ÜBER EIN GRUPPENTHEORETISCHES PROBLEM

von

I. KÖRNYEI[1]

Für eine beliebige G und für einen festen Exponenten n bezeichne G^n die durch sämtliche Elemente $g^n (g \in G)$ erzeugte (offenbar vollinvariante) Untergruppe von G. Ferner bezeichne p stets eine Primzahl, I den Ring der ganzen rationalen Zahlen und (m, n) den grössten gemeinsamen Teiler von m und n.

Wir brauchen jetz einige Klassen von *periodischen* Abelschen Gruppen, für welche die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1) mit G gehört jede Untergruppe von G zu $\mathcal{K}$.
2) wenn jede p-Komponente einer periodischen Abelschen Gruppe G zu $\mathcal{K}$ gehört, so gilt auch $G \in \mathcal{K}$.

Die folgenden periodischen Gruppen liefern für eine diese zweien Bedingungen erfüllende Klasse ein Beispiel: die Abelschen bzw. die zyklischen bzw. die elementaren Abelschen Gruppen, ferner die kommutativen p-Gruppen bzw. die Abelschen Gruppen ohne Element mit unendlicher Höhe bzw. die als direktes Produkt von endlichvielen endlichen zyklischen Gruppen darstellbaren Gruppen und die Einheitsgruppe selbst.

Nun ergibt sich der folgende:

Satz 1.[2] *Bestehen $d = (m, n)$, $G^m \in \mathcal{K}$ und $G^n \in \mathcal{K}$ für eine beliebige Gruppe G, so gilt auch $G^d \in \mathcal{K}$.*

Aus dieser Satz folgt es mit vollständiger Induktion:

Wenn $(m_1, \ldots, m_r) = d$ ist und $G^{m_1}, \ldots, G^{m_r}$ aus $\mathcal{K}$ sind, so gehört auch G^d zur Klasse $\mathcal{K}$.

Beweis. Diejenigen Elemente $g^d \in G$, jür die $\left(O(g^d), \dfrac{m}{d}\right) = 1$ erfüllt ist, gehören zu G^m, denn es gibt Zahlen $u_1, v_1 \in I$ mit $O(g^d)\, u_1 + \dfrac{m}{d} v_1 = 1$.

Woraus wirklich $g^d = g^{d \cdot 1} = g^{mv_1} \in G^m$ folgt. ($O(g)$ bezeichne die Ordnung von g.) Ferner erzeugen diese Elementen g^d mit $\left(O(g^d), \dfrac{m}{d}\right) = 1$ in G^m

[1] Eötvös L. University, Department of Mathematics, Budapest.

[2] Es ist noch einmal zu beobachten, dass jede Gruppe aus $\mathcal{K}$ kommutativ und periodisch (ohne Element mit unendlicher Ordnung) ist. Ursprünglich hat mein Kollege F. Szász dass Problem Untersucht [2], ob G^d zyklisch zu sein braucht, wenn $d = (m, n)$ und G^m bzw. G^n zyklisch sind? Eine Berichtigung einer Ungenauigkeit auf Seite 83 von [2] und weitere Bemerkungen sind in einer neuen Arbeit von F. Szász im Druck [3].

eine Untergruppe A, für die wegen der Bedingung 1) offenbar $A \in \mathcal{K}$ gilt. Diejenige Elementen $g^d \in G$, für die jeder Primteiler von $O(g^d)$ auch ein Teiler von $\frac{m}{d}$ ist, haben aber zu $\frac{n}{d}$ teilerfremde Ordnungen. Diese gehören also zu G^n und erzeugen eine Untergruppe B von G^n. Wegen der Bedingungen 1) gehört auch B zur Klasse $\mathcal{K}$. A und B haben nur das Einheitselement gemeinsam, und das direkte Produkt $P = A \otimes B$ liegt in G^d. P ist kommutativ und jede p-Komponente, als eine Untergruppe von A bzw. B, gehört zur Klasse $\mathcal{K}$. Auch P gehört also wegen der zweiten Bedingung zur Klasse $\mathcal{K}$. Es gilt $P \subseteq G^d$, und wir werden auch $G^d \subseteq P$ beweisen. $O(g^d)$ ist nämlich für ein beliebiges $g \in G$ in der Gestalt $O(g^d) = k \cdot l$ zerlegbar, wobei $\left(k, \frac{m}{d}\right) = 1$ und jeder Primteiler p von l auch ein Teiler von $\frac{m}{d}$ ist. Dann existieren wegen $(k, l) = 1$ Zahlen $u_2, v_2 \in I$ mit $ku_2 + lv_2 = 1$, woraus sich sofort $g^d = g^{d \cdot 1} = (g^{du_2})^k \cdot \cdot (g^{dv_2})^l$ mit $(g^{du_2})^k \in B$ und $(g^{dv_2})^l \in A$ ergibt. Also gelten $g^d \in A \otimes B$, $G^d = = P \in \mathcal{K}$, womit Satz 1 bewiesen ist.

Jetz werden wir einen neuen einfachen Beweis bezüglich des nichtperiodischen Falls der Dlabschen Verallgemeinerung [1] des Satzes von F. SZÁSZ mitteilen.

Satz 2. *Wenn für eine beliebige Gruppe G G^m und G^n unendliche zyklische Gruppen sind, so ist für $d = (m, n)$ auch G^d eine unendliche zyklische Gruppe.*

Wie Satz 1, gibt es auch hier eine ähnliche Folgerung: *Wenn $G^{m_1}, \ldots, G^{m_r}$ unendliche zyklische Gruppen sind, und $(m_1, \ldots, m_r) = d$ ist, dann ist auch G^d eine unendliche zyklische Gruppe.*

Beweis. Bestehen $G^m = \{a\}$, $G^n = \{b\}$ und $O(a) = O(b) = \infty$, so erhält man $b^{-1}ab = a^j$ mit ganzrationalem j, weil G^m eine vollinvariante Untergruppe von G ist. Hiernach ergibt sich wegen $a^n \in \{b\}$ sofort $a^{jn} = (b^{-1}ab)^n = b^{-1}a^n b = a^n$, also $jn = n$, $j = 1$ und $ab = ba$. Für $d = (m, n)$ gilt offenbar $G^d \supseteq G^m \cdot G^n$. Da $d = mm_1 + nn_1$ mit Zahlen $m_1, n_1 \in I$ lösbar ist, gilt $g^d = (g^{m_1})^m (g^{n_1})^n$, woraus auch $G^d = G^m \cdot G^n$ folgt. Daher ist $G^d = \{a, b\}$ gewiss kommutativ.

G^d ist torsionsfrei. Wegen ihrer Kommutativität existiert nämlich ihre maximale periodische Untergruppe G_1 und $G_1^{\frac{n}{d}}$ liegt in G^n, sie ist periodisch, und so enthält sie nur das Einheitselement. Ähnliches gilt für $G_1^{\frac{m}{d}}$. Da es $\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$ gilt, enthält G_1 wegen des Satzes 1 (Enstehe die Klasse nur aus der Einheitsgruppe) nur das Einheitselement.

Die Faktorgruppen G^d/G^m ist aber wegen $G^d/G^m \cong G^n/G^n \cap G^m$ zyklisch und sie kann durch eine Nebenklasse $\bar{g} = g \cdot G^m$ erzeugt werden. Sei $g \in G$ ein festgewählter Vertreter aus der Nebenklasse $\bar{g}$, und k die Ordnung von $\bar{g}$ in G^d/G^m. Dann bestehen $k / \frac{m}{d}$ und $g^k = a^i \in \{a\} = G^m$ $(i \in I)$. Für $s = (k, i)$, $k = k's$ und $i = i's$ erhält man $(g^{k'}a^{-i'})^s = e$ und wegen der Torsionsfreiheit ist offenbar auch $g^{k'} = a^{i'}$ richtig, was wegen $O(\bar{g}) = k$ nur im Falle $k = k'$ und $s = 1$, möglich ist. Es gibt also Zahlen $u_3, v_3 \in I$ mit $iu_3 + kv_3 = 1$, woraus auch $(u_3, O(\bar{g})) = 1$ folgt. Mit $\bar{g}$ erzeugt auch $(\bar{g})^{u_3}$ die Faktorgruppe G^d/G^m, weil $(u_3, k) = 1$ ist. Daher hat ein beliebiges Element x von G^d die Gestalt $x = g_0^{w_1} a^{w_2}$, wobei $w_1 = 0, 1, \ldots, k-1$ und w_2 ganzration al ist, wenn g_0 ein festgewähltes Element von der Nebenklasse $(\bar{g})^{u_3}$ bezeichnet. Es sei $g_0 = g^{u_3} a^{v_3}$. Dann gilt es aber: $g_0^k = (g^{u_3} a^{v_3})^k = (g^k)^{u_3} a^{kv_3} = a^{iu_3+kv_3} = a$. Folglich besteht $G^d = \{g_0\}$, womit Satz 2 bewiesen ist.

(Eingegangen: 17. Oktober, 1961.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] DLAB, W.: „On cyclic groups". *Czechoslovak Math. Journ.* **10** (85) (1960) 244—254.
[2] SZÁSZ, F.: „Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind". *Acta Sci. Math. Szeged* **17** (1956) 83—84.
[3] SZÁSZ, F.: „Bemerkungen zu meiner Arbeit: „Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind"." *Acta Sci. Math. Szeged* (im Druck).

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ ГРУПП

Резюме

I. KÖRNYEI

Пусть $\mathcal{K}$ класс абелевых периодических групп, имеющий следующие свойства:

1. Если $G \in \mathcal{K}$, то все подгруппи G тоже принадлежат к классу $\mathcal{K}$.
2. Если все p-компоненты коммутативной группи G принадлежат $\mathcal{K}$, то G тоже принадлежит к классу $\mathcal{K}$.

Доказывается следующая

Теорема. *Если G группа, m и n положительные целые числа; $G^m \in \mathcal{K}$, $G^n \in \mathcal{K}$, то $G^d \in \mathcal{K}$, где d есть наибольший общий делитель чисел m и n.*

Эта теорема верна и в том случае, когда $\mathcal{K}$ класс бесконечных цикличексих групп.