SUR LE MODULE DE CONTINUITÉ INTÉGRALE

par

J. CZIPSZER

§ 1.

Cette note a pour l'objet d'améliorer le théorème suivant de HILLE—KLEIN—IZUMI.

Soit f une fonction réelle, mesurable, de période 2π et à p-ième puissance intégrable sur $[0, 2\pi]$ pour un $p \geqq 1$.[1] Supposons encore que f n'est pas équivalent à une constante. Alors l'inégalité

$$\int_x^{x+h} |f(t)|^p \, dt \leqq c_{f,p} \, \omega_p^p(f, h)/h^{p-1} \tag{1.1}$$

$$(-\infty < x < \infty, \ 0 < h \leqq 2\pi)$$

est valable, où $c_{f,p}$ signifie une constante indépendente de x et de h et $\omega_p(f, h)$ désigne le p-ième module de continuité de f, c'est-à-dire

$$\omega_p(f, h) = \sup_{0 \leqq t \leqq h} \Big(\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p}.$$

Pour $p = 1$ ce théorème est dû à MM. E. HILLE et G. KLEIN (voir [1], Théorème 1). C'est M. S. IZUMI qui l'a démontré pour $p \geqq 1$ quelconque (voir [2]).

En adoptant les mêmes hypothèses que plus haut, nous allons établir l'inégalité

$$\int_E |f(t)|^p \, dt \leqq c'_{f,p} \, \omega_p(f, h) \tag{1.2}$$

pour tout ensemble $E \subset [0, 2\pi]$ mesurable et de mesure 2π, la constante $c'_{f,p}$ étant indépendente de E.

f n'étant pas équivalent à une constante, on a $h = O\big(\omega_p(f, h)\big)$ $(h \to 0)$ (cf. [3], p. 45 et (2.9) plus bas). Par conséquent (1.2) entraîne (1.1). Vu encore que pour tout $p \geqq 1$ il existe des $f \in L^p$ tels que $\omega_p(f, h) \neq O(h)$, (1.2) est effectivement plus fin que (1.1) lorsque $p > 1$.

Quant aux premiers membres des inégalités (1.1) et (1.2), remarquons ce qui suit:

En prenant la limite supérieure des quantités $\int_x^{x+h} |f(t)|^p \, dt$ lorsque x parcourt les nombres réels et celle des quantités $\int_E |f(t)|^p \, dt$ lorsque E parcourt

[1] Dans la suite nous désignerons par L^p la classe de ces fonctions.

les parties mesurables de $[0, 2\pi]$ de mesure h, le quotient de ces deux nombres devient infiniment petit pour certains f lorsque $h \to 0$. Cela veut dire que la généralisation du domaine d'intégration au premier membre de (1.1) signifie aussi une amélioration essentielle de cette inégalité.

La démonstration de (1.1) pour $p = 1$, resp. pour $p \geqq 1$ utilise, dans chacune des notes citées, certaines moyennes de la série de Fourier de f (moyenne de Jackson chez Hille—Klein, moyenne d'Abel—Poisson chez Izumi). Or nous avons réussi à établir (1.2) par une voie tout à fait directe et du même coup extrêmement simple.

L'inégalité (1.2) peut être étendue à la classe $L^p(-\infty, \infty)$ des fonctions réelles, mesurables et à p-ième puissance intégrables sur tout l'axe réel. Bien entendu, pour ces fonctions le p-ième module de continuité se définit par

$$\omega_p(f, h) = \sup_{0 \leq t \leq h} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Dans la suite nous nous servirons encore des notations suivantes:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \quad \text{pour } f \in L^p,$$

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \quad \text{pour } f \in L^p(-\infty, \infty),$$

$$m(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx \qquad \text{pour } f \in L.$$

Nous convenons encore de poser $0^\circ = 1$.

§ 2.

(2.1) **Théorème.** *Si $f \in L^p(-\infty, \infty)$ et E est un ensemble linéaire de mesure finie h, alors*

$$\int_E |f(x)|^p \, dx \leqq c_p \|f\|_p^{p-1} \omega_p(f, h),$$

où la constante c_p ne dépend que de p.

(2.2) **Théorème.** *Si $f \in L^p$ n'est pas équivalent à une constante et si E est une partie mesurable de $[0, 2\pi]$, alors*

$$\int_E |f(x)|^p \, dx \leqq c'_p \frac{\|f\|_p^p}{\omega_p(f, 2\pi)} \omega_p(f, h), \tag{2,3}$$

ou h désigne la mesure de E et la constante c'_p ne dépend que de p.

Les démonstrations de ces théoremes se laissent mener en partie simultanément. Désignons par I l'axe réel ou l'intervalle $[0, 2\pi]$, suivant que nous envisageons le premier ou le deuxième théorème.

En posant

$$F(x) = \int_E |f(x+u)|^p \, du ,$$

nous partons de la formule évidente

$$(2.4) \qquad \int_0^h F(t)\, dt - \int_0^h F(x+t)\, dt = \int_0^h \big(F(t) - F(t+h)\big)\, dt\,.$$ [2]

En tenant compte de l'inégalité

$$a^p - b^p \leqq p\, a^{p-1} |a-b| \qquad (a \geqq 0\,, b \geqq 0)$$

et de celle de Hölder, on obtient les formules

$$\begin{aligned} F(0) - F(t) &= \int_E (|f(u)|^p - |f(t+u)|^p)\, du \leqq \\ (2.5) \qquad &\leqq p \int_E |f(u)|^{p-1} |f(u) - f(t+u)|\, du \leqq \\ &\leqq p\Big(\int_E |f(u)|^p du\Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\int_E |f(u) - f(t+u)|^p du\Big)^{\frac{1}{p}} \leqq p\, \|f\|_p^{p-1}\, \omega_p(f, h) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^x \big(F(t) - F(t+h)\big)\, dt &= \int_E \int_0^x \big(|f(t+u)|^p - |f(t+u+h)|^p\big)\, dt\, du \leqq \\ (2.6) \quad &\leqq p \int_E \int_I |f(t+u)|^{p-1} |f(t+u) - f(t+u+h)|\, dt\, du \leqq \\ &\leqq p\Big(\int_E \int_I |f(t+u)|^p dt\, du\Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\int_E \int_I |f(t+u) - f(t+u+h)|^p dt\, du\Big)^{\frac{1}{p}} \leqq \\ &\leqq ph\, \|f\|_p^{p-1}\, \omega_p(f, h)\,, \end{aligned}$$

valables pour $0 \leqq t \leqq h$, $0 \leqq x \in I$.

On déduit de (2.5), (2.4) et (2.6)

$$(2.7) \qquad F(0) \leqq 2\, p\, \|f\|_p^{p-1} \omega_p(f, h) + \frac{1}{h} \int_0^h F(x+t)\, dt \qquad (0 \leqq x \in I)$$

où nous avons supposé $h > 0$ ce qui est bien légitime.

Si $f \in L^p(-\infty, \infty)$, on a évidemment $\lim_{x=+\infty} F(x) = 0$ et par conséquent

$$F(0) \leqq 2\, p\, \|f\|_p^{p-1}\, \omega_p(f, h)\,.$$

(2.1) est donc démontré avec $c_p = 2p$.

---

[2] L'emploi de cette formule nous a été suggéré par un passage du traité de M. ZYGMUND ([3], p. 45) où il s'agit de démontrer que $\omega_p(f, h) = o(h)$ pour $f \in L^p$ n'a pas lieu à moins que f ne soit équivalent à une constante.

Passons maintenant au théorème (2.2). Intégrons suivant x sur $[0, 2\pi]$ dans (2.7):

$$F(0) \leqq 2p \|f\|_p^{p-1} \omega_p(f, h) + \frac{h}{2\pi} \|f\|_p^p . \tag{2.8}$$

En vertu de l'inégalité de Minkowski $\omega_p(f, t)$ vérifie l'inégalité

$$\omega_p(f, t_1 + t_2) \leqq \omega_p(f, t_1) + \omega_p(f, t_2) \qquad (t_1 \geqq 0, t_2 \geqq 0) .$$

Celle-ci entraîne grâce à la monotonité de $\omega_p(f, t)$

$$\omega_p(f, \lambda t) \leqq (\lambda + 1) \omega_p(f, t) \qquad (t \geqq 0, \lambda \geqq 0) .$$

En posant $t = h$, $\lambda = \dfrac{2\pi}{h}$, on en tire

$$h \leqq \frac{4\pi}{\omega_p(f, 2\pi)} \omega_p(f, h) . \tag{2.9}$$

$\omega_p(f, 2\pi) \neq 0$, puisque f n'est pas équivalent à une constante. (Cf. [3], p. 45 ou (3.1) plus bas.) Observons encore que

$$\omega_p(f, t) \leqq 2 \|f\|_p \qquad (t \geqq 0) . \tag{2.10}$$

Enfin (2.8), (2.9) et (2.10) entraînent

$$F(0) \leqq 6p \frac{\|f\|_p^p}{\omega_p(f, 2\pi)} \omega_p(f, h)$$

ce qui équivaut à (2.3) avec $c_p' = 6p$.

Remarquons que notre démonstration peut être simplifiée si l'on suppose que E est un intervalle. En effet, l'introduction de la fonction auxiliaire F devient alors superflue. Soit p. e. $E = [0, h]$. En appliquant (2.4) à $|f(t)|^p$ au lieu de $F(t)$ et en évaluant le deuxième membre par un calcul analogue à (2.6), nous obtenons

$$\int_E |f(t)|^p dt \leqq p \|f\|_p^{p-1} \omega_p(f, h) + \int_0^h |f(x+t)|^p dt \qquad (0 \leqq x \in I) .$$

La conclusion de la démonstration reste la même que plus haut.

§ 3.

Dans ce qui suit nous cherchons à donner une forme plus expressive au coefficient de $\omega_p(f, h)$ qui figure au second membre de (2.3). Démontrons à cette fin le lemme suivant:

(3.1) *Toute fonction $f \in L^p (p \geqq 1)$ vérifie l'inégalité*

$$\omega_p(f, 2\pi) \geqq \frac{1}{2} \|f - m(f)\|_p .$$

La démonstration sera basée sur l'inégalité

$$|\alpha + 1|^p \geqq \frac{1}{2^p} |\alpha|^p + \frac{\alpha}{2} , \tag{3.2}$$

valable pour tout nombre réel α et $p \geqq 1$. Pour $\alpha \geqq 0$ (3.2) s'ensuit des relations

$$\frac{1}{2}(\alpha+1)^p > \frac{1}{2}\alpha^p \geqq \frac{1}{2^p}\alpha^p$$

et

$$\frac{1}{2}(\alpha+1)^p \geqq \frac{1}{2}(\alpha+1) > \frac{1}{2}\alpha\,,$$

tandis qu'il est évident pour $-2 \leqq \alpha < 0$, le deuxième membre étant non-positif dans ce cas. Soit enfin $a < -2$ et posons $\gamma = -\alpha$. Observons que par suite de la convexité de la fonction $t \to t^p$, on a pour tout couple a, b de nombres non négatifs

$$a^p + b^p \geqq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^p .$$

En posant $a = \gamma - 1$, $b = 1$, il vient

$$(\gamma - 1)^p \geqq 2\left(\frac{\gamma}{2}\right)^p - 1 > \left(\frac{\gamma}{2}\right)^p > \left(\frac{\gamma}{2}\right)^p - \frac{\gamma}{2},$$

ce qui entraîne (3.2).

En remplaçant dans (3.2) α par $\dfrac{\alpha}{\beta}$, nous obtenons l'inégalité

$$|\alpha+\beta|^p \geqq \frac{1}{2^p}|\alpha|^p + \frac{\alpha}{2}|\beta|^{p-1}\operatorname{sg}\beta\,, \tag{3.3}$$

valable quelques soient les nombres réels a, β.

Passons maintenant à la démonstration de (3.1). Posons $g(x) = f(x) - m(f)$. Il vient

$$\omega_p^p(f, 2\pi) \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p\,dx\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(y) - f(x)|^p\,dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(y) - g(x)|^p\,dydx\,.$$

En appliquant (3.3) avec $a = g(y)$, $\beta = -g(x)$, nous trouvons

$$\omega_p^p(f, 2\pi) \geqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2^p}|g(y)|^p - \frac{1}{2}g(y)\,|g(x)|^{p-1}\operatorname{sg} g(x)\right\}dydx =$$

$$= \frac{1}{2^p}\|g\|_p^p = \frac{1}{2^p}\|f - m(f)\|_p^p,$$

c. q. f. d.

Notre lemme nous permet d'énoncer la variante suivante du théorème (2.2):

(3.4) **Théorème.** *En admettant les hypothèses de* (2.2) *on a*

$$\int_E |f(x)|^p \, dx \leqq c_p'' \frac{\|f\|_p^p}{\|f - m(f)\|^p} \omega_p(f, h).$$

(Reçu le 28 mai 1961.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] HILLE, E.—KLEIN, G.: „Riemann's localization theorem for Fourier series". *Duke Mathematical Journal* **21** (1954) 587—591.
[2] IZUMI, S.: „Some trigonometrical series". XIV. *Proceedings of the Japan Academy* **31** (1955) 324—326.
[3] ZYGMUND, A.: *Trigonometric series*, vol. I. Cambridge University Press, 1959.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ МОДУЛЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

J. CZIPSZER

Резюме

Доказывается следующее обобщение теорем E. HILLE., G. KLEIN и S. IZUMI (см. [1], [2]):

Если функция $f \in L^p(0, 2\pi)$ неэквивалентна константой и $E \subset [0, 2\pi]$ изме- римое множество меры h, тогда имеет место неравенство (1.2), где

$$\omega_p(f, h) = \sup_{0 \leqq t \leqq h} \left(\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

а $c_{f,p}$ константа, зависимая только от f и p. Доказывается еще аналогичная теорема для класса $L^p(-\infty, \infty)$.