvényben oszcillációk jelennek meg, aminek elkerülésére $l = 2160-7160$ fokszám között egy koszinusz-függvény szerinti levágást alkalmaztunk. Az így megválasztott spektrális súlyok közel állnak a gyakorlatban is alkalmazott módszerekhez, amikor is az erőter hosszú hullámhosszú összetevőit teljes egészében vagy részben a műholdas adatok mérésin alapuló GGM-ekből határozzák meg, és a mért különböző erőtermennyiségekből csak a közepes és magas frekvenciájú tagjait határozzák meg a megoldásnak.

A magfüggvények egyszerű módosítási eljárásainak következtében a fent említett módszer helyett egyszerűen alkalmazható lett volna az ún. remove-restore eljárás is a magfüggvények (13b, 14b, 15b)-beli zárt alakját felhasználva, azonban célunk az volt, hogy a számítási módszert a későbbiekben mért gradiensre és tetszőleges magfüggvény módosítási eljárásokkal alkalmazzuk. A tértartományban a módosított magfüggvényeket a 3. ábra mutatja. A potenciálzavar és a gravitációs anomália esetében a „teljes” ($l = 2-2160$) spektrális tartományú magfüggvény alig tér el a zárt alakban megadott változattól (3.b. és c. az ábrán nem is tüntettük fel), azonban a vertikális gradiens esetén a $\psi = 0$ gömbi szögtávolság körül gyorsan csökkenő magfüggvényt annak maximális fokszámig korlátozott Legendre-sora nem képes teljes mértékben visszaállítani. A módosított magfüggvények viszonylag rövid gömbi szögtávolságon jelentősen lecsökkennek, majd zérus érték körül ingadoznak, csökkentve ezzel az adatterület korlátosságából fakadó csonkítási hiba mértékét.

3.3 Módosított magfüggvényekkel és harmonikus szintézissel meghatározott T_{zz} , Δg és N összehasonlítása

A konvolúciós integrál (12) diszkrét alakjának számítását a megfelelő, módosított magfüggvényekkel 1D-s, szabatos gömbi FFT-vel (Haagmans et al. 1993) végeztük, az így nyert mennyiségeket a továbbiakban T_{zz_FFT} , Δg_FFT és N_FFT -vel jelöljük. Az EGM2008 modell együtthatóit szintén a megfelelő spektrális súlyokkal módosítva gömbi harmonikus szintézissel (SHS – spherical harmonic synthesis) meghatároztuk a referencia mennyiségeket (T_{zz_SHS} , Δg_SHS és N_SHS), a továbbiakban ezek eltérésit vizsgáltuk meg a választott frekvenciatartományok függvényében.

A vertikális gradiensre kapott számítás eredményeit foglalja össze a 2. táblázat. A jól ismert tény, hogy a gradiens értékek az erőter kis léptékű, magas frekvenciás összetevőiről adnak információt, jelenergiájuk az erőter rövid hullámhosszú tagjaira koncentrálódik, látszik az SHS-sel meghatározott vertikális gradiens különböző frekvenciatartománybeli szórásán. A vizsgált legközelebbi hullámhossz tartomány esetén a gradiens szórása kb. a fele, mint a teljes spektrális tartományon. Az FFT-vel számított gradiensnek inkább csak jellegükben (hosszú és közepes hullámhosszú tagok) adják vissza a tényleges gradiens értékeket, ahogy az a minimum és maximum értékek intervallumaiból és a szórásból is látszik.



3. ábra. a) Spektrális súlyok és módosított magfüggvények rendre a b) potenciálzavar, c) gravitációs anomália és d) vertikális gravitációs gradiens számításához. A sorfejtés maximalizálása következtében a módosított magfüggvények nem szingulárisak a számítási pontban ($\psi = 0$ -ban)

A 2. táblázat utolsó oszlopa a két módon számított vertikális gradiens korrelációját mutatja, melyből megfigyelhető, hogy kizárólag a magas fokszámú ($l > 1080$) tagokra koncentrálva a horizontális gradiensekből számított vertikális gradiens nincs összhangban a gömbfüggvény sorfejtésből számított értékekkel. Ennek egyik oka valószínűleg a felületi integrál esetén a kiindulási adatok, a horizontális gradiensek viszonylag kis felbontása. Másrészt a viszonylag nagyméretű adatcellán (~9 km x 6 km) a módosított magfüggvények gyorsan változnak, így célszerűbb a számítási pont környezetében a magfüggvényt annak az adatcellára vonatkozó integrál átlagával közelíteni (Hirt et al. 2011).

2. táblázat. Integrál-transzformációval és gömbfüggvény sorfejtéssel meghatározott vertikális gradiens statisztikai jellemzői a $15^\circ < \lambda < 25^\circ$ és $45^\circ < \varphi < 50^\circ$ számítási területen [E]

l spektrális tartomány	min./max.		szórás		corr (T_{zz_FFT}, T_{zz_SHS})
	T_{zz_FFT}	T_{zz_SHS}	T_{zz_FFT}	T_{zz_SHS}	
2-2160	-67.2/149.8	-177.3/256.0	18.5	32.3	0.92
360-2160	-74.7/128.0	-202.0/235.2	16.8	31.1	0.92
720-2160	-90.4/ 94.5	-231.0/205.5	14.1	29.1	0.92
1080-2180	-71.0/ 68.1	-216.7/197.9	12.0	26.2	0.86
1440-2160	-75.8/ 67.6	-161.2/158.6	11.4	22.3	0.64
1800-2160	-87.4/ 81.2	-90.9/ 76.1	13.1	17.2	0.34

A gravitációs anomália – mely a potenciálzavar elsőrendű deriváltjával kapcsolatos mennyiség – jeltartalma az erőtér hosszú és közepes hullámhosszúságú részeire koncentrálódik. A horizontális gradienseket gravitációs anomáliává transzformálva látható, hogy a gradiens-gravitációs anomália magfüggvény szintén aluláteresztő szűrőként működve a hosszú és közepes hullámhosszokon ad jó eredményt (3. táblázat). Azonban összehasonlítva a gradiens-vertikális gradiens transzformációval, megfigyelhető, hogy a módosított magfüggvénnyel gravitációs anomáliákra még az $l = 1080$ fokszámig is jó eredményt kapunk ($\text{corr} = 0.89$) a statisztikai számítások alapján.

A geoidmagasság esetén, ahogy Tóth (2002) is megállapította és a 4. táblázatból is látszik a teljes, $l = 2-2160$ spektrumú magfüggvénnyel történő számítás esetén a csonkítási hiba nem elhanyagolható mértékű. A geoidmagasság jeltartalma az alacsony fokszámokra koncentrálódik, és megfigyelhető, hogy a közepes hullámhosszon ($l = 360 - 1080$) módosított gradiens-potenciálzavar magfüggvények igen jó egyezést adnak az SHS-sel számított értékekkel (4. táblázat). Kizárólag a magas frekvenciákra korlátozva a magfüggvényt az egyezés az integrál-transzformációval és a gömbi sorfejtéssel számított mennyiségek között még kielégítő, azonban ezeken a frekvenciatartományokon a geoidmagasságok már véletlenszerű mintázatot mutatnak a Kárpát-medencében és csupán a Kárpátok és az Alpok keleti nyúlványai területén tartalmaz realiztikus jelet, amit valószínűleg a magas korrelációt okoz.

A tértartománybeli vizsgálat mellett a SHS-sel és a gradiensekből FFT-vel nyert különböző erőterménységek információtartalmát a következőkben a frekvenciatartományban hasonlítottuk össze. A vizsgálatokhoz a választott spektrális súlyokkal módosított magfüggvényekkel számított erőtermparaméterek és az ezeknek megfelelő gömbi harmonikus szintézissel előállított mennyiségek kereszt-és autospektrumán alapuló átviteli függvényét határoztuk meg az adatok felbontásának megfelelő frekvencia tartományon.

3. táblázat. Horizontális gradiensekből módosított magfüggvényekkel és gömbfüggvény sorfejtéssel számolt gravitációs anomália statisztikai jellemzői a $15^\circ < \lambda < 25^\circ$ és $45^\circ < \varphi < 50^\circ$ számítási területen [mGal]

l spektrális tartomány	min./max.		szórás		corr
					$(\Delta g_{_FFT}, \Delta g_{_SHS})$
	$\Delta g_{_FFT}$	$\Delta g_{_SHS}$	$\Delta g_{_FFT}$	$\Delta g_{_SHS}$	
2-2160	-104.7/198.9	-93.7/238.4	30.23	31.77	0.99
360-2160	-74.9/130.7	-79.2/160.1	17.43	19.58	0.98
720-2160	-66.0/ 76.1	-95.7/ 91.8	11.19	13.90	0.98
1080-2180	-53.6/ 50.4	-86.8/ 75.5	7.87	10.65	0.96
1440-2160	-38.7/ 31.9	-58.5/ 56.5	5.46	7.98	0.89
1800-2160	-25.5/ 23.2	-29.1/ 24.3	4.07	5.54	0.66

4. táblázat. Integrál transzformációval és gömbfüggvény sorfejtéssel meghatározott geoidmagasság statisztikai jellemzői a $15^\circ < \lambda < 25^\circ$ és $45^\circ < \varphi < 50^\circ$ számítási területen, [m]

l spektrális tartomány	min./max.		szórás		corr
					$(N_{_FFT}, N_{_SHS})$
	$N_{_FFT}$	$N_{_SHS}$	$N_{_FFT}$	$N_{_SHS}$	
2-2160	-2.160/10.593	30.131/48.588	2.276	3.700	0.90
360-2160	-0.921/ 1.331	-0.923/ 1.441	0.203	0.207	0.99
720-2160	-0.425/ 0.468	-0.445/ 0.539	0.076	0.082	0.98
1080-2180	-0.282/ 0.260	-0.282/ 0.260	0.042	0.048	0.97
1440-2160	-0.172/ 0.151	-0.218/ 0.210	0.024	0.030	0.93
1800-2160	-0.087/ 0.065	-0.095/ 0.082	0.014	0.018	0.79

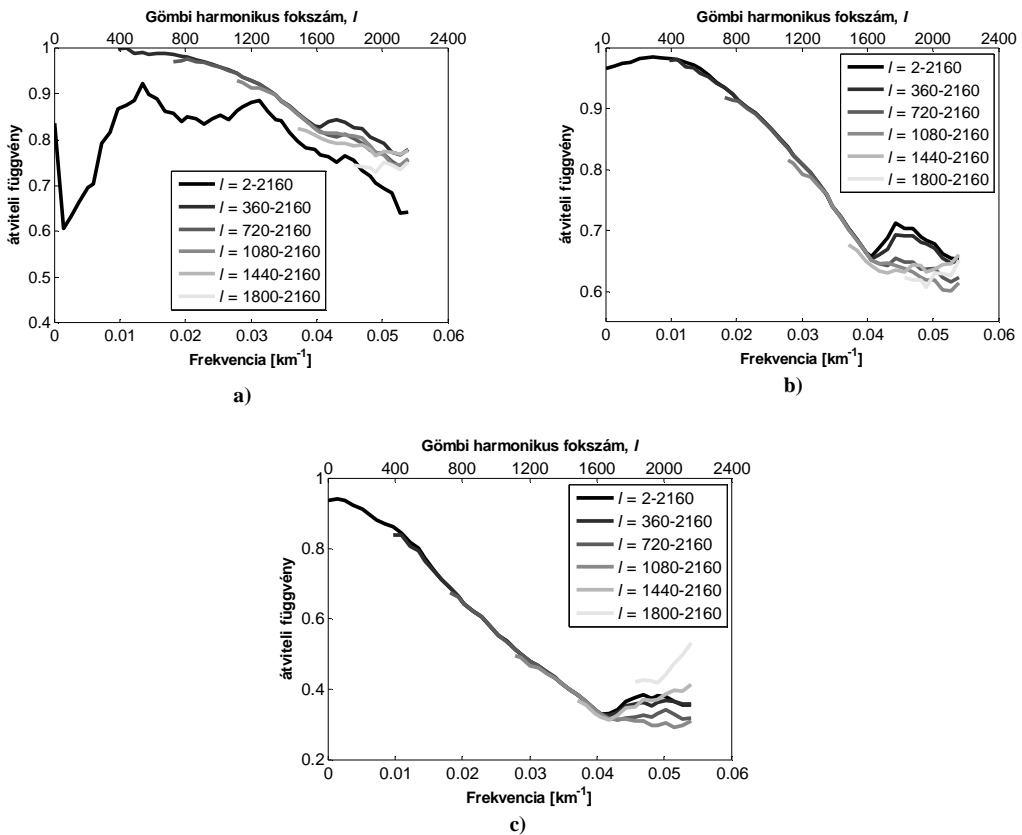
Az átviteli függvény

$$tf = \frac{CPD(x, y)}{PSD(x)} \quad (17)$$

az x bemeneti jel és a tőle lineárisan függő y kimeneti jel kereszt spektrumának és a bemenő jel spektrumának hányadosa. A különböző erőtermenységek spektrumait 2D-s FFT-vel számítottuk, a spektrum varianciájának csökkentésére DPSS (Slepian-féle) ablakolást alkalmaztunk. Feltételezve a meghatározott 2D-s átviteli függvény izotrópiáját, azimut szerinti átlagolással 1D-s függvény állítható elő. Ha a rendszer két változója között valóban lineáris kapcsolat áll fent, akkor az átviteli függvény értéke a teljes frekvenciatartományon 1.

A potenciálzavarra, gravitációs anomáliára és vertikális gradiensre számított átviteli függvényeket a 4. ábra mutatja. Mindhárom esetben megfigyelhető, hogy a peremérték-feladatot megoldó magfüggvények kizárólag az erőter alacsony frekvenciájú tagjait képesek előállítani maradéktalanul a felhasznált horizontális gradiens adatokból.

A potenciálzavar esetében a hosszú hullámhosszakot $l = 360$ és $l = 720$ fokig kiszűrő módosított magfüggvények egészen az $l = 1200$ közepes hullámhosszakig ($tf > 0.9$) elfogadható eredményt adnak, ami megközelítőleg 30 km-es hullámhosszúságú geoidformáknak felel meg. Ahogy azt az átviteli függvény is jól demonstrálja, a teljes spektrumú magfüggvény jelentős csonkítási hibát okoz a geoid nagy hullámhosszú tagjaiban. Tekintettel arra, hogy a geoid jeltartalma a spektrum alacsony frekvenciás tagjaira korlátozódik, a magfüggvényből a nagyon hosszú hullámhosszú tagokat kiszűrve a gradiensekből a geoid hosszú- és közepes hullámhosszú tagjai meghatározhatók.



4. ábra. Különböző frekvenciatartományokban gradiensekből FFT-vel és gömbi harmonikus szintézissel számított erőtermenységek átviteli függvénye: (a) potenciálzavar, (b) gravitációs anomália, (c) vertikális gradiens.

A jelmagyarázat az átengedett hullámhossztartományt mutatja

A gravitációs anomália esetében az átviteli függvények alapján megközelítőleg $l = 800$ fokszámig – amely megközelítőleg 50 km hullámhosszúságú nehézségi erőter formákat jelent – adnak adekvát eredményt a horizontális gradiensek. Így az alkalmazott szintetikus adatrendszer esetén a magfüggvény egyre magasabb fokszámokon való módosításával, a megoldásból az alacsony és közepes fokszámú tagok kiszűrésével nem kapható jó becslés a gravitációs anomália magas frekvenciás összetevőire az alkalmazott numerikus integrálási eljárás mellett.

A vertikális gradiens esetében figyelhető meg legjobban, hogy a magfüggvény kizárólag az erőter nagy léptékű formáit képes előállítani a horizontális gradiensekből. Az erőter magas frekvenciás tagjai esetén ($l > 400$) gyenge az egyezés az FFT-vel és a SHS-sel számított mennyiségek között.

4. Összefoglalás és kitekintés

A geodéziai peremérték-feladatokat megoldó integrálegyenletek a különböző erőtermennyiségek közötti egy az egyben leképezést megvalósítják az erőter teljes spektrumán. Azonban a gyakorlati megoldások esetén diszkrét adatrendszereken numerikus módszerekkel történik a számítás, mely elkerülhetetlenül hibát visz a megoldásba.

Globális geopotenciális modell együttható sorából származtatott szintetikus adatokon vizsgáltuk, hogy az Eötvös-ingával mérhető horizontális gradiensek a különböző geodéziai peremérték-feladatok numerikus megoldásaiban hogyan használhatók fel, hozzájárulva ezzel a minél pontosabb nehézségi erőter modellezéshez. A gradiensek, ha a pontsűrűségüknek megfelelő és frekvenciatartományban kedvező jel-zaj viszonytal jellemezhetők, az erőter kis léptékű lokális formáiról adnak információt, így a vizsgált mennyiségek hasonló skálájú összetevőinek meghatározásához, pontosításához járulhatnak hozzá. Máskülönb a lokális hatások csak a zajt növelik, hiszen a pontok közötti távolság növekedésével a mérési adatok között egyre csökken a korreláció, ami a mintavételezési törvényt is figyelembe véve a nagyobb távolságokra számított adatokat, vagyis az erőter nagyobb léptékű szerkezeti formáit is torzítja (aliasing).

Ehhez a szintetikus horizontális gradiensekből három, a potenciálzavar különböző fokszámú deriváltjával kapcsolatban álló mennyiség, a geoidmagasság, gravitációs anomália és a vertikális gravitációs gradiens számítására szolgáló integrál transzformáció magfüggvényeinek különböző frekvenciatartománybeli módosításait vizsgáltuk meg. Az alkalmazott geopotenciális modell maximális felbontását kihasználva végeztük a számításokat, azonban a számítási pont közelében gyorsan változó magfüggvények esetében az adatcella középpontjára számított függvényértékek egyfajta simító hatást eredményeztek, ami jelentkezett a számított mennyiségekben is. Másrészt az adott adatcellaméret mellett a gradiensekből képzett vektorkombináció két, az azimutól függő tagot is tartalmaz, amely a magfüggvénnyel szorozva gyorsan változó irányfüggő elemet visz a megoldásba. A gravitációs anomália és a geoidmagasság esetén a gradiensekből a módosított magfüggvényekkel számított értékek még a közepes és a magas frekvenciákon is jó eredményt adtak. A módosított magfüggvényeken keresztül a gradiensek közvetlenül geoidmagassággá transzformálhatók.

Azonban ha a cél a geoid finomszerkezetének, a 30 km-nél rövidebb hullámhosszú tagjainak a meghatározása, akkor az integrálok numerikus számításából eredő közelítések miatt a jelen vizsgálatban rendelkezésre álló szintetikus gradiens értékek felbontásánál jóval nagyobb felbontású adatok szükségesek. A tanulmányban a szintetikus, elvileg hibamentes, egymással konzisztens gradiens, gravitációs anomália és geoid adatokon végzett számítással azt próbáltuk indirekt módon megbecsülni, hogy a tényleges, mért gradiens értékek, az Eötvös-inga mérések a regionális erőter modellezés során mekkora, és milyen frekvenciatartalmú hozzájárulást adhatnak a geoidmodellhez. Természetesen a mért adatok inhomogén ponteloszlása, a méréseket terhelő hibák, a mérési hely bizonytalansága további figyelembe veendő tényezők a gradiensek geoidmodellezésben való felhasználhatósága során.

Köszönetnyilvánítás. Ez a tanulmány a TÁMOP 4.2.2.C-11/1/KONV/2012-0015 projekt támogatásával készült.

Hivatkozások

- Benedek J** (2009): A nehézségi erőter szintetikus modellezése. PhD disszertáció, 139.
- Benedek J** (2000): A gravimetriai adatok sűrűségének hatása a Stokes-FFT módszerrel számított geoidundulációk pontosságára. *Geomatikai Közlemények*, 3, 157-164.
- Bíró P, Ádám J, Völgyesi L, Tóth Gy** (2013): A felsőgeodézia elmélete és gyakorlata. HM Zrínyi Térképészeti és Kommunikációs Szolgáltató Nonprofit Kft. Kiadó, Budapest. Egyetemi tankönyv és kézikönyv, ISBN 978-963-257-248-2.
- Denker H** (2013): Regional gravity field modeling: theory and practical results. In G. Xu (ed.), *Sciences of Geodesy – II*, doi: 10.1007/978-3-642-28000-9_5, 185-291
- Featherstone WE** (2013): Deterministic, stochastic, hybrid and band-limited modifications of Hotine's integral. *Journal of Geodesy*, 87(5), 487–500, doi: 10.1007/s00190-013-0612-9
- Haagmans RR, de Min E, van Gelderen M** (1993): Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1D-FFT, and a comparison with existing methods for Stokes's integral. *Manuscripta Geodaetica*, 18(5), 227-241.
- Hirt C, WE Featherstone, SJ Claessens** (2011): On the accurate numerical evaluation of geodetic convolution integrals. *Journal of Geodesy*, 85(8), 519-538.
- Hirt C, SJ Claessens, T Fecher, R Kuhn, R Pail, M Rexer** (2013): New ultra high resolution picture of Earth's gravity field. *Geophysical Research Letters*, 40(16), 4279–4283.
- Jekeli C** (2009): Potential theory and static gravity field of the Earth. In: Herring T (vol ed) *Treatise on geophysics*, 3, Geodesy. Elsevier, Amsterdam, 11-42.
- Martínez Z** (2003): Green's function solution to spherical gradiometric boundary-value problems. *Journal of Geodesy*, 77, 41-49.
- Pavlis NK, Holmes SA, Kenyon SC, Factor JK** (2012): The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 117(B4).
- Petrovskaya MS, Vershkov AN** (2006): Non-singular expressions for the gravity gradients in the local north-oriented and orbital reference frames. *Journal of Geodesy*, 80, 117–127.
- Rummel R, Teunissen PJG** (1989): Horizontal type boundary value problem, least-squares collocation and astronomical leveling. In *Festschrift to Dr. Torben Krarup, Meddelelse* (eds. Kejlsø E, Poder K; Tscherning CC) , Geodätisches Institut, Kopenhagen, 285-297.
- Smith DA** (1998): There is no such thing as "The" EGM96 geoid: Subtle points on the use of a global geopotential model. *IGeS Bulletin*, 8, 17-28.
- Šprlák M, Sebera J, Val'ko M, Novák P** (2014): Spherical integral formulas for upward/downward continuation of gravitational gradients onto gravitational gradients. *Journal of Geodesy*, 88, 179-197.
- Torge W** (2001): *Geodesy*. de Gruyter, 3rd edition, 416.
- Tóth Gy** (2002): Az Eötvös geodéziai peremérték-feladat. *Geomatikai Közlemények*, 5, 163-174.
- Tóth Gy** (2003): The Eötvös spherical horizontal gradiometric boundary value problem – gravity anomalies from gravity gradients of the torsion balance. In: Tziavos IN (ed) *Gravity and Geoid 2002*, 3rd Meeting of the IGGC, Ziti Editions, 102–107.
- Tóth Gy, Rózsa Sz, Ádám J, Tziavos IN** (2002) Gravity field modeling by torsion balance data – a case study in Hungary. In: Ádám J, Schwarz KP (eds) *Vistas for Geodesy in the New Millennium*, IAG Symposia, 125. Springer, Berlin, 193–198.
- Tóth Gy, Ádám J, Földváry L, Tziavos IN, Denker H** (2005) Calibration/validation of GOCE data by terrestrial torsion balance observations. In: Sansó F (ed) *A Window on the Future Geodesy*, IAG Symposia, 128. Springer, Berlin, 214–219.
- Tóth Gy** (2009): A HGTUB2007 új magyarországi kombinált kvázigeoid megoldás. *Geomatikai Közlemények*, 12, 131-140.
- Tscherning CC, Rapp RH** (1974): Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations, and deflections of the vertical implied by anomaly degree variance models. *OSU Report*, No. 208
- Ullmann Z** (2013): Eötvös-inga mérések és geodéziai hasznosításuk. PhD disszertáció, 109.
- van Gelderen M, Rummel R** (2001): The solution of the general geodetic boundary value problem by least squares. *Journal of Geodesy*, 75(1), 1-11.
- van Gelderen M, Rummel R** (2002): Corrections to "The solution of the general geodetic boundary value problem by least squares". *Journal of Geodesy*, 76, 121–122.
- van Gelderen M, Rummel R** (1992): Spectral analysis of the full gravity tensor. *Geophy. J. Int.*, 111, 159-169.
- Vaníček P, Kingdon R, Kuhn M, Ellmann A, Featherstone WE, Santos MC, Martínez Z, Hirt C, Avalos-Naranjo D** (2013): Testing Stokes-Helmert geoid model computation on a synthetic gravity field: experiences and shortcomings. *Stud. Geophys. Geod.*, 57, 369-400.
- Völgyesi L, Tóth Gy, Csapó G** (2007): Determination of gravity field from horizontal gradients of gravity. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 42(1), 107-117.