AZ ÁGAZATI ÉS IGAZGATÁSI RENDSZERŰ INPUT-OUTPUT MÉRLEGEK KAPCSOLATÁRÓL

BOD PÉTER

A magyar népgazdasági tervezési gyakorlatban az elmúlt évek során két ún. ágazati kapcsolati mérlegmodell került kidolgozásra: a K. S. H. ágazati kapcsolatok mérlege és az O. T. sakktábla mérlege. Mind a kettő az irodalomból nyilt input-output modellek néven ismert makroökonómiai modelleknek egy egy változata a magyar népgazdaság ágazati kapcsolatainak ábrázolására. A két mérleg agregációs szerkezete lényegesen eltér egymástól. A K. S. H. mérleg a népgazdaságot iparcsoportokra bontja; míg az O. T. mérlegben az egyes főhatóságok alá rendelt termelőszervezetek képezik a szektorokat. A K. S. H. modell tehát „ágazati rendszerű", míg az O. T. modellt „igazgatási rendszerűnek" nevezzük.

A mérlegek gyakorlati felhasználása során szerzett tapasztalatok azt mutatják, hogy gyakran célszerű lehet ugyanazokat a népgazdasági folyamatokat egyidejűleg ágazati és igazgatási bontásban is vizsgálni. Ez teszi szükségessé a kétféle agregációs elv szerint felépített modellekben szereplő mennyiségek egymás közötti összefüggéseinek a vizsgálatát.

Az alábbiakban — bizonyos közgazdaságilag elfogadható feltevések mellett — bemutatjuk ezeket az összefüggéseket. Az összefüggések ismerete megkönnyíti a népgazdasági folyamatok ágazati és igazgatási szerkezetben történő egyidejű tanulmányozását és lehetővé teszi, hogy a kétféle modell ma még meg nem levő konzisztenciáját biztosítsuk.

I.

Tekintsük a szocialista gazdaság egy zárt (külkereskedelmi kapcsolatokat nem tartalmazó) egységét, amely bizonyos mennyiségű termelőkapacitás (állóeszközkapacitás) segítségével n féle homogén termelési ágat üzemeltet; miközben a termelőapparátus m számú főhatóság irányítása alatt áll.

Rendelkezésünkre áll két technológiai mátrix, amelyeket az ágazati kapcsolatok mérlege, illetve a sakktábla mérleg alapján számítottunk ki. Az ágazati kapcsolatok mérlegéből készült technológiai mátrix (A) a termelési ágak számának megfelelően: $(n \times n)$ méretű, míg a sakktábla mérlegből számított (Q): $(m \times m)$ méretű. Az ágazatok szerinti agregációban a teljes és netto termelések vektorait $\mathbf{x}$-szel és $\mathbf{y}$-nal jelöljük, míg az igazgatási szerkezetben $\mathbf{q}$-val és $\mathbf{r}$-rel. Az ágazati szerkezetű vektorok nyilván n, az igazgatási szerkezetőek pedig m dimenziósak.

Fenti jelöléseknek megfelelően két alapmodellünk van, amelyek a társadalmi termék újratermelésének folyamatát két különböző vetületben ábrázolják. A két alapmodell egyenletei:

$$(1)\quad \begin{aligned}(E-A)\,\mathbf{x} &= \mathbf{y}\\ \mathbf{x} = (E-A)^{-1}\cdot\mathbf{y} &= B\mathbf{y}\end{aligned} \qquad \text{és} \quad (2)\quad \begin{aligned}(E-Q)\,\mathbf{q} &= \mathbf{r}\\ \mathbf{q} = (E-Q)^{-1}\cdot\mathbf{r} &= R\cdot\mathbf{r}\,.\end{aligned}$$

(E mindig a megfelelő rendű egységmátrixot jelöli)

A termelés anyagi előfeltételei közé tartozó állóeszközök a népgazdaságban kétféle szempont szerint vannak elosztva. Minden állóeszköz egyrészt meghatározott termelési ághoz tartozik (annak megfelelően, hogy vele milyen használati értéket termelnek), másrészt az az üzem, amelyben a szóban levő állóeszköz működik, valamelyik főhatóság alá tartozik. Az állóeszközöknek ezt a kettős elosztottságát ágazatok és igazgatási egységek között egy ún. K kapacitásmátrix segítségével ábrázolhatjuk.

$$(3)\qquad K = (k_{ij})\,.$$

k_{ij} megmutatja, hogy az i-ik főhatóság irányítása alatt milyen méretű állóeszközkapacitás áll a j-ik fajta használati értéket termelő, tehát a j-ik termelési ágazatba tartozó állóeszközök közül. Itt célszerűnek látszik, hogy az állóeszközök kapacitását a velük elérhető maximális — árakban mért — termelési volumenekkel fejezzük ki.

Képezzünk a K mátrixból két megoszlási viszonyszámokat tartalmazó mátrixot. Mégpedig:

az ágazati kapacitások igazgatási szerkezetét tükröző mátrixot :

$$(4)\qquad [\lambda] = \left(\frac{k_{ij}}{\sum\limits_{l=1}^{m} k_{lj}}\right)$$

az igazgatási egységek kapacitásainak ágazati összetételét tükröző mátrixot :

$$(5)\qquad [\mu] = \left(\frac{k_{ij}}{\sum\limits_{l=1}^{n} k_{il}}\right).$$

Tételezzük fel, hogy az állóeszköz kapacitások kihasználása nagyjából azonos szinten van a népgazdaság minden ágában. E feltevés mellett igazak az alábbi összefüggések $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{q}$ és $\mathbf{r}$ között:

$$(6)\qquad \mathbf{q} = [\lambda]\,\mathbf{x} \quad \text{és}$$

$$(6a)\qquad \mathbf{x}^* = \mathbf{q}^*[\mu] \qquad \text{illetve}$$

$$(7)\qquad \mathbf{x} = [\mu^*]\,\mathbf{q}$$

$$(8)\qquad \mathbf{y} = (E-A)\,\mathbf{x} = (E-A)\,[\mu^*]\,\mathbf{q} = (E-A)\,[\mu^*]\,R\cdot\mathbf{r}$$

$$(9)\qquad \mathbf{r} = (E-Q)\,\mathbf{q} = (E-Q)\,[\lambda]\,\mathbf{x} = (E-Q)\,[\lambda]\,B\cdot\mathbf{y}$$

(* a transzpozíció jele)

A kapacitás kihasználás azonos fokának feltételezése megkerülhető. Lásd: [3].

II.

Bontsuk a népgazdaságot $N = n \cdot m$ szektorra; külön szektornak tekintve minden ágazat összes (m féle) főhatóság alá tartozó részét; vagy minden igazgatási egység összes (n féle) ágazatát. Ez a kétféle csoportosítás csak a szektorok sorszámában tér el egymástól. Az a szektor, amely az a sorszámú ágazathoz és a b sorszámú igazgatási egységhez tartozik az elsőesetben az $[(a—1)m+b]$ sorszámot, míg a második esetben a $[(b—1)\,n + b]$ sorszámot kapja.

Készítsük el az N szektorú modell ún. teljes ágazati kapcsolati mérlegét. A kétféle csoportosításnak megfelelően két táblát kapunk:

$$(10)\qquad [x_{ij}] = \left[\begin{array}{ccccc}
x_{11}^{11} \dots x_{11}^{1m} & & & & x_{1n}^{11} \dots x_{1n}^{1m} \\
\vdots \qquad \vdots & & \dots\dots & & \vdots \qquad \vdots \\
x_{11}^{m1} \dots x_{11}^{mm} & & & & x_{1n}^{m1} \dots x_{1n}^{mm} \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\
 & & x_{ij}^{11} \dots x_{ij}^{1m} & & \\
 & & x_{ij}^{kl} & & \\
 & & x_{ij}^{m1} \dots x_{ij}^{mm} & & \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\
x_{n1}^{11} \dots x_{n1}^{1m} & & & & x_{nn}^{11} \dots x_{nn}^{1m} \\
\vdots \qquad \vdots & & & & \vdots \qquad \vdots \\
x_{n1}^{m1} \dots x_{n1}^{mm} & & & & x_{nn}^{m1} \dots x_{nn}^{mm}
\end{array}\right]$$

$$(11)\qquad [x^{kl}] = \left[\begin{array}{ccccc}
x_{11}^{11} \dots x_{1n}^{11} & & & & x_{11}^{1m} \dots x_{1n}^{1m} \\
\vdots \qquad \vdots & & & & \vdots \qquad \vdots \\
x_{n1}^{11} \dots x_{nn}^{11} & & & & x_{n1}^{1m} \dots x_{nn}^{1m} \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\
 & & x_{11}^{kl} \dots x_{1n}^{kl} & & \\
 & & \vdots \quad x_{ij}^{kl} \quad \vdots & & \\
 & & x_{n1}^{kl} \dots x_{nn}^{kl} & & \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\
x_{11}^{m1} \dots x_{1n}^{m1} & & & & x_{11}^{mm} \dots x_{1n}^{mm} \\
\vdots \qquad \vdots & & & & \vdots \qquad \vdots \\
x_{n1}^{m1} \dots {}_{nn}^{m1} & & & & x_{n1}^{mm} \dots x_{nn}^{mm}
\end{array}\right]$$

x_{ij}^{kl} jelenti az k-ik főhatóság alá tartozó i-ik ágazat termelőegységeinek a termelését a j-ik ágazat l-ik főhatóság alá tartozó termelőszervezeteinek termelőfogyasztása számára.

Mivel az $[X_{ij}]$ és $[X^{kl}]$ mátrixok csak a sorok és oszlopok sorrendjében különböznek egymástól, van olyan V permutációs mátrix, hogy

$$(12)\qquad [X_{ij}] = V\,[X^{kl}]\,V,$$

illetve

$$(13)\qquad [X^{kl}] = V\,[X_{ij}]\,V.$$

III.

A két teljes ágazati mérlegből két ún. teljes technológiai mátrixot számíthatunk, amelyek szintén csak a sorok és oszlopok sorrendjében térnek el egymástól. Jelölje $[A_{ij}]$ az $[X_{ij}]$-ből és $[Q_{kl}]$ a $[X^{kl}]$-ból számított technológiai mátrixokat, akkor:

$$(14)\qquad [A_{ij}] = V\,[Q_{kl}]\,V,$$

illetve:

$$(15)\qquad [Q_{kl}] = V\,[A_{ij}]\,V.$$

Az alapmodellek technológiai mátrixai nem egyebek, mint a teljes technológiai mátrixok megfelelő agregátumai.

Értelmezzük az alábbi agregáló operátorokat:

$$(16)\qquad G^{(1)} = \operatorname{diag}(G_1^{(1)}, G_2^{(1)}, \dots G_n^{(1)}), \quad \text{ahol } G_i^{(1)} = \overbrace{(1, 1, \dots 1)}^{m} \quad (i = 1, 2, \dots n),$$

$$(17)\qquad H^{(1)} = \operatorname{diag}(H_1^{(1)}, H_2^{(1)}, \dots H_n^{(1)}), \quad \text{ahol } H_i^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_{1i} \\ \lambda_{2i} \\ \vdots \\ \lambda_{mi} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots n),$$

$$(18)\qquad G^{(2)} = \operatorname{diag}(G_1^{(2)}, G_2^{(2)}, \dots G_m^{(2)}), \quad \text{ahol } G_k^{(2)} = \overbrace{(1, 1, \dots 1)}^{n} \quad (k=1, 2, \dots m),$$

$$(19)\qquad H^{(2)} = \operatorname{diag}(H_1^{(2)}, H_2^{(2)}, \dots H_m^{(2)}), \quad \text{ahol } H_k^{(1)} = \begin{pmatrix} \mu_{k1} \\ \mu_{k2} \\ \vdots \\ \mu_{kn} \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots m).$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy igazak az alábbi összefüggések:

$$(20)\qquad \underset{(n\times n)}{A} = \underset{(n\times mn)}{G^{(1)}}\ \overset{(mn\times mn)}{[A_{ij}]} \cdot \underset{(mn\times n)}{H^{(1)}},$$

$$(21)\qquad \underset{(m\times m)}{Q} = \underset{(m\times mn)}{G^{(2)}}\ \overset{(mn\times mn)}{[Q_{kl}]} \cdot \underset{(mn\times m)}{H^{(2)}}.$$

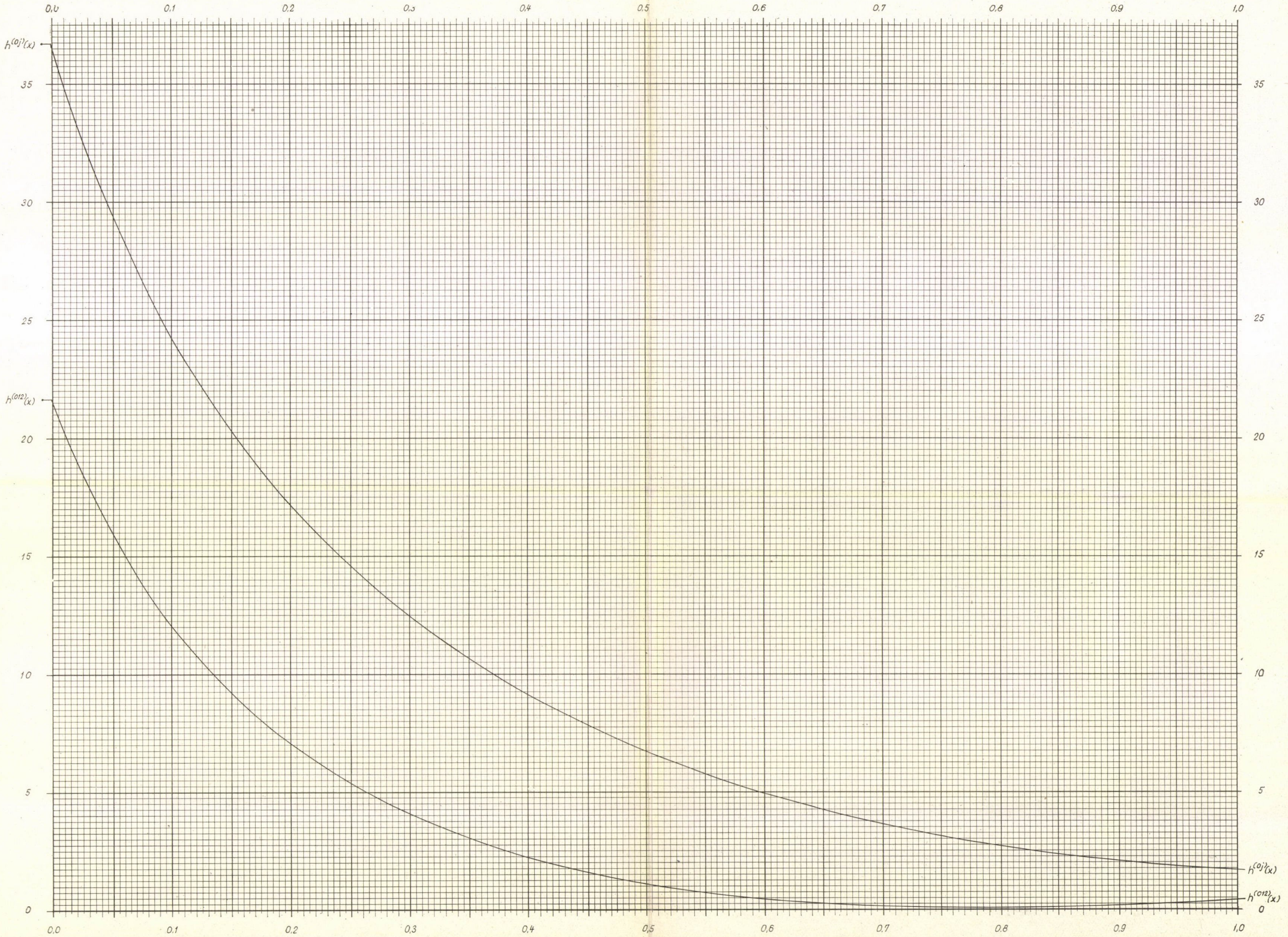
Célszerűen választott ún. desagregáló operátorok segítségével elérhetjük, hogy az A illetve Q mátrixokból olyan $[\overline{A}_{ij}]$ illetve $[\overline{Q}_{kl}]$ $N \times N$ méretű mátrixokat állítsunk elő, amelyeket 18. és 19. szerint agregálva, ismét A-t illetve Q-t kapunk. Ezt használjuk fel arra, hogy A és Q között közvetlen kapcsolatot teremtsünk.

Legyen:

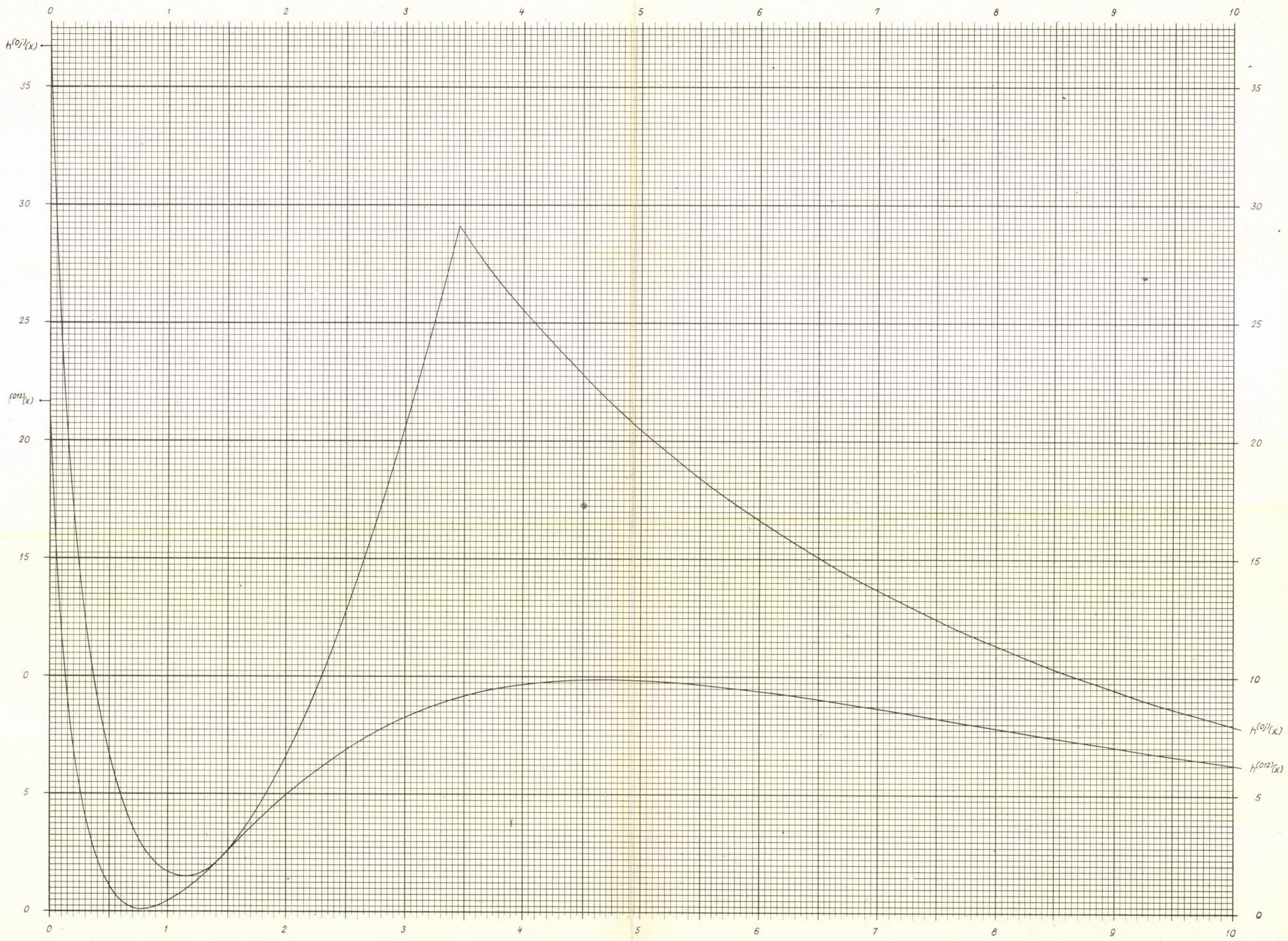
$$(22)\qquad \overline{H}^{(1)} \operatorname{diag}(\overline{H}_1^{(1)}, \overline{H}_2^{(1)} \dots \overline{H}_n^{(1)}), \quad \text{ahol } \overline{H}_i^{(1)} = \begin{pmatrix} l_{1i} \\ l_{2i} \\ \vdots \\ l_{mi} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

úgy, hogy

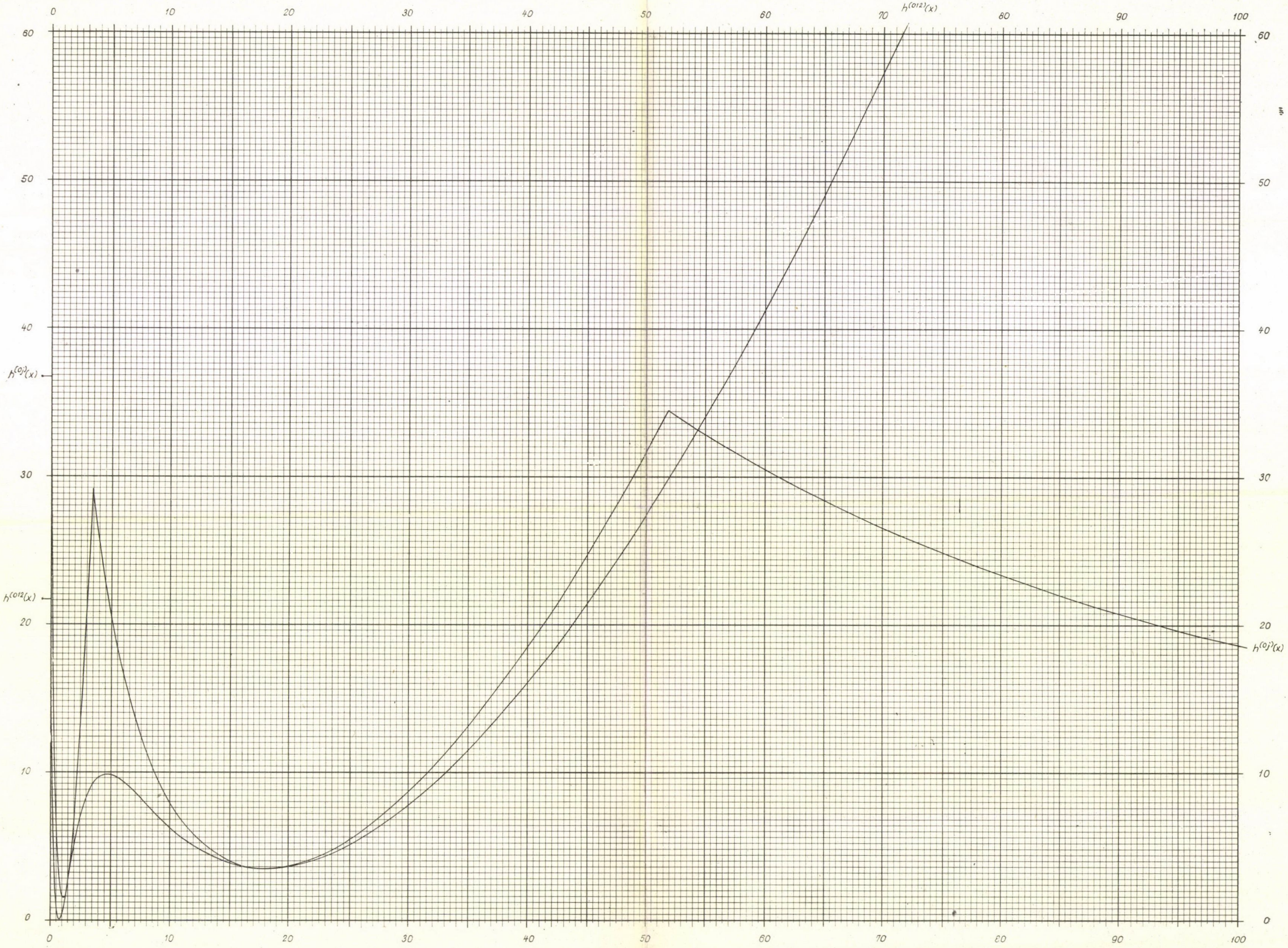
$$\sum_{j=1}^{m} l_{ji} = 1 \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$



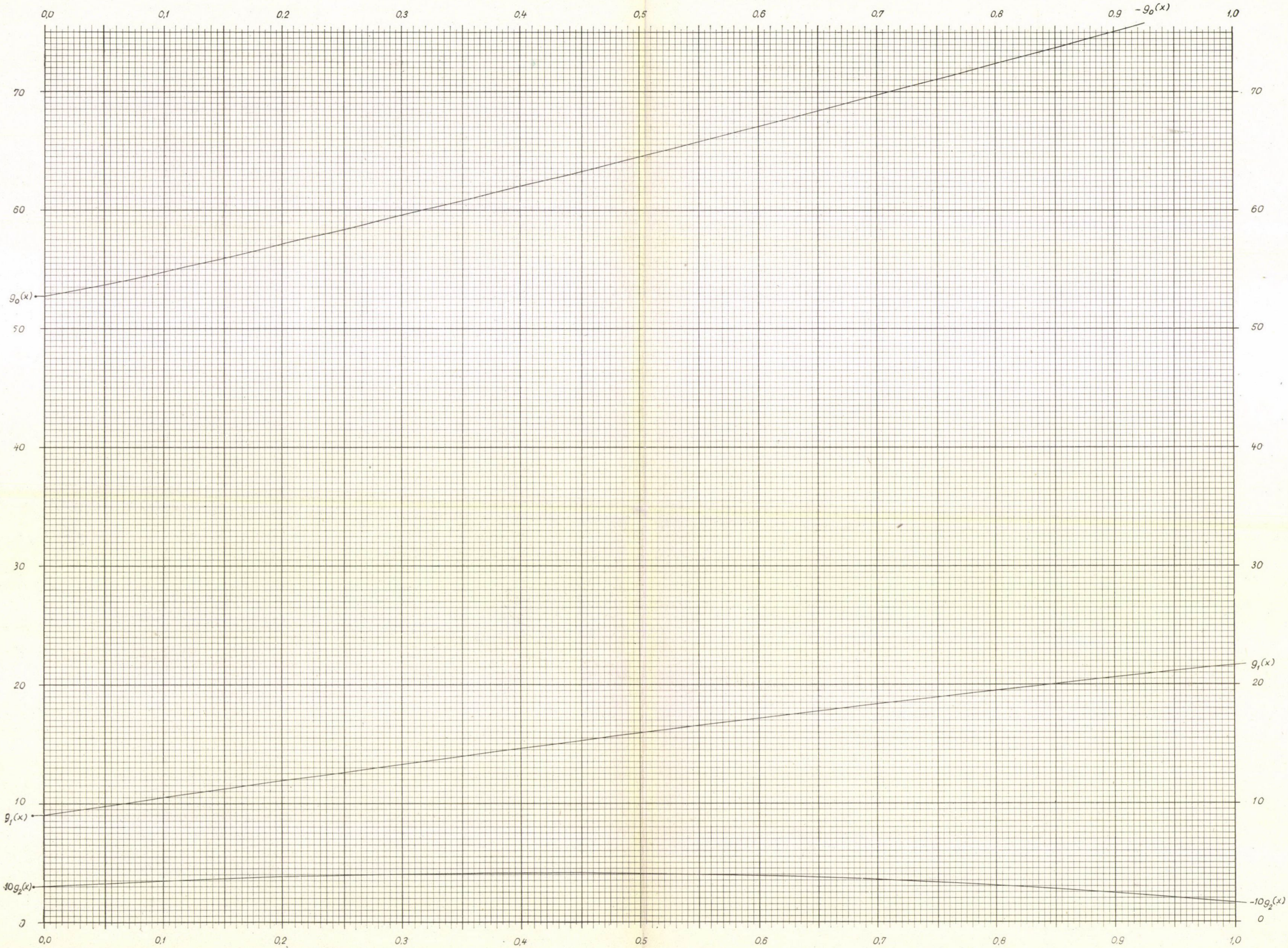
7/c. ábra



7/b. ábra

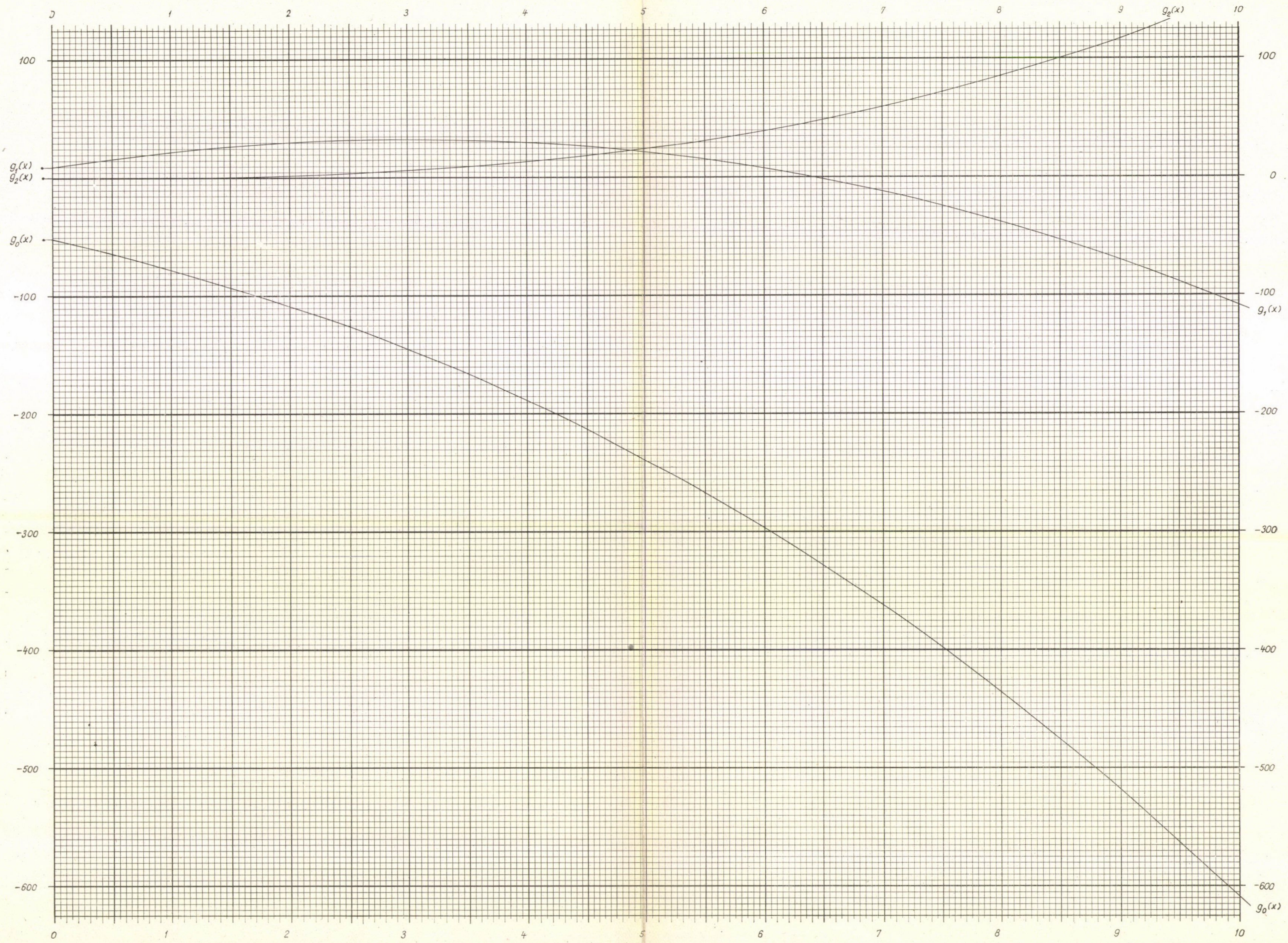


7/a. ábra

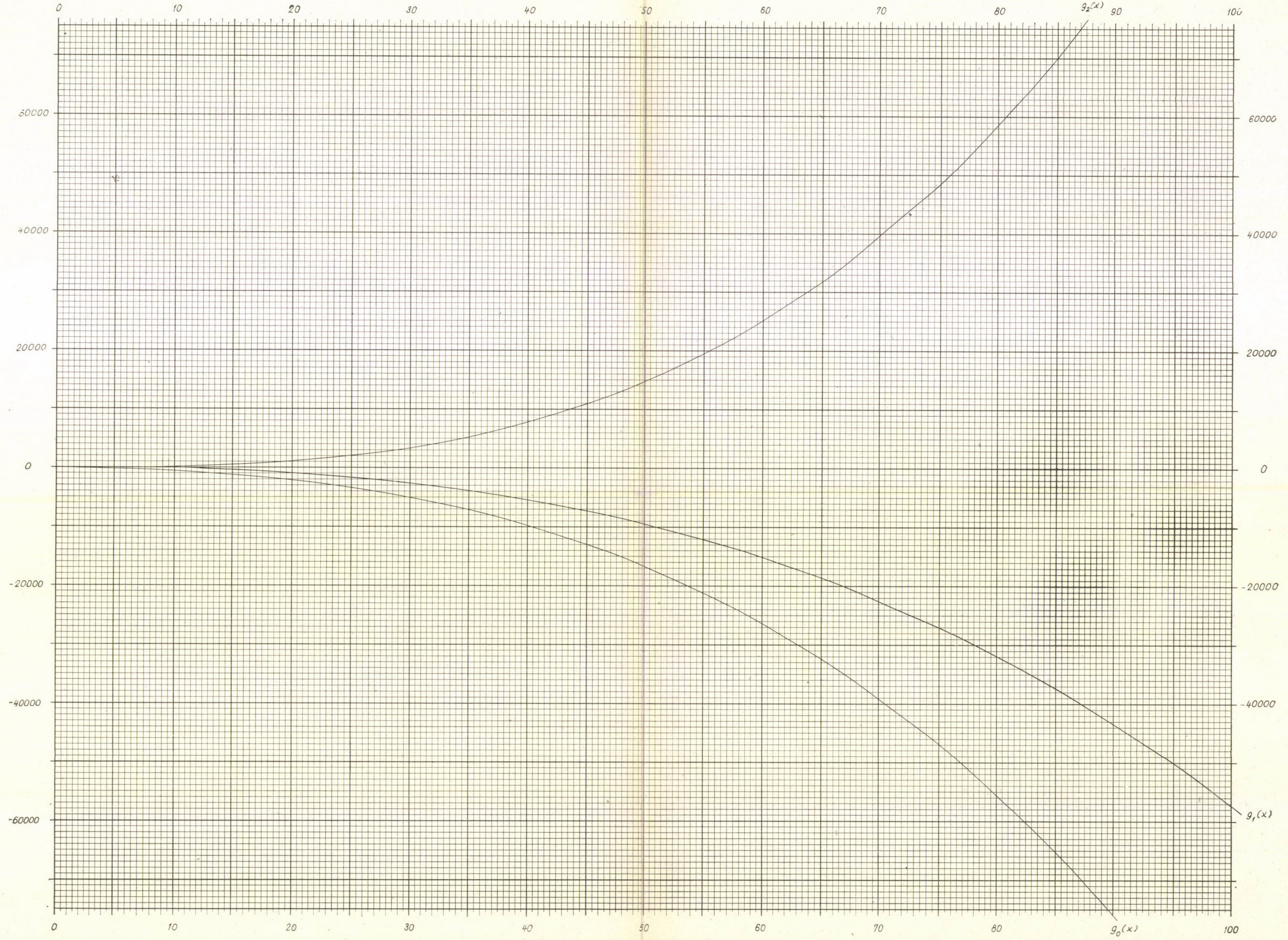


0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
$-g_0(x)$
70
60
$g_0(x)$
50
40
30
$g_1(x)$
20
10
$g_1(x)$
$10g_2(x)$
$-10g_2(x)$
0

6/c. ábra

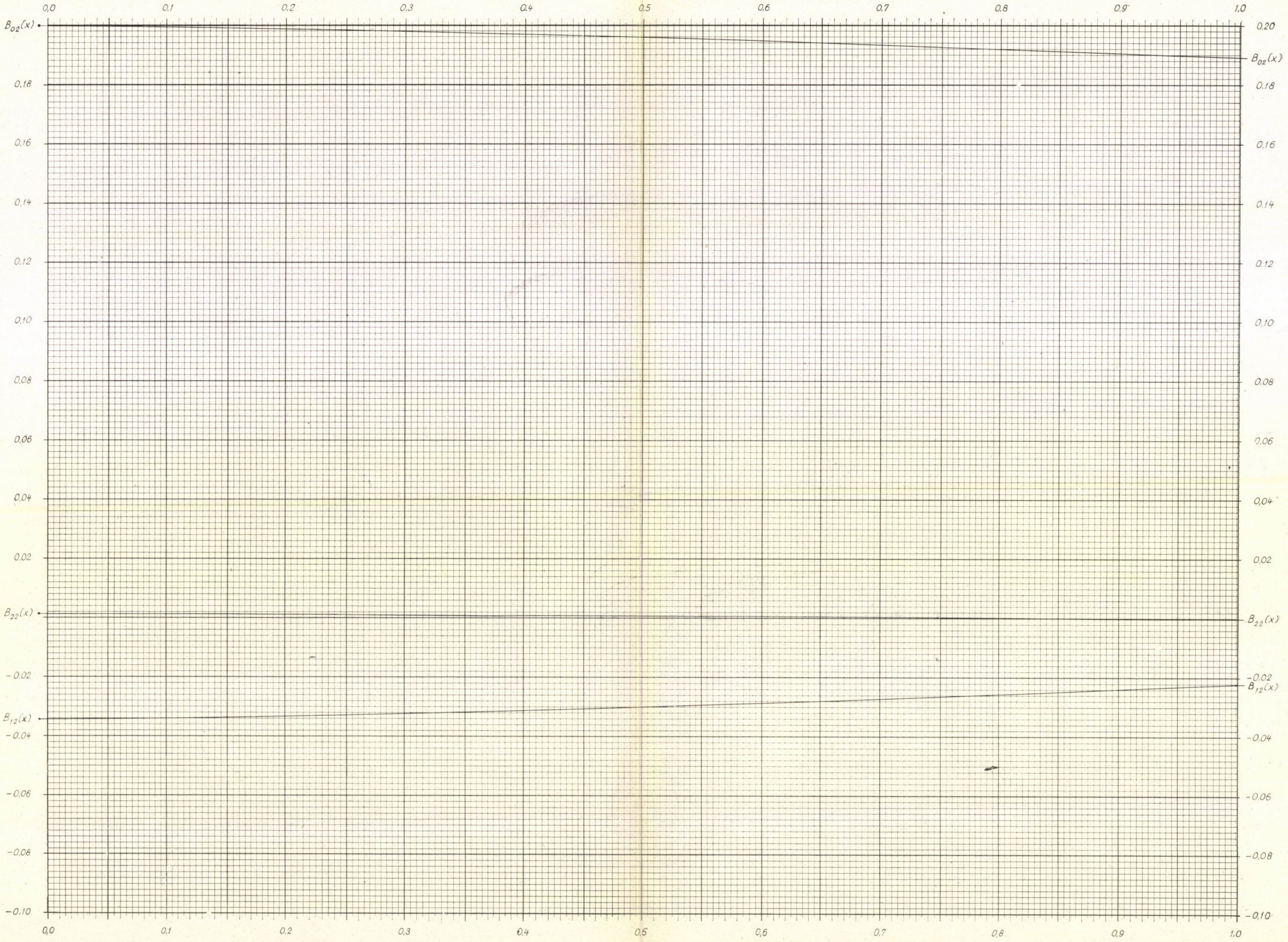


6/b. ábra

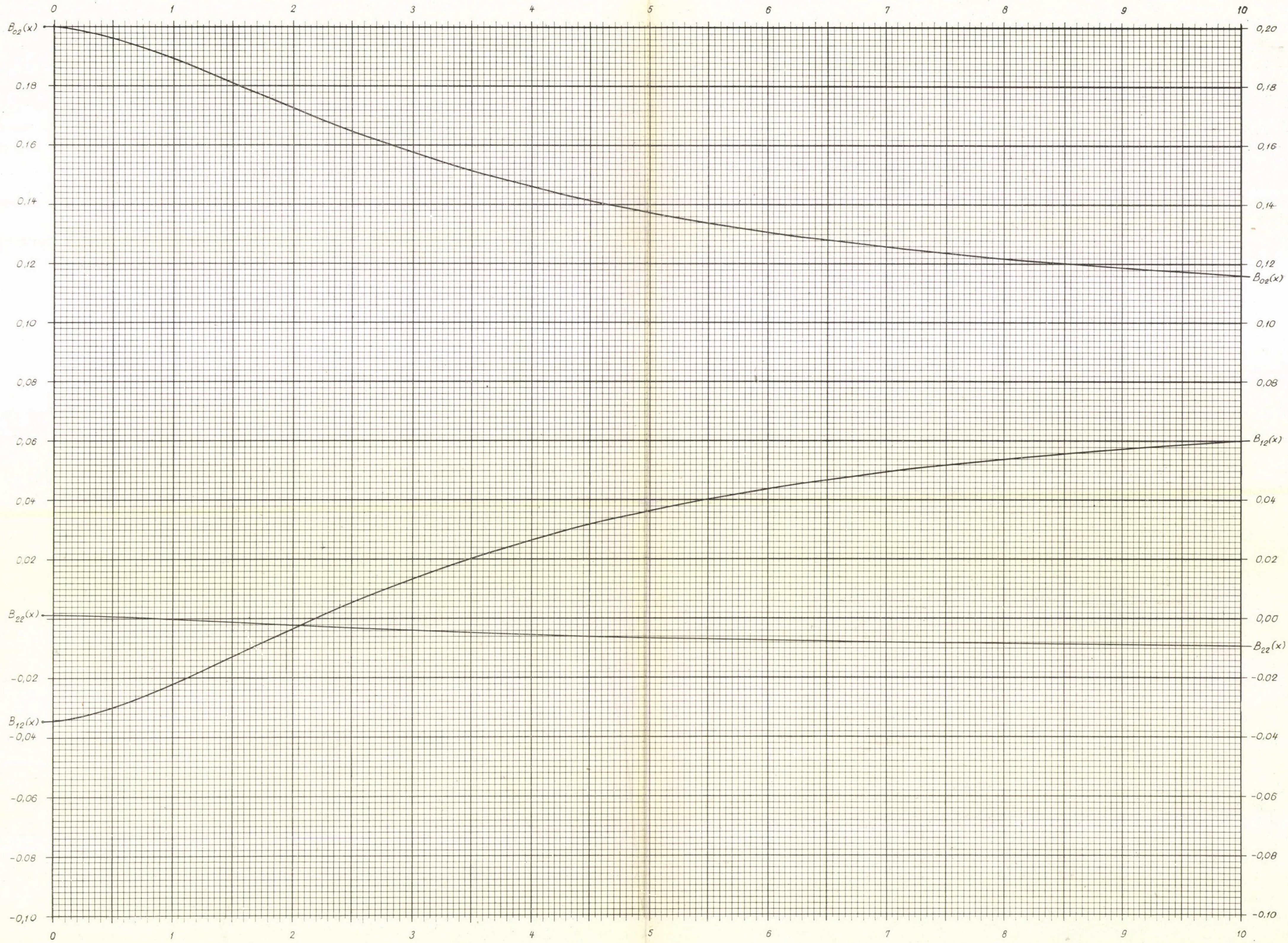


0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
60000
40000
20000
0
-20000
-40000
-60000
$g_2(x)$
$g_1(x)$
$g_0(x)$

6/a. ábra

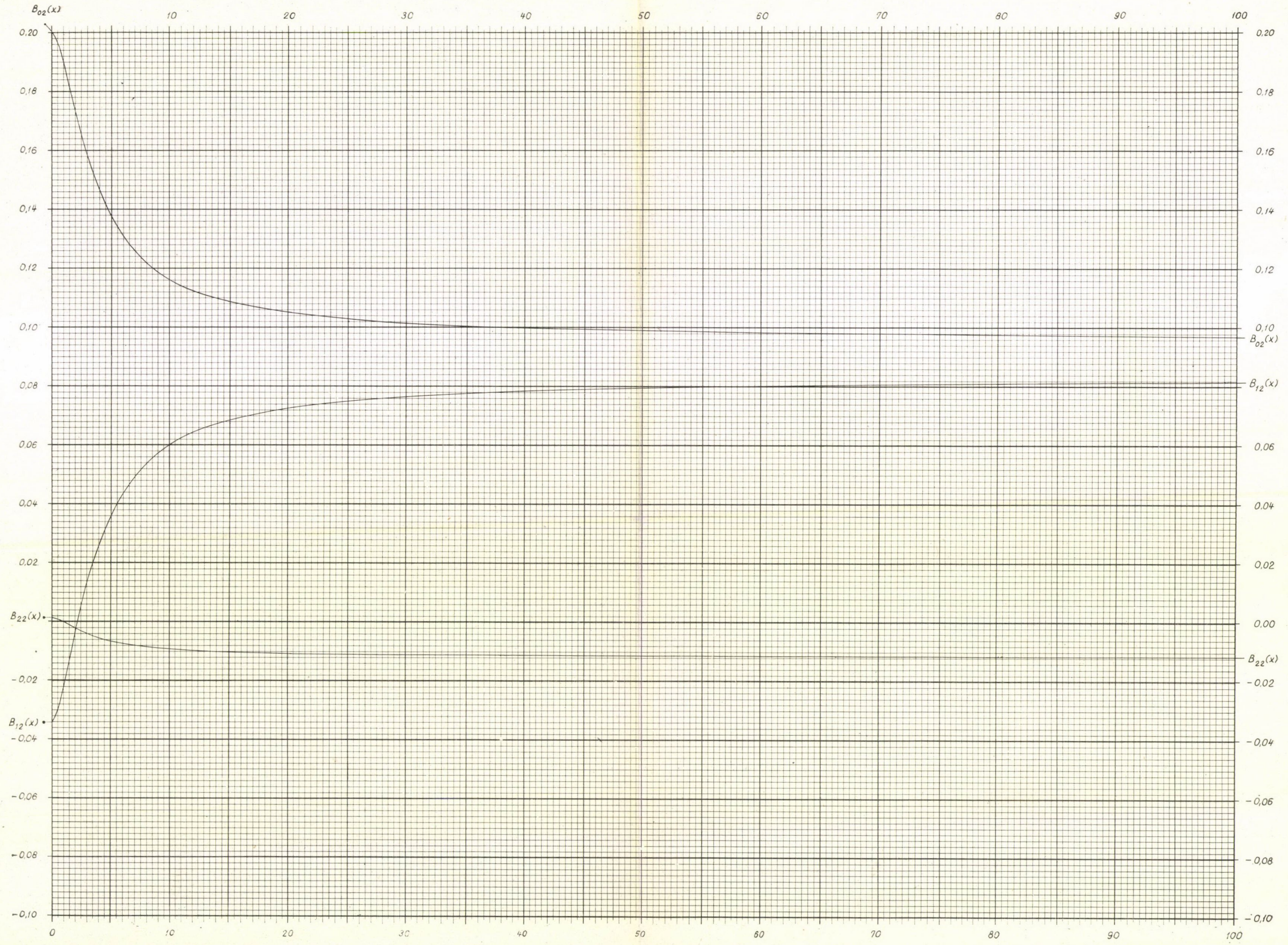

0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
0,20
0,18
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
-0,02
-0,04
-0,06
-0,08
-0,10
$B_{02}(x)$
$B_{22}(x)$
$B_{12}(x)$

5/c. ábra



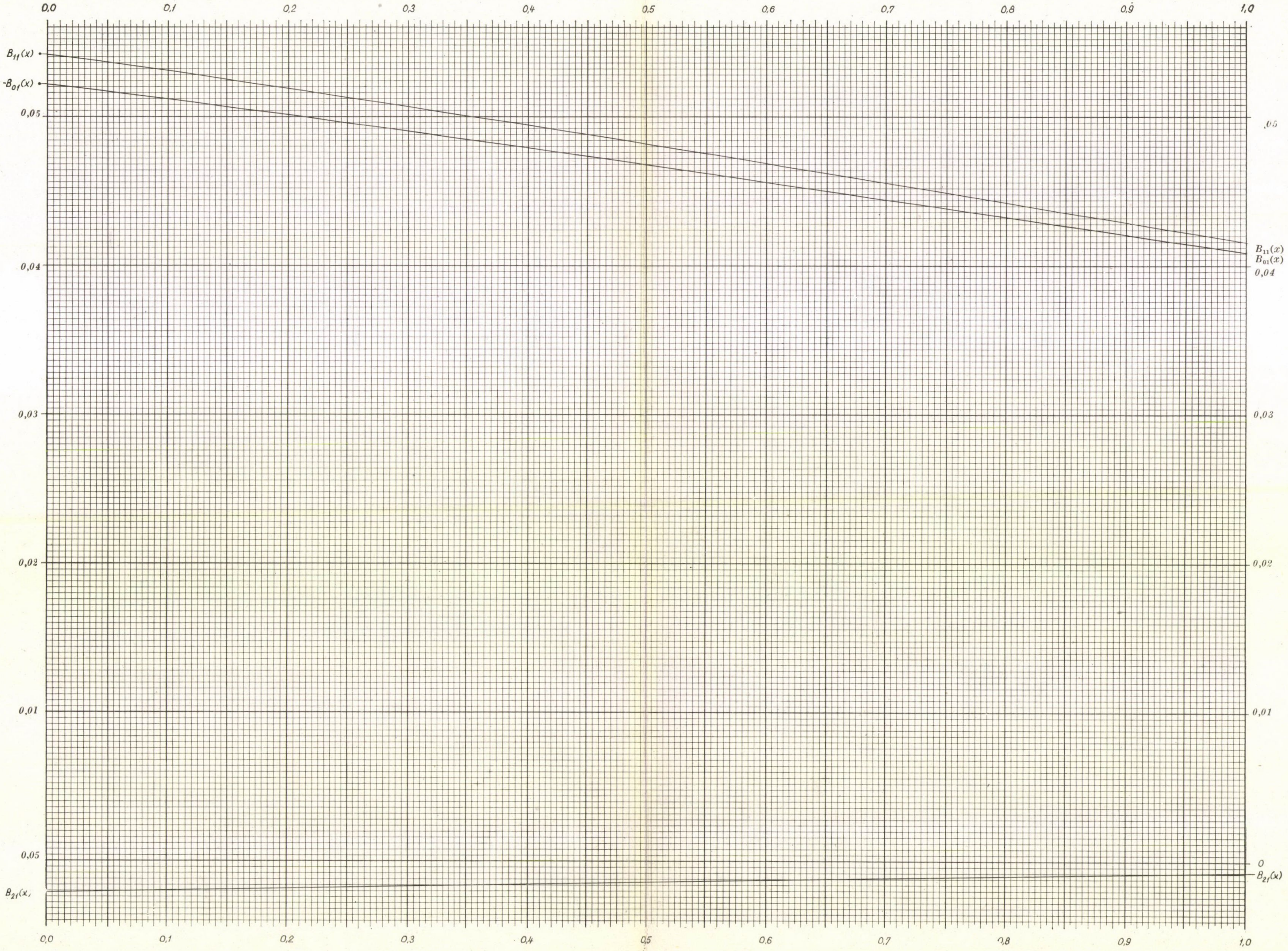
$B_{02}(x)$
$B_{12}(x)$
$B_{22}(x)$
0,20
0,18
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0,00
-0,02
-0,04
-0,06
-0,08
-0,10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

5/b. ábra



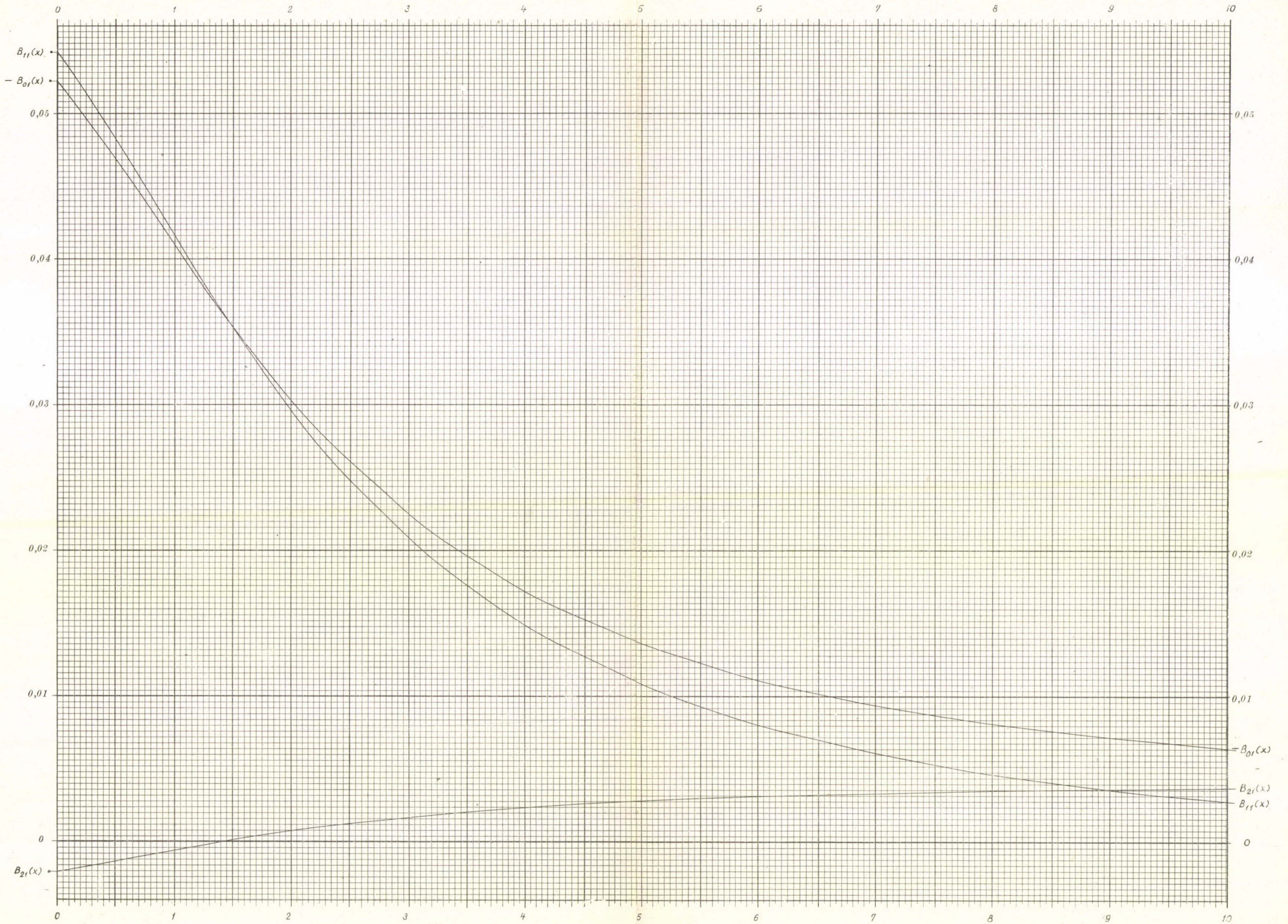
$B_{02}(x)$
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
0,20
0,18
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0,00
−0,02
−0,04
−0,06
−0,08
−0,10
$B_{22}(x)$
$B_{12}(x)$
$B_{02}(x)$
$B_{12}(x)$
$B_{22}(x)$
0

5/a. ábra



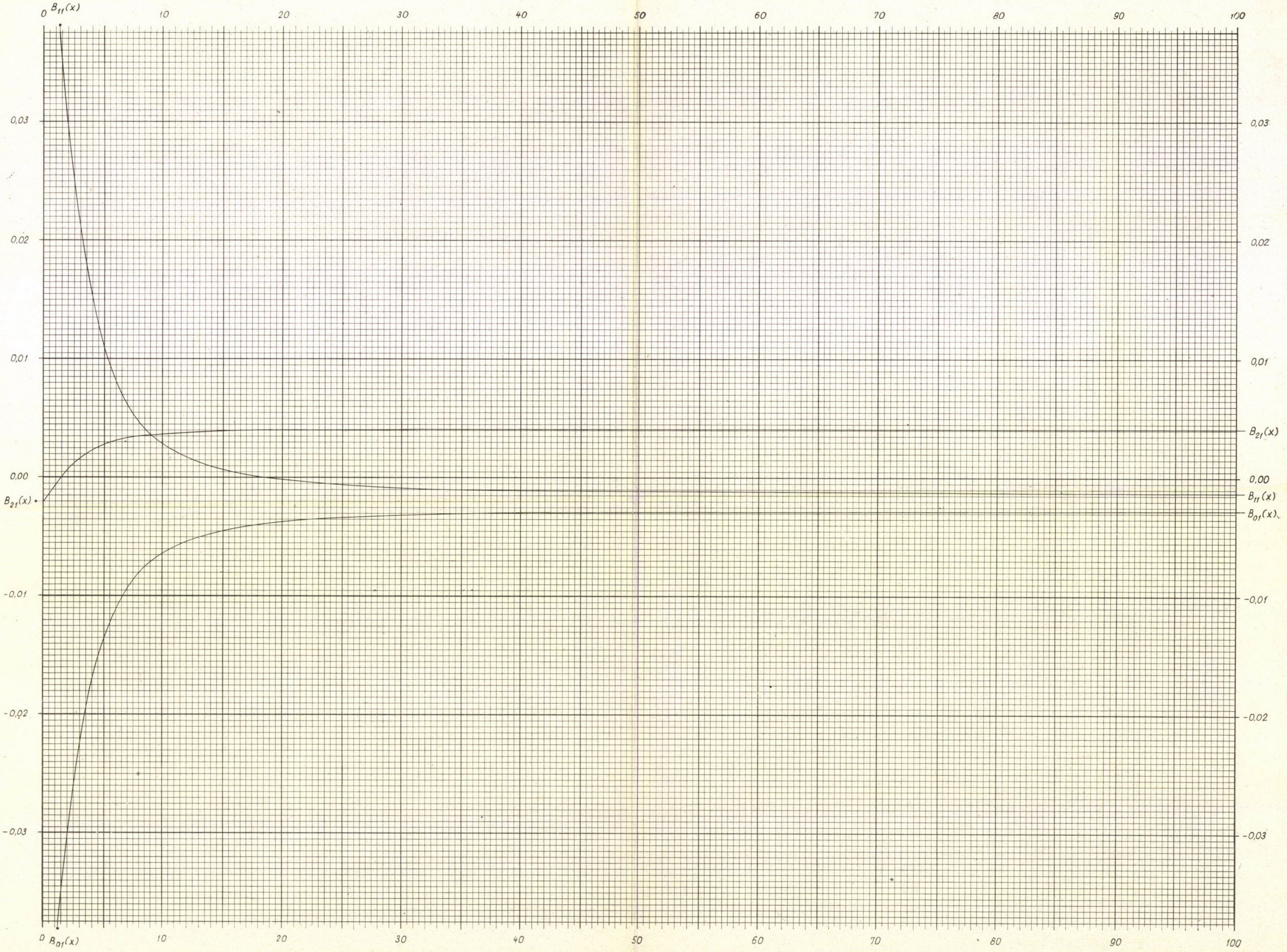
0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
$B_{11}(x)$
$-B_{01}(x)$
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0,05
$B_{21}(x)$
,05
$B_{11}(x)$
$B_{01}(x)$
0,04
0,03
0,02
0,01
0
$B_{21}(x)$

4/c. ábra



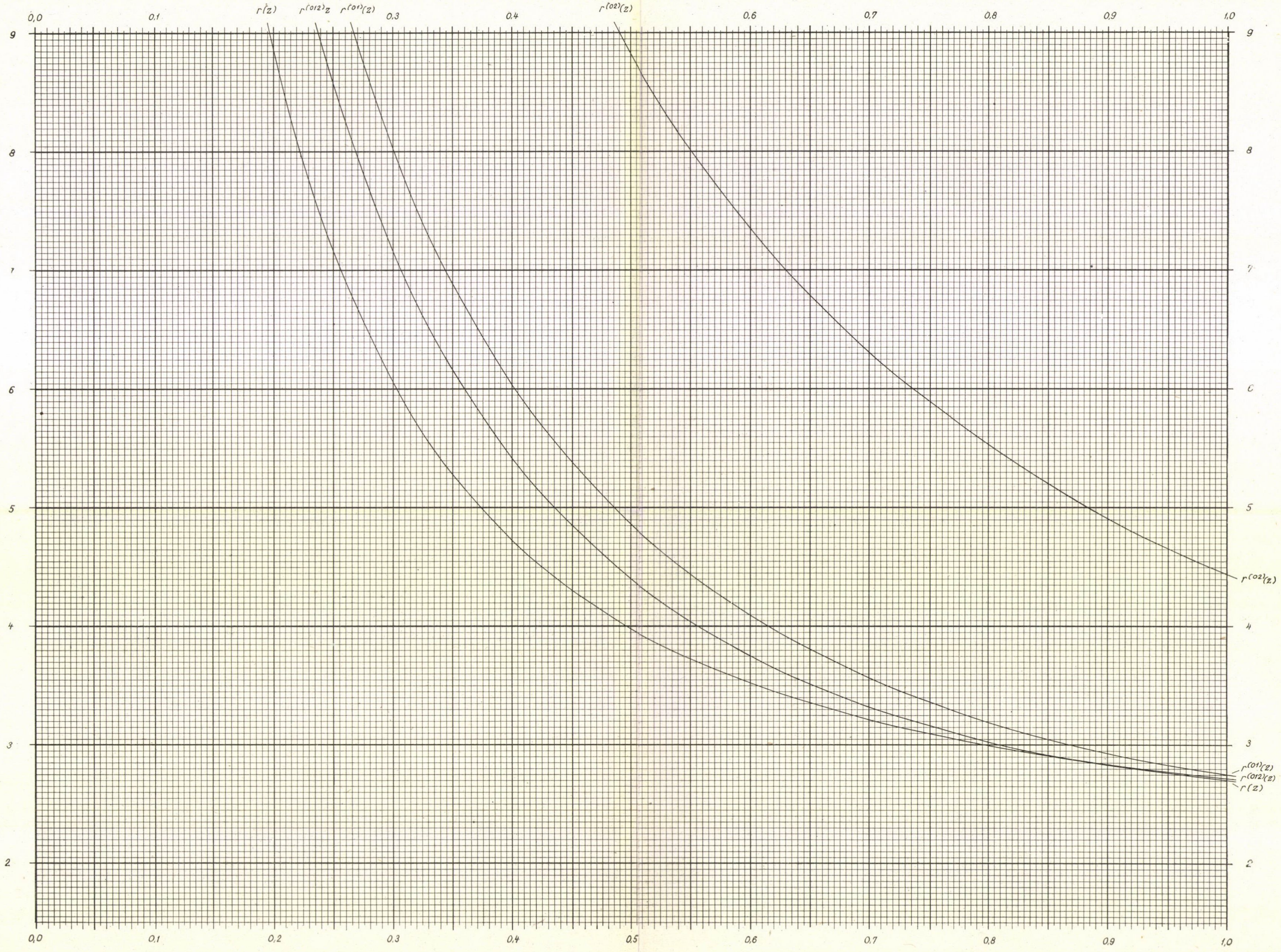
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$B_{11}(x)$
$-B_{01}(x)$
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
$B_{21}(x)$
$-B_{01}(x)$
$B_{21}(x)$
$B_{11}(x)$

4/b. ábra



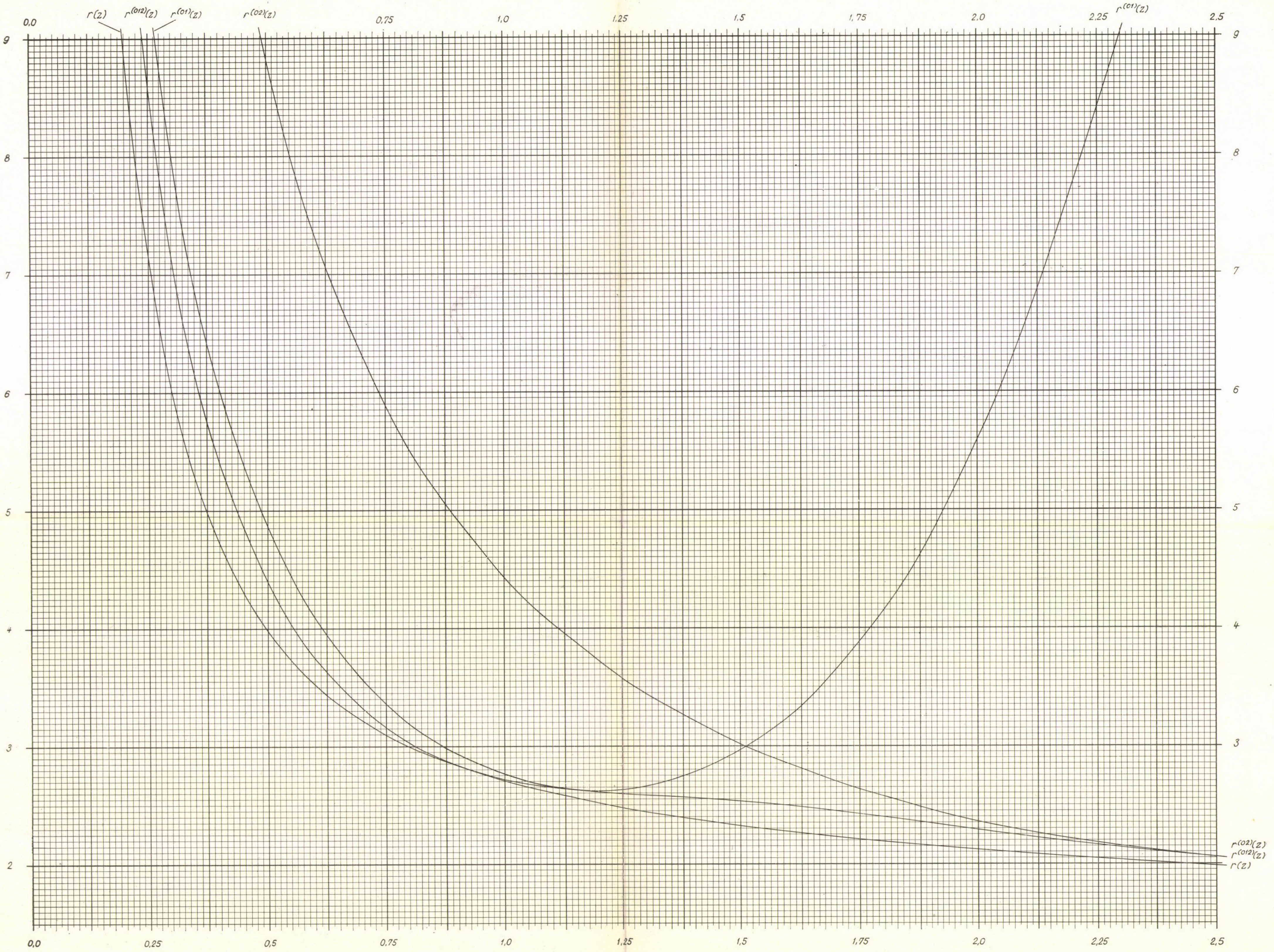
0
$B_{11}(x)$
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
0,03
0,02
0,01
0,00
-0,01
-0,02
-0,03
$B_{21}(x)$
$B_{21}(x)$
$B_{11}(x)$
$B_{01}(x)$
$B_{01}(x)$

4/a. ábra



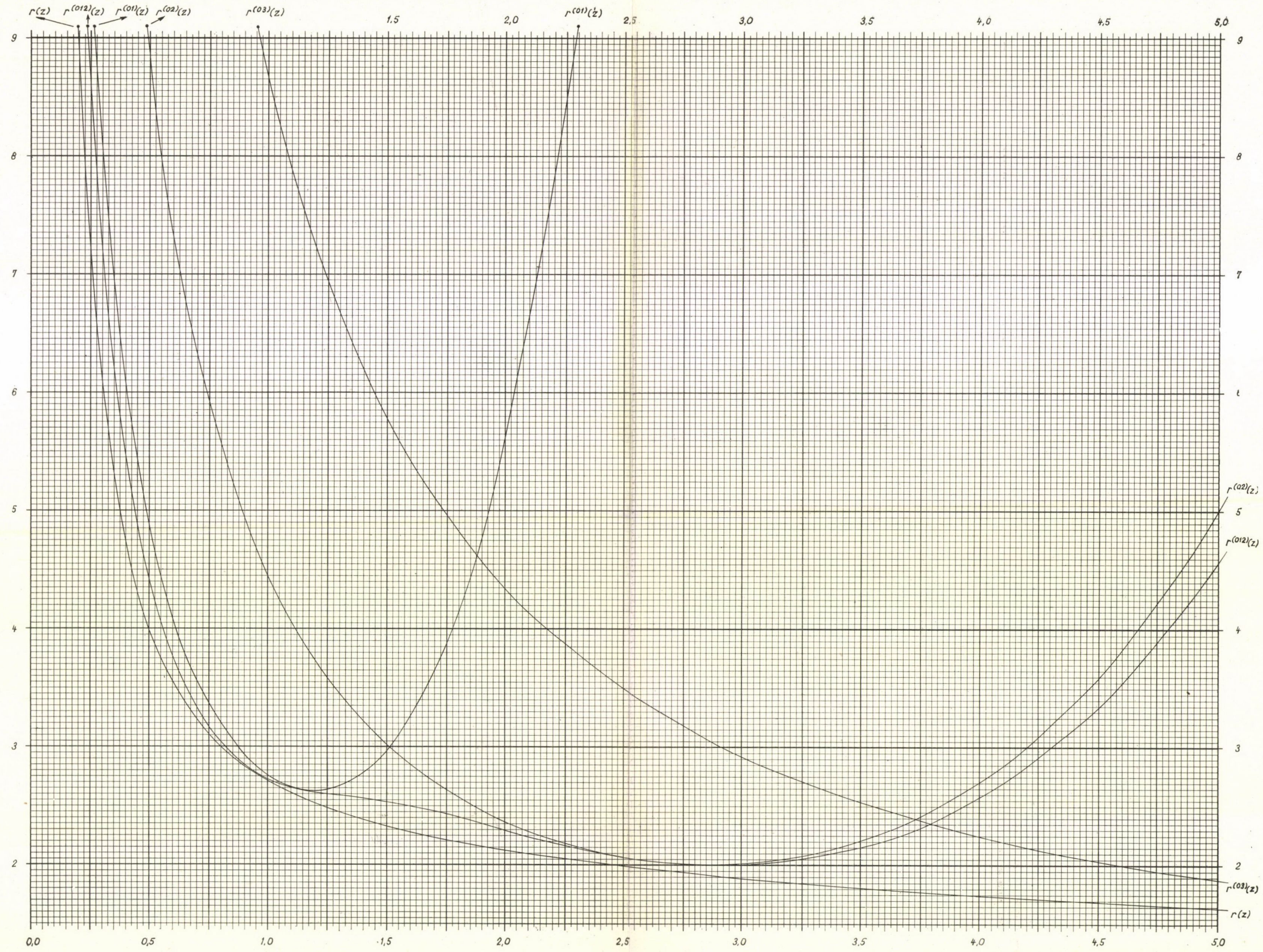
0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
2
3
4
5
6
7
8
9
r(z)
r(012)z
r(01)(z)
r(02)(z)
r(012)(z)

3/c. ábra



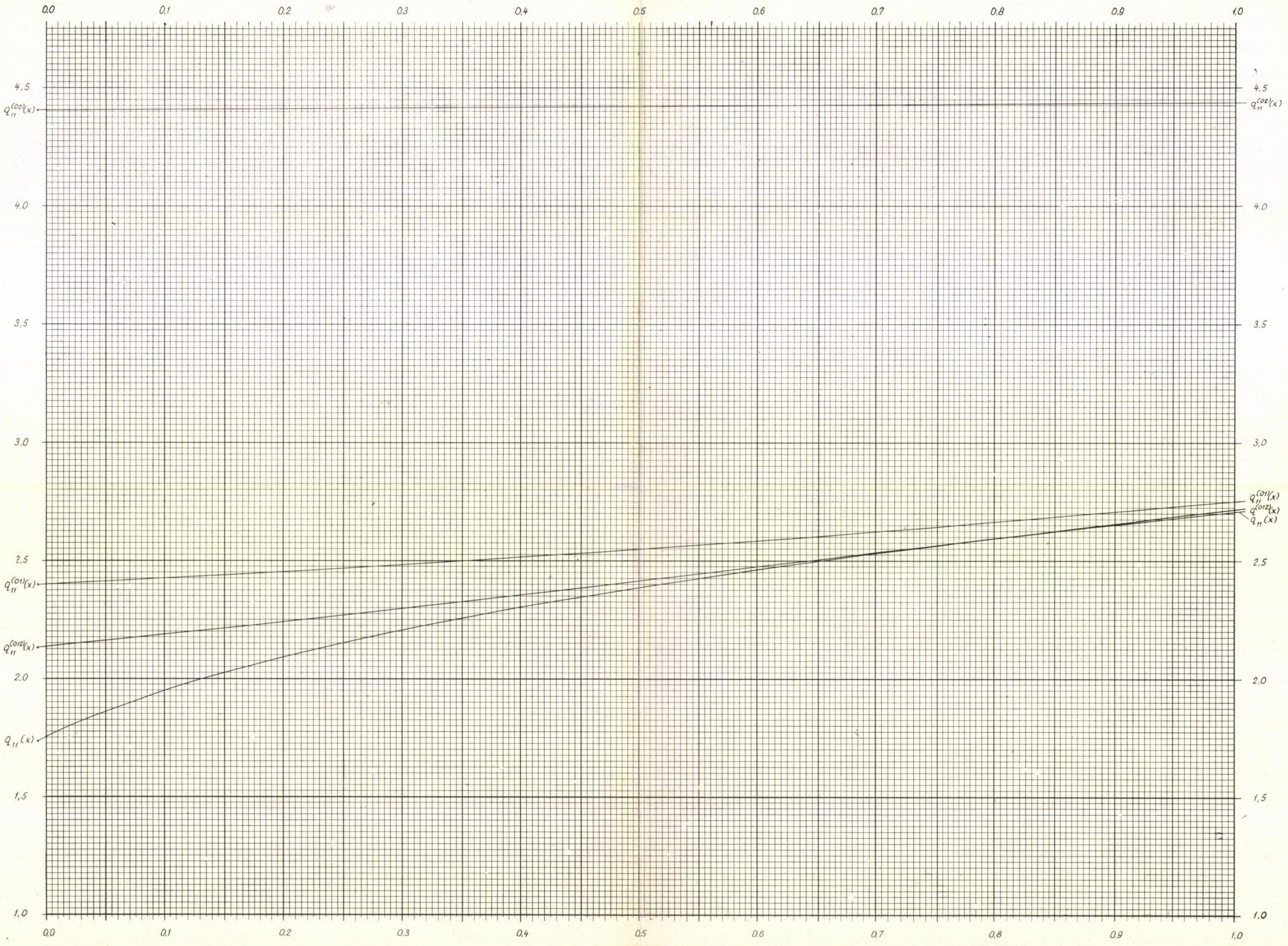
r(z)
r^(012)(z)
r^(01)(z)
r^(02)(z)
r^(01)(z)
0,0
0,25
0,5
0,75
1,0
1,25
1,5
1,75
2,0
2,25
2,5
2
3
4
5
6
7
8
9
r^(02)(z)
r^(012)(z)
r(z)

3/b. ábra

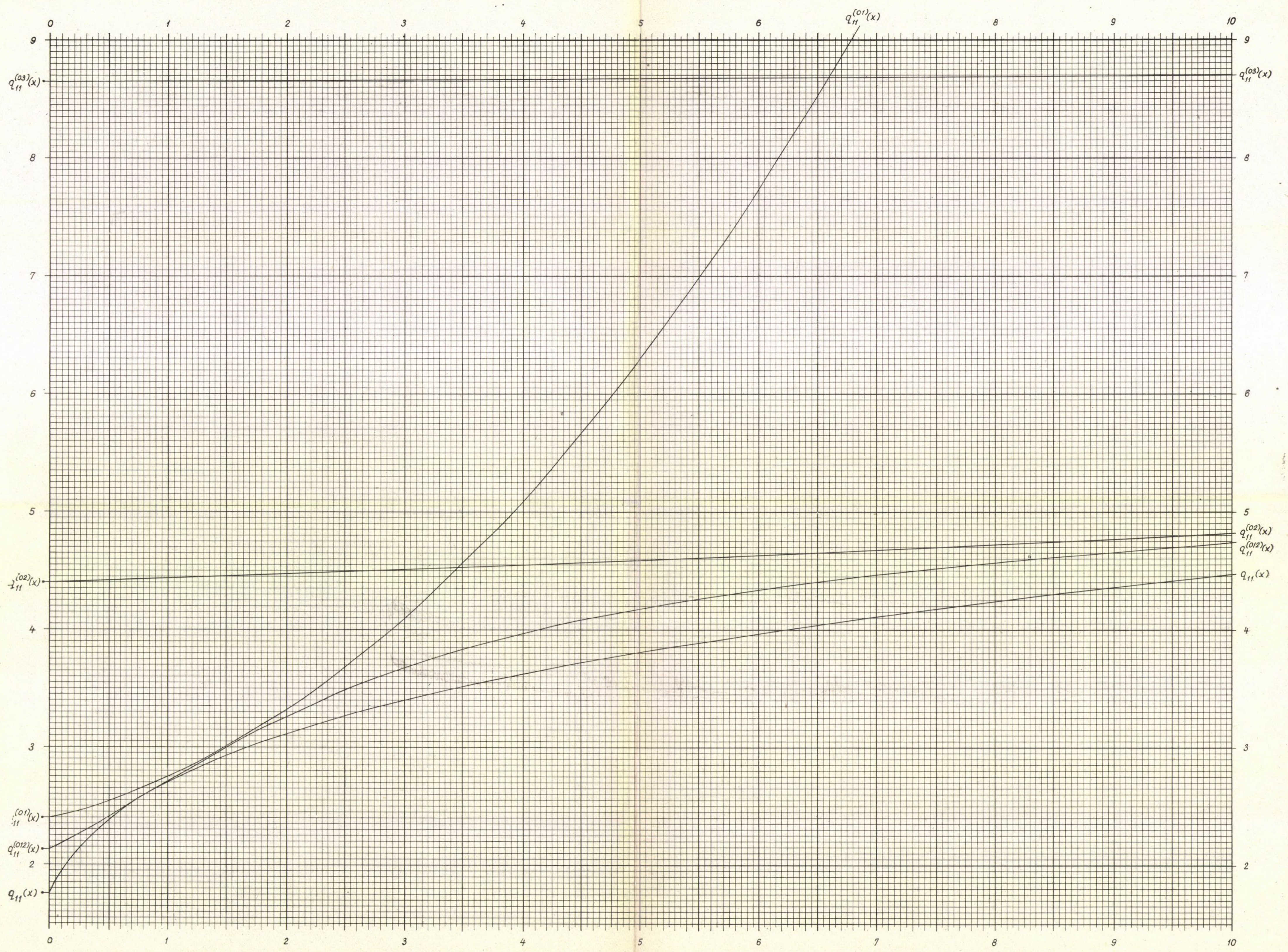


r(z)
r^(012)(z)
r^(01)(z)
r^(02)(z)
r^(03)(z)
r^(01)(z)
r^(02)(z)
r^(012)(z)
r^(03)(z)
r(z)
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
4,0
4,5
5,0
2
3
4
5
6
7
8
9

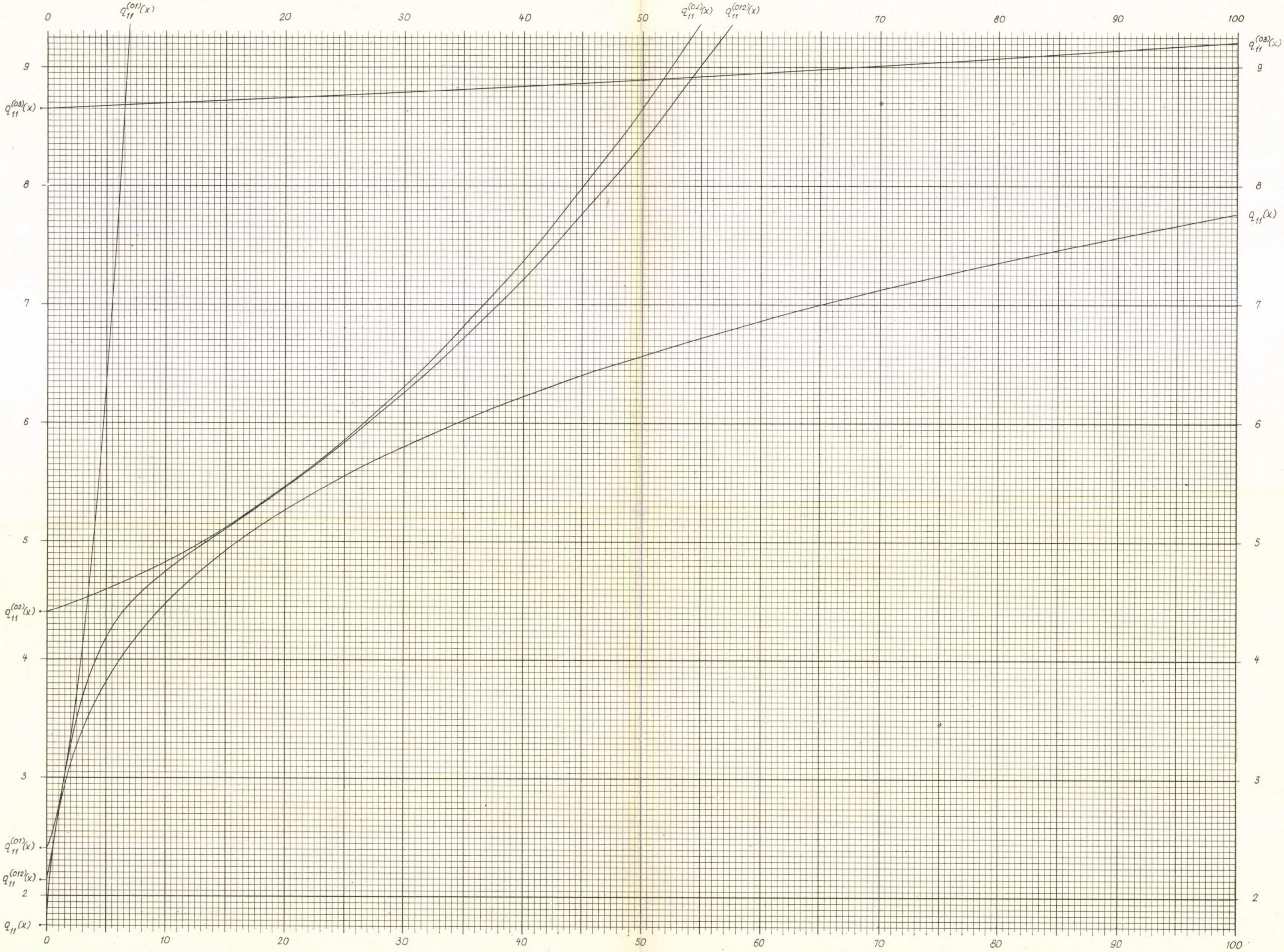
3/a. ábra


0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
4,5
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
$q_{11}^{(02)}(x)$
$q_{11}^{(01)}(x)$
$q_{11}^{(012)}(x)$
$q_{11}(x)$

2/c. ábra

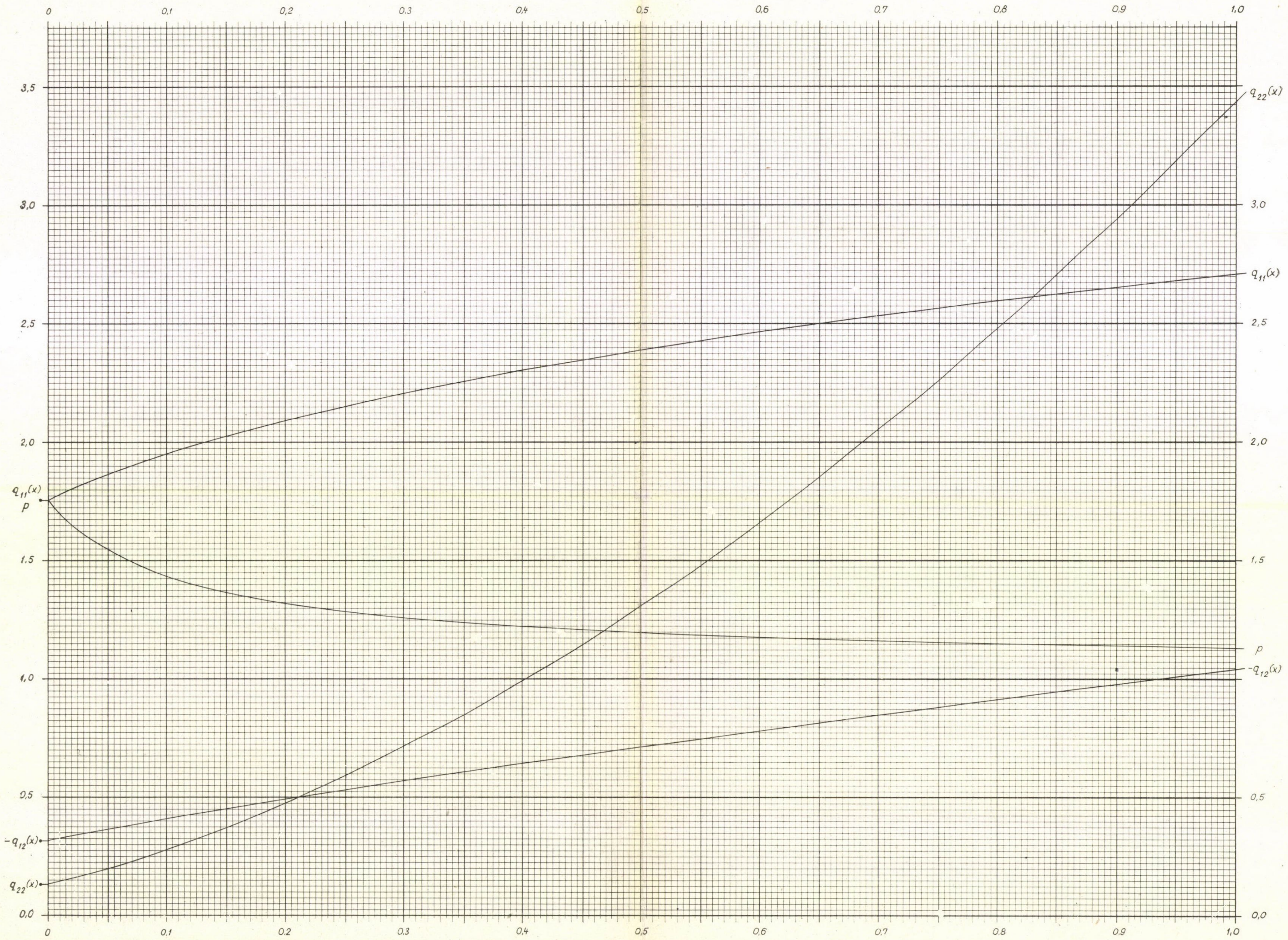


2/b. ábra

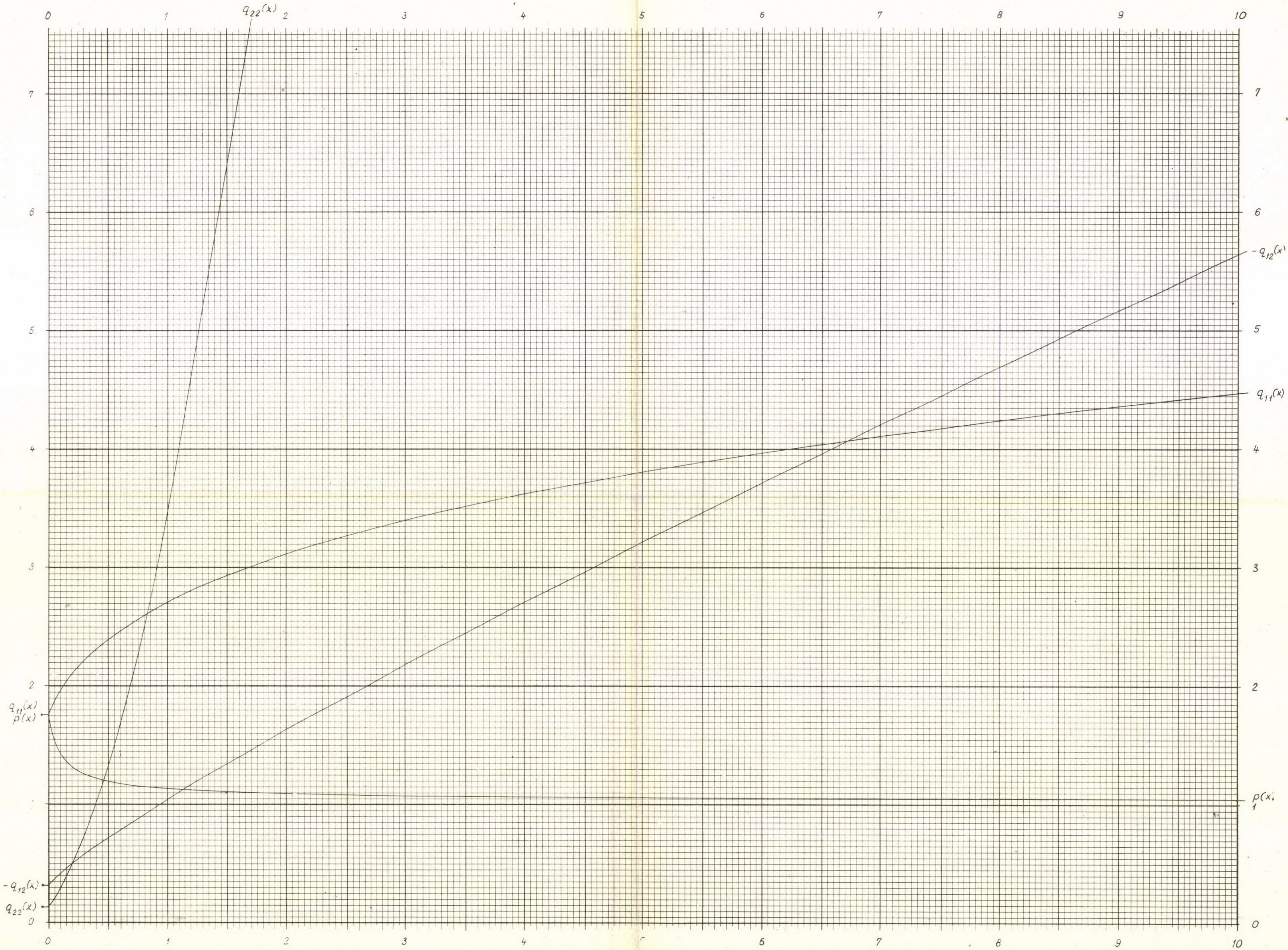


$q_{11}^{(01)}(x)$
$q_{11}^{(02)}(x)$
$q_{11}^{(012)}(x)$
$q_{11}^{(03)}(x)$
$q_{11}(x)$
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
2
3
4
5
6
7
8
9

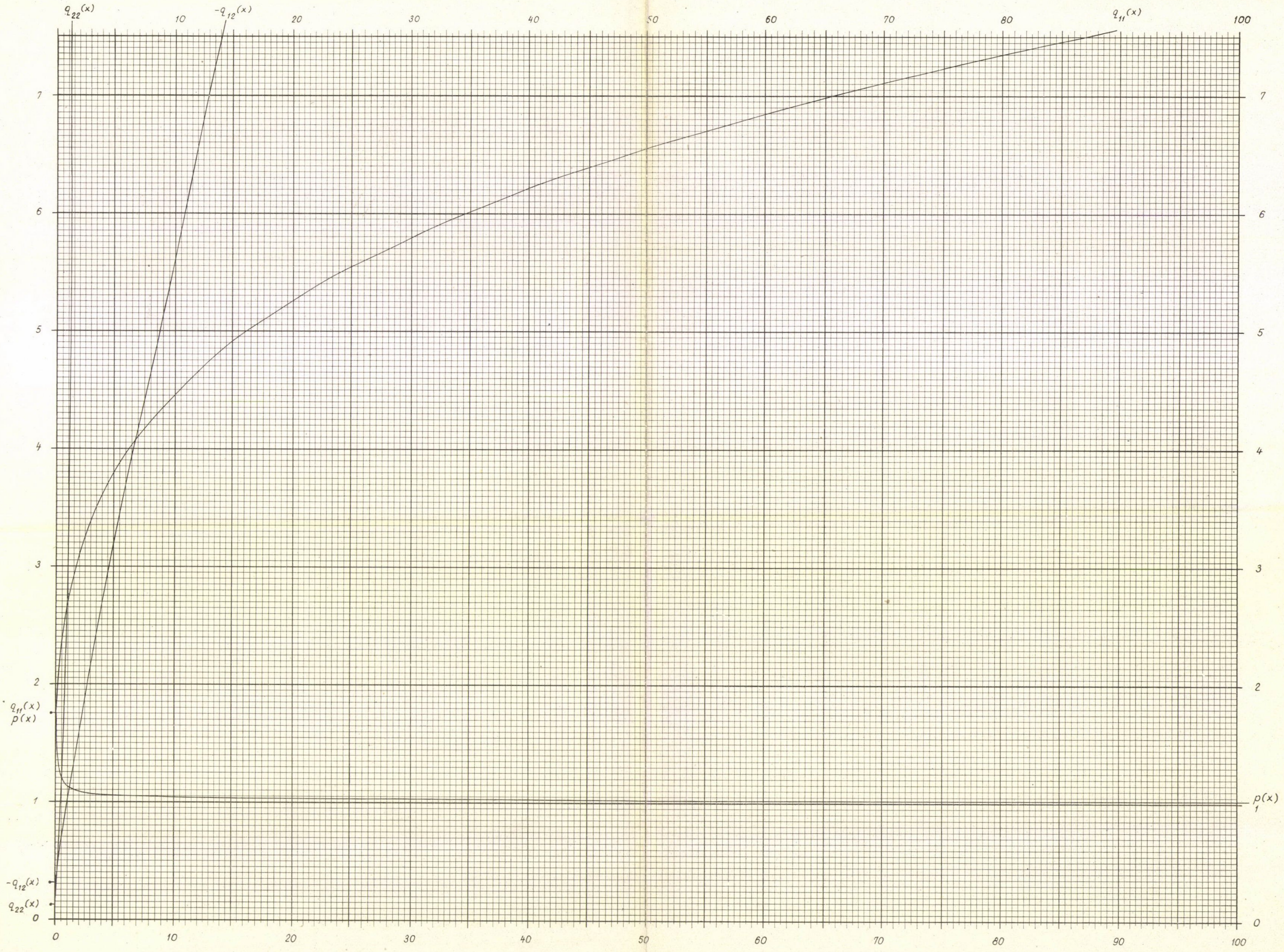
2/a. ábra


0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0,0
$q_{22}(x)$
$q_{11}(x)$
p
$-q_{12}(x)$

1/c. ábra



1/b. ábra



1/a. ábra

Valamint

$$\overline{H}^{(2)} = \operatorname{diag}(\overline{H}_1^{(2)}, \overline{H}_2^{(2)} \dots \overline{H}_m^{(2)}) \tag{23}$$

ahol

$$\overline{H}_k^{(2)} = \begin{pmatrix} m_{k1} \\ m_{k2} \\ \vdots \\ m_{kn} \end{pmatrix} \qquad (k = 1, 2, \dots m),$$

úgy, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} m_{kj} = 1 \qquad (k = 1, 2, \dots m).$$

Ezeknek az operátoroknak segítségével

$$[\overline{A}_{ij}] = \overline{H}^{(1)} \cdot A \cdot G^{(1)}, \tag{24}$$

$$[\overline{Q}_{kl}] = \overline{H}^{(2)} \cdot Q \cdot G^{(2)}. \tag{25}$$

Mivel az itt értelmezett operátorok az agregálásnál használt megfelelő operátorokkal szorozva az egységmátrixot adják; ténylegesen a fenti tulajdonságú desagregálást hajtjuk velük végre.

A (14), (15), (20) és (21) számú összefüggések felhasználásával a két alapmodell technológiai mátrixai között az alábbi azonosságok állanak fenn:

$$\begin{aligned} Q &= G^{(2)} \cdot [\overline{Q}_{kl}] H^{(2)} = G^{(2)} V [\overline{A}_{ij}] V H^{(2)} = \\ &= G^{(2)} \cdot V \cdot H^{(1)} \cdot A \cdot G^{(1)} \cdot V \cdot H^{(2)} \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} A &= G^{(1)} [\overline{A}_{ij}] H^{(1)} = G^{(1)} \cdot V \cdot [\overline{Q}_{kl}] \cdot V \cdot H^{(1)} = \\ &= G^{(1)} \cdot V \cdot \overline{H}^{(2)} \cdot Q \cdot G^{(2)} \cdot V \cdot H^{(1)}. \end{aligned} \tag{27}$$

Célkitűzésünknek megfelelően a (6) és (7) összefüggések révén a teljes termeléseket, (8) és (9) segítségével a netto termeléseket, míg végül (26.) és (27) alapján a technológiai mátrixokat transzformálhatjuk az egyik alapmodellből a másikba. A két alapmodell párhuzamosan történő felépítésével és felhasználásával kapcsolatos közgazdasági problémákat illetően utalunk [3]-ra.

(Beérkezett: 1960. X. 5.)

IRODALOM

[1] BODEWIG: *Matrix Calculus.* North Holland Publishing Comp. 1959, Amsterdam.

[2] FEI, J. C. N.: „A fundamental Theorem for the Aggregation Problem of Input-Output Analysis." *Econometrica* **24** (1956) 400—412.

[3] BOD P.: Néhány gyakorlati megjegyzés az ágazati kapcsolatok formális elemzéséhez. Statisztikai Tudományos Konferencia. (Budapest, 1961. jún. 1—5.) Sokszorosított előadás anyag, 36. o.

О СВЯЗИ «ИНПУТ-ОУТПУТ» БАЛАНСОВ ОТРАСЛЕГО И АДМИНИСТРАТИВНОГО ПОСТРОЕНИЯ

P. BOD

Резюме

В практике планирования венгерского народного хозяйства с истекших годах употребились для выявления связей между отраслями два баланса. В одном народное хозяйство группируется по производственным отраслям, второй опирается на административное воззрение.

Опыти практического применения упомянутых моделей показали, что процессы народного хозяйства оказывается часто целесообразным рассматривать одновременно и в административной и в отраслевой структуре.

Это сделает нужным исследовать взаимную связь между переменными построенных на двух разных агрегационных принципов моделей.

Формулы (6) и (7) показывают комплексные производственные связи, а формулы (8) и (9) связи между производственными величинами. Формулы (26) и (29) отражают связь между матрицами коэффициентов.

ÜBER DIE ZUSAMMENHÄNGE DER NACH PRODUKTIONSZWEIGEN BZW· VERWALTUNGSZWEIGEN ZUSAMMENGESTELLTEN VERFLECHTUNGSBILANZEN

P. BOD

Zusammenfassung

Die ungarische Praxis der Volkswirtschaftsplanung nahm in den vergangenen Jahren zwei Verflechtungsbilanzen in Gebrauch. In dem einen wird die gesamte Volkswirtschaft in Produktionsgruppen geteilt der andere beruht dagegen auf der sog. Verwaltungs-Betrachtungsweise.

Die Erfahrungen, die man mittels der praktischen Anwendung der erwähnten Modelle erreichen konnte — zeigten, dass es oft zweckmässig ist die Prozesse der Volkswirtschaft gleichzeitig in Verwaltungstruktur und in Produktionszweigstruktur zu betrachten.

Das nötigt die Untersuchung der gegenseitigen Zusammenhänge diejeniger Variabeln, die in den mit der Hilfe zweierlei Aggregationsprinzipen erbauten Modelle vorkommen.

Die Formeln No. 6 und 7 zeigen den Zusammenhang zwischen die Bruttoproduktionen der zwei Modelle; die Formeln No. 8 und 9 den der Nettoproduktionen. Die Formeln 26 und 27 schildern den Verhältniss zwischen die Koeffizientenmatrizen.