

ÜBER DIE ANALOGA DER GANZEN RATIONALEN FUNKTIONEN IN VERALLGEMEINERTEN KLASSEN VON FUNKTIONEN EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN I.

von
K. SZILÁRD

In den letzten drei Jahrzehnten sind von einer Reihe von Verfassern Klassen von Funktionen einer komplexen Veränderlichen, die als Verallgemeinerungen der Klasse der analytischen Funktionen aufgefasst werden, behandelt worden. Vergleiche z. B. den Artikel von SCHABAT [6], oder den zusammenfassenden Bericht von H. KÜNZI [1], beide mit ausgiebigen Literaturverzeichnissen.

In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, dass unter gewissen Bedingungen in diesen Klassen Funktionen enthalten sind, die analoge Eigenschaften, wie die der ganzen rationalen Funktionen aufweisen. Die nächstfolgenden Ausführungen sind zum Teil auch in meiner im Jahre 1927 erschienenen Arbeit [2] enthalten. Als Analogon einer ganzen rationalen Funktion wird eine Funktion $\zeta = f(z)$ der komplexen Veränderlichen z genommen, die für alle Werte der z -Ebene definiert ist ($z = \infty$ ausgenommen) und mit $|z|$ gleichmässig gegen Unendlich strebt (d. h. für eine jede gegebene positive Zahl M gibt es eine Zahl $r > 0$ so, dass $|f(z)| > M$ wenn nur $|z| > r$ ist). Ein einfaches Beispiel: $f(z) = Re^{i\Phi}$, $z = re^{i\varphi}$, wo $R = r^{10}$, $\Phi = \varphi$ ist.

§ 1. Die Klasse aller eindeutigen stetigen Funktionen der komplexen Veränderlichen z

Hilfssatz 1. *In einem Jordanschen Bereiche \mathcal{Q} mit der Randkurve Γ in der z -Ebene sei eine eindeutige stetige (komplexwertige) Funktion $f(z)$ definiert. Auf Γ sei immer $f(z) \neq a$ (a — eine komplexe Zahl) und es sei $\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - a] \neq 0$. Dann gibt es einen inneren Punkt z_0 in \mathcal{Q} so, dass $f(z_0) = a$. (Mit » $\text{Var}_{\Gamma} \arg f(z)$ « wird die Änderung des Argumentes der komplexen Zahl $f(z)$ bezeichnet, wenn z die Kurve Γ in positiver Richtung durchläuft). Wenn es also in \mathcal{Q} keinen inneren Punkt z_0 gibt so, dass $f(z_0) = a$, so ist $\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - a] = 0$.*

Beweis. Den Bereich \mathcal{Q} zerlegt man in endlichviele Jordansche Bereiche $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_q$ mit den Begrenzungskurven $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_q$ die alle einen Durchmesser $< \varepsilon$ haben, wo $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgegeben ist. Wenn es auf einer dieser Begrenzungskurven einen Punkt z_0 gibt, so dass $f(z_0) = a$, so ist der Beweis fertig. Wenn nicht, so ist

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - a] = \sum_{v=1}^q \text{Var}_{\Gamma_v} \arg [f(z) - a]$$

und aus diesem Grunde für wenigstens eine der Kurven Γ_v ist

$$\text{Var}_{\Gamma_v} \arg [f(z) - a] \neq 0.$$

Mit dem zugehörigen Bereiche \mathcal{Q}_v verfährt man genau so, wie mit dem Bereiche \mathcal{Q} mit dem Unterschied, dass ε durch $\varepsilon/2$ ersetzt wird usw. Wenn dabei niemals vorkommt, dass auf einer der erhaltenen Begrenzungskurven $f(z) = a$ wird, so bekommt man eine unendliche Folge ineinandergeschachtelter Bereiche $\mathcal{Q}^{(1)} = \mathcal{Q}, \mathcal{Q}^{(2)}, \dots, \mathcal{Q}^{(n)}, \dots$ von der Breite $\leq \varepsilon/2^{n-1}$ auf deren Grenzkurven

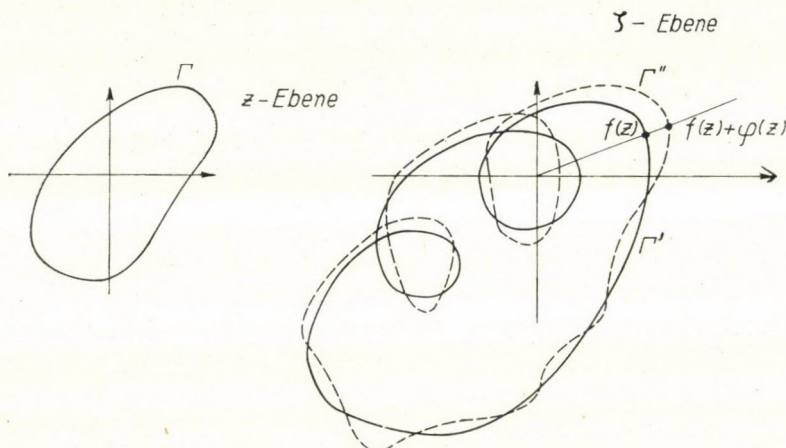


Fig. 1.

$\Gamma^{(n)}$ die Funktion $f(z)$ von a verschieden ist und $\text{Var}_{\Gamma^{(n)}} \arg [f(z) - a] \neq 0$. Es ist leicht zu sehen, dass in dem einzigen gemeinsamen Punkte z_0 aller dieser Bereiche $f(z_0) = a$ ist w. z. b. w. Dieser Hilfssatz kann singemäss auch für durch endlichviele Jordankurven begrenzte Bereiche ausgesprochen werden (zum Beweise zerlegt man sie in endlichviele Jordansche Bereiche).

Hilfssatz 2. Es seien $f(z)$ und $\varphi(z)$ zwei in dem Jordanschen Bereiche \mathcal{Q} stetige Funktionen. Auf der Randkurve Γ sei $|\varphi(z)| < |f(z)|$. Dann ist

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z)] = \text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) + \varphi(z)].$$

Der Beweis wird mit denselben Überlegungen geführt, wie der des bekannten Satzes von Rouché (s. GOURSAT [3] S. 127, TÔKI und SHIBATA [4], S. 162 oder WHYBURN [5] S. 90). Eine anschauliche Deutung S. Fig. 1.

Folgerung: Die stetige Funktion $f(z)$ sei in dem Jordanschen Bereiche \mathcal{Q} definiert und auf der Randkurve Γ des Bereiches sei $|f(z)| > \zeta_0$, wo ζ_0 eine komplexe Konstante ist. Dann ist $\text{Var}_{\Gamma} \arg f(z) = \text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - \zeta_0]$. Geometrisch kann man diese Folgerung so deuten: In der ζ -Ebene sei Γ' das durch $f(z)$ entworfene Bild von Γ und P ein nicht auf Γ' liegender Punkt der ζ -Ebene. Wenn man um P als Mittelpunkt einen Kreis schlägt dessen Radius kleiner als der Abstand von P von Γ' ist, so hat $\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - \zeta_0]$ für alle Punkte ζ_0 dieses Kreises denselben Wert.

Satz 1. *Es sei $f(z)$ eine eindeutige, für alle endlichen Werte von z definierte stetige Funktion und es sei $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$ gleichmässig. Dann gelten folgende Aussagen. 1. Es existieren eine positive Zahl r_0 und eine ganze Zahl n_0 so, dass wenn die Jordan'sche Kurve Γ in der z -Ebene in ihrem Innengebiete den Kreis $|z| \leq r_0$ enthält,*

$$\text{Var}_\Gamma \arg f(z) = 2 \pi n_0$$

ist, 2. Wenn eine beliebige komplexe Zahl ζ_0 vorgegeben wird, so gibt es eine positive Zahl r_{ζ_0} so, dass wenn die Jordan'sche Kurve Γ in der z -Ebene in ihrem Innengebiete den Kreis $|z| \leq r_{\zeta_0}$ enthält,

$$\text{Var}_\Gamma \arg [f(z) - \zeta_0] = 2 \pi n_0$$

ist.

Beweis. Es sei M_0 eine beliebige positive Zahl. Laut Voraussetzung existiert dann eine Zahl $r_0 > 0$ so, dass $|f(z)| > M_0$ wenn nur $|z| > r_0$ ist. Es seien Γ_1 und Γ_2 irgendwelche (beliebige) Jordansche Kurven, die in ihren Innengebieten den Kreis $|z| \leq r_0$ enthalten. Nehmen wir dann eine dritte ebensolche Jordansche Kurve, zum Beispiel einen Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius R (bezeichnen wir ihn durch Γ_3) der beide Kurven Γ_1 und Γ_2 umfasst (d. h. für welchem $\max_{z \in \Gamma_1} |z| < R$ und $\max_{z \in \Gamma_2} |z| < R$ ist). Dann ist $\text{Var}_{\Gamma_3} \arg f(z) = \text{Var}_{\Gamma_1} \arg f(z)$ und auch $\text{Var}_{\Gamma_3} \arg f(z) = \text{Var}_{\Gamma_2} \arg f(z)$, da in dem zweifach zusammenhängenden Bereiche, der durch Γ_1 und Γ_3 (bzw. Γ_2 und Γ_3) begrenzt wird $f(z) \neq 0$ ist und daher laut Hilfssatz 1 $\text{Var}_{\Gamma_v} \arg f(z) - \text{Var}_{\Gamma_3} \arg f(z) = 0$, ($v = 1, 2$) sein muss.

Es ist daher für alle Jordansche n Kurven Γ welche den Kreis $|z| \leq r_0$ in ihren Innengebieten enthalten $\text{Var}_\Gamma \arg f(z)$ eine Konstante Grösse, die wir durch $2\pi n_0$ bezeichnen (n_0 ist, wie bekannt, eine ganze Zahl). Es sei nun ζ_0 eine beliebige komplexe Zahl. Laut Voraussetzung gibt es eine positive Zahl r_{ζ_0} derart, dass ausserhalb des Kreises $|z| \leq r_{\zeta_0}$ immer $|f(z)| > |\zeta_0|$ ist. Laut Folgerung aus dem 2-ten Hilfssatze ist dann

$$\text{Var}_\Gamma \arg [f(z)] = \text{Var}_\Gamma \arg [f(z) - \zeta_0] = 2 \pi n_0$$

für eine jede Jordansche Kurve Γ die in ihrem Innengebiete den Kreis $|z| \leq r_{\zeta_0}$ enthält. Damit ist der Satz 1 bewiesen. Die ganze Zahl n_0 ist ein Analogon des Grades einer ganzen rationalen Funktion, doch für den allgemeinen Fall einer stetigen Funktion n_0 kann sowohl positiv, als auch negativ, oder Null sein.

§ 2. Die Klasse aller eindeutigen stetigen Funktionen, welche orientierungstreue Abbildungen vermitteln.

Die Aufschrift dieses Paragraphen sei durch drei Bedingungen präzisiert die die nunmehr zu untersuchenden Funktionen $f(z)$ erfüllen sollen.

1. Der Definitionsbereich von $f(z)$ hat innere Punkte und $f(z)$ ist in diesen eindeutig und stetig.

2. Wenn $f(z) \neq \text{Const.}$, so nimmt sie ihre Werte in den inneren Punkten ihres Definitionsbereiches isoliert an (d. h. wenn $f(z_0) = \zeta_0$, so gibt es um z_0 als Mittelpunkt einen Kreis in dem sonst $f(z) \neq \zeta_0$ ist).

3. Liegt der Punkt z_0 im Innengebiete einer Jordanschen Kurve Γ die selbst, samt Innengebiete aus lauter inneren Punkten des Definitionsbereiches von $f(z)$ besteht, so ist

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - f(z_0)] > 0,$$

wenn z die Kurve Γ in »positiver Richtung« durchläuft (es wird selbstverständlich angenommen, dass auf der Kurve Γ $f(z) \neq f(z_0)$ ist).

Der Kürze halber wollen wir die Funktionen, welche den Bedingungen 1, 2 und 3 genüge leisten, Funktionen der Klasse P nennen. $f(z)$ sei eine Funktion der Klasse P und z_0 sei ein innerer Punkt ihres Definitionsbereiches. Dann können wir dem Punkte z_0 eine positive ganze Zahl n zuordnen die wir als Multiplizität des Funktionswertes $\zeta_0 = f(z_0)$ im Punkte z_0 bezeichnen. Es gilt nämlich

Hilfssatz 3. *Wenn die zur Klasse P gehörige Funktion $f(z) \neq \text{Const.}$ ist, so gibt es um jeden inneren Punkt z_0 ihres Definitionsbereiches (mit z_0 als Mittelpunkt) einen Kreis so, dass für alle Jordanschen Kurven Γ die zu dieser Kreisfläche gehören und z_0 in ihrem Innengebiete enthalten,*

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - f(z_0)] = 2 \pi n = \text{Const.}$$

ist. (n — eine natürliche Zahl.)

Beweis. Wegen Bedingung 2 gibt es mit z_0 als Mittelpunkt einen Kreis, der ganz zum Definitionsbereich von $f(z)$ gehört, so dass im Inneren und auf dem Rande γ dieses Kreises $f(z) \neq f(z_0)$ ist, wenn nur $z \neq z_0$. Es sei Γ eine Jordansche Kurve die ganz im Inneren dieses Kreises liegt und z_0 in ihrem Innengebiete enthält. Im zweifach zusammenhängenden Bereiche, der durch Γ und γ begrenzt wird, ist $f(z) \neq f(z_0)$ und daher laut Hilfssatz 1

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - f(z_0)] = \text{Var}_{\gamma} \arg [f(z) - f(z_0)] = 2 \pi n$$

für alle Jordanschen Kurven Γ der betrachteten Art. Wegen Bedingung 3 ist n eine natürliche Zahl (die Multiplizität des Funktionswertes $\zeta_0 = f(z_0)$ in z_0 ; wir sagen auch, ζ_0 wird in z_0 durch $f(z)$ n -fach angenommen).

Hilfssatz 4. *Es sei \mathcal{Q} ein von endlich vielen Jordanschen Kurven begrenzter beschränkter Bereich der z -Ebene, der (samt Rand) ganz im Inneren des Definitionsbereiches von $f(z)$ liegt. Auf dem Rande Γ sei immer $f(z) \neq \zeta_0$. Dann ist die Anzahl A der ζ_0 Stellen (die wegen Bedingung 2 endlich ist und wobei die mehrfachen ζ_0 -Stellen entsprechend ihrer Multiplizität gezählt werden) in \mathcal{Q} gleich*

$$\frac{1}{2 \pi} \text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - \zeta_0].$$

Der Beweis wird so geführt, wie der des analogen Satzes der klassischen Funktionentheorie (vergl. auch TÔKI und SHIBATA [4] S. 161 und WHYBURN [5] S. 92). Wenn wir von nun an die »Anzahl der ζ_0 -Stellen« im Sinne dieses Hilfssatzes verstehen, so können wir folgenden Satz beweisen.

Satz 2. *Es sei die zur Klasse P gehörige Funktion $f(z)$ für alle endlichen Werte von z definiert und es sei gleichmässig*

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty.$$

Dann nimmt $f(z)$ alle komplexen Werte an und zwar einen jeden gleich oft (d. h. n_0 -mal, wo n_0 eine natürliche Zahl ist).

Beweis. Laut Satz 1 gibt es eine ganze Zahl n_0 so, dass für alle komplexe Zahlen ζ_0

$\text{Var}_\Gamma \arg [f(z) - \zeta_0] = 2\pi n_0$ ist, wenn nur das Innengebiet der Jordanschen Kurve Γ einen genügend grossen Kreis um den Nullpunkt (als Mittelpunkt) enthält. Laut Bedingung 3 kann n_0 nur positiv (d. h. eine natürliche Zahl) sein, und aus dem Hilfssatz 4 folgt, dass n_0 die Anzahl der ζ_0 Stellen innerhalb der Kurve Γ (d.h. überhaupt die Anzahl der ζ_0 Stellen) von $f(z)$ ist. w. z. b. w.

(Eingegangen: 26. Mai, 1961.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] KÜNZI, H. P.: *Quasikonforme Abbildungen*. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.
- [2] SZILÁRD, K.: "Über die Grundlagen der Funktionentheorie." *Math. Zeitschrift* **26** (1927) 5, 653—671.
- [3] GOURSAT, É.: *Cours d'analyse mathématique*. Bd. 2. Paris, 1949.
- [4] TÔKI, Y. and SHIBATA, K.: "On the Pseudo-Analytic Functions." *Osaka Math. Journal*. **6** (1954) 1, 145—165.
- [5] WHYBURN, G. T.: *Topological Analysis*. Princeton 1958.
- [6] SCHABAT, B. W. "Über Abbildungen, die durch Lösungen von Systemen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung verwirklicht werden." *Suom. Tiedeakat. Toimituksia, S. A. I.* 251/8 (1958).

ОБ АПОЛОГАХ ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, I

K. SZILÁRD

Резюме

Доказываются следующие теоремы.

1. Пусть $\zeta = f(z)$ непрерывная комплекснозначная функция, определена для всех конечных точек комплексной z -плоскости и пусть

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$$

равномерно. Тогда для любого комплексного числа ζ_0 существует круг с центром $z = 0$ и с радиусом r_{z_0} такой, что для любой жордановой кривой Γ содержащей в своей внутренней области этот круг, величина

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - z_0] = 2\pi n$$

если z обходит кривую Γ в положительном направлении и где n целое число (одно и то же для всех значений ζ_0).

2. Пусть функция теоремы 1, $\zeta = f(z)$ имеет еще следующие свойства: она принимает все его значения ζ_0 изолированно (т. е., если $f(z_0) = \zeta_0$, тогда существует круг с центром z_0 в котором $f(z) \neq \zeta_0$ если только $z \neq z_0$) и $\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - f(z_0)] > 0$, если $f(z)$ определена в некоторой замкнутой жордановой области ограниченной кривой Γ и где z_0 — внутренняя точка этой области (на Γ $f(z) \neq f(z_0)$). Тогда n предыдущей теоремы означает число точек z в которых $f(z) = \zeta_0$ (с учетом возможных кратностей этих значений).