

# ÜBER DIE ANALOGA DER GANZEN RATIONALEN FUNKTIONEN IN VERALLGEMEINERTEN KLASSEN VON FUNKTIONEN EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN, II.<sup>1</sup>

von  
K. SZILÁRD

## § 3. Die Klasse der K-quasikonformen Funktionen

Der Termin »quasikonforme Funktion« wurde von A. J. LOHWATER [1] vorgeschlagen für eindeutige Funktionen  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  der komplexen Veränderlichen  $z = x + iy$  für welche die partiellen Ableitungen  $u_x, u_y, v_x, v_y$  im Inneren des Definitionsbereiches von  $f(z)$  existieren und stetig sind und der Bedingung

$$(1) \quad u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 \leq 2 K_1 (u_x v_y - v_x u_y),$$

wo  $K_1 \geq 1$  eine reelle Konstante ist, genügen. Es wird vorausgesetzt, dass die Funktionaldeterminante  $J(z) = u_x v_y - v_x u_y$  nichtnegativ ist (s. auch KÜNZI [2]). Die geometrische Bedeutung der Konstante  $K_1$  ist folgende. Es sei  $z_0 = x_0 + iy_0$  ein Punkt der  $z$ -Ebene in welchem  $J(z) \neq 0$  ist. Ist  $\varrho > 0$  genügend klein, so ist das Bild eines Kreises mit dem Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $\varrho$  bei der Abbildung  $z \rightarrow w$  eine Jordansche Kurve. Vergrößert man diese Jordansche Kurve im Verhältniss  $1 : 1/\varrho$  so strebt sie, wenn  $\varrho \rightarrow 0$  gegen eine Ellipse deren Gleichung (bei geeigneter Wahl eines rechtwinkligen Koordinatensystems  $X, Y$ ) in der Form

$$(2) \quad \frac{v_x^2 + v_y^2}{|J(z)|} X^2 - \frac{u_x v_x + u_y v_y}{|J(z)|} 2XY + \frac{u_x^2 + u_y^2}{|J(z)|} Y^2 = |J(z)|$$

geschrieben werden kann. (Die partiellen Ableitungen  $u_x$  usw. sind im Punkte  $z_0 = x_0 + iy_0$  genommen. Man sagt: Der »unendlich kleine Kreis« um  $z_0$  in der  $z$ -Ebene wird auf eine »unendlich kleine Ellipse« um  $w_0$  in der  $w$ -Ebene abgebildet.) Man verifiziert leicht, dass die Summe der Koeffizienten von  $X^2$  und  $Y^2$  gleich  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$  ist, ( $a$  und  $b$  sind die Längen der grossen und der kleinen

Halbachse der Ellipse (2)), also

$$\frac{u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2}{|u_x v_y - v_x u_y|} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

Nehmen wir an, dass die Funktion  $w = f(z)$  so beschaffen ist, dass für alle Punkte  $z$  ihres Definitionsbereiches, mit  $J(z) \neq 0$  das erhaltene Achsenverhältniss  $a/b$  nicht grösser, als eine reelle Konstante  $K$  ist,

$$(2') \quad \frac{a}{b} \leq K.$$

<sup>1</sup> Den Anfang s.: diese Zeitschrift, Jahrg. VI. 1961. S. 375–380.



Natürlich ist  $K \geq 1$ . Solche Funktionen  $f(z)$  existieren, zum Beispiel für eine beliebige analytische Funktion ist  $K = 1$ . Aus der gleichmässigen Beschränktheit der (von  $z$  abhängigen) Grösse  $a/b$  folgt die gleichmässige Beschränktheit der Grösse  $a/b + b/a$  und umgekehrt. Die Ungleichung (1) besagt also, dass  $a/b + b/a$  für die Funktion  $w = f(z)$  eine obere Schranke  $2K_1$  besitzt (oder aber  $J(z) = 0$  ist; in diesem Falle verschwinden alle vier partiellen Ableitungen erster Ordnung von  $u$  und  $v$ ). Für die Charakterisierung der quasikonformen Funktionen bedient man sich nicht der Grösse  $K_1$  sondern der Grösse  $K$ . Um die Rolle letzteren hervorzuheben wurden die schlichten Abbildungen  $z \rightarrow w = f(z)$  (wo also für die Funktion  $f(z)$  die Ungleichung (2') erfüllt ist) » $K$ -quasikonforme Abbildungen« genannt (vergl. GRÖTZSCH [3]). Dementsprechend nennen wir die Funktionen  $w = f(z)$  welche der Bedingung (2') genügen » $K$ -quasikonforme Funktionen« (wobei also nur die Eindeutigkeit, nicht mehr aber die Schlichtheit gefordert wird, sie braucht auch in der Umgebung eines Punktes  $z$  in welchem  $J(z) = 0$  ist, nicht erfüllt zu sein).

Wir wollen nun zeigen, dass die Analoga der ganzen rationalen Funktionen in der Klasse der  $K$ -quasikonformen Funktionen auch in Bezug auf Wachstum ähnliche Eigenschaften wie die der ganzen rationalen Funktionen haben, indem wir folgenden Satz beweisen.

**Satz 3.** Die Funktion  $w = f(z)$  sei  $K$ -quasikonform in jedem im Endlichen gelegenen Punkte wenigstens ausserhalb eines Kreises  $\Gamma_0$  der  $z$ -Ebene (zum Beispiel, sie sei  $K$ -quasikonform in der ganzen endlichen  $z$ -Ebene) und ausserdem sei  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$  gleichmässig. Dann existieren eine natürliche Zahl  $n$ , und drei (von der Funktion  $f(z)$  abhängige) positive Konstanten  $C_1, C_2$  und  $R_0$  so, dass für alle  $R > R_0$  die Ungleichungen

$$\max_{|z|=R} |f(z)| \geq C_1 R^{n/K} \quad \text{und} \quad \min_{|z|=R} |f(z)| \leq C_2 R^{nK}$$

gelten.

Dem Beweise dieses Satzes sollen einige Betrachtungen über stetige und über  $K$ -quasikonforme Funktionen vorausgeschickt werden. Es ist leicht einzusehen, dass der Satz 1 auch für Funktionen ausgesprochen werden kann, die ausserhalb eines gewissen Kreises  $\Gamma_0$  der  $z$ -Ebene definiert und dort stetig und eindeutig sind. (Der Beweis des Satzes 1 kann für diesen Fall wörtlich wiederholt werden.) Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir den Kreis  $\Gamma_0$  als einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $z = 0$  und mit einem Radius  $R_0$  annehmen, ausserhalb dessen und auf der Kreislinie  $|z| = R_0$  selbst  $f(z) \neq 0$  und ausserdem, dass  $f(z)$  für  $|z| \geq R_0$  stetig und eindeutig ist.

Der Beweis des Satzes 3 wird durch folgenden Hilfssatz erleichtert:

**Hilfssatz 5.** Es existieren ein Kreis  $|z| = R_{00} \geq R_0$  und eine natürliche Zahl  $n$  so, dass für  $|z| \geq R_{00}$  eine eindeutige  $K$ -quasikonforme Funktion  $F(z)$  definiert werden kann für welche die Gleichung

$$[F(z)]^n = f(z)$$

gilt und wobei  $F(z)$  schlicht ist. ( $f(z)$  ist die  $K$ -quasikonforme Funktion, die die Bedingungen des Satzes 3 erfüllt.)

**Beweis.** Es seien  $z_1$  und  $z_2$  zwei beliebige Punkte des Gebietes  $|z| > R_0$ . Da  $f(z_1) \neq 0$ , so kann man für jede beliebige natürliche Zahl  $n$  in einer genügend



kleinen Umgebung von  $z_1$   $n$  stetige eindeutige Funktionen  $F_\nu(z)$  ( $\nu=1, 2, \dots, n$ ) definieren, so dass dort  $[F_\nu(z)]^n = f(z)$  ist. Diese  $n$  Funktionen sind  $K$ -quasikonform. Es ist nämlich bekannt, dass falls  $G(\zeta)$  in einer gewissen Umgebung eines jeden Punktes  $\zeta_0$  eines Gebietes  $\mathfrak{G}$  der  $\zeta$ -Ebene als eindeutige analytische Funktion von  $\zeta$  definiert werden kann und  $\zeta = g(z)$  eine  $K$ -quasikonforme Funktion von  $z$  ist, wobei die Funktionswerte  $g(z)$  in das Gebiet  $\mathfrak{G}$  fallen, dass dann die Funktion von  $z$ ,  $w = G[g(z)]$  in der Umgebung eines jeden Punktes ihres Definitionsbereiches auch  $K$ -quasikonform ist (s. z. B. KÜNZI

[2], S. 14.). (Die Rolle von  $G(\zeta)$  spielt hier eine der  $n$ -Funktionen  $\sqrt[n]{\zeta}$  in der Umgebung eines Punktes  $\zeta_0 \neq 0$ ). Nehmen wir in einem kleinen Kreise um  $z_1$  als Mittelpunkt eine beliebige, doch ein für allemal festgelegte dieser Funktionen  $F_\nu(z)$  und bezeichnen sie durch  $F(z)$  (d.h. ohne Index). Die natürliche Zahl  $n$  wählen wir mit Hilfe des Satzes 2 aus. Dieser Satz ist, auch mit der Modifikation, dass  $f(z)$  wenigstens ausserhalb eines Kreises der  $z$ -Ebene der Klasse  $P$  angehört auf  $K$ -quasikonforme Funktionen anwendbar, da es gezeigt werden kann, dass die Bedingungen 1, 2 und 3 aus § 2 für sie erfüllt sind (hierauf deutet auch LOHWATER in seiner Arbeit [1], S. 336 hin). Laut Satz 2 und Hilfssatz 1 (in ihrer negativer Form) gilt für alle geschlossenen Jordanschen Kurven  $\gamma$ , die den Kreis  $|z| \leq R_0$  in ihren Innengebieten enthalten, die Gleichung

$$\text{Var}_\gamma \arg f(z) = 2\pi n,$$

wo  $n$  eine natürliche Zahl ist. Für diese Zahl  $n$  zeigen wir die Richtigkeit unserer Behauptung. Verbinden wir den Punkt  $z_1$  (den wir nun als Ausgangspunkt für die Bestimmung der Funktion  $F(z)$  wählen) durch eine Kurve  $j$  im Gebiete  $|z| > R_0$  mit dem Punkte  $z_2$ . In einem kleinen Kreise mit dem Rande zusammen um  $z_1$  als Mittelpunkt ist  $[F(z)]^n = f(z)$ . Es gibt auf der Kurve  $j$  einen »letzten« Punkt (wenn man auf  $j$  aus dem Punkte  $z_1$  ausgeht) der noch diesem Kreise angehört. In einem anderen kleinen Kreise um diesen »letzten« Punkt gibt es auch  $n$  Funktionen deren  $n$ -te Potenzen mit  $f(z)$  zusammenfallen; eine von ihnen ist die stetige Fortsetzung der vorhin definierten  $F(z)$ . In der bekannten Weise können wir durch eine endliche Kette von kleinen Kreisen, deren Mittelpunkte auf der Kurve  $j$  liegen und die sich teilweise (nämlich die Nachbarkreise) überdecken, schliesslich bis zu einem Kreise um  $z_2$  als Mittelpunkt gelangen und den Definitionsbereich von  $F(z)$  auf den Bereich, der gleich der Summe der benutzten Kreise (als Punktmengen) ist, erweitern. Die so erhaltene Funktion ist in der Umgebung von  $z_2$  eindeutig bestimmt, das heisst, sie hängt nicht von der benutzten Kurve  $j$  ab. Es seien nämlich  $j_1$  und  $j_2$  zwei (nicht notwendig einfache) Kurven, welche im Gebiete  $|z| > R_0$  verlaufen, im Punkte  $z_1$  anfangen und in  $z_2$  enden. Durch » $-j_2$ « sei die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve  $j_2$  bezeichnet und dementsprechend durch  $j_1 - j_2$  die aus  $j_1$  und  $-j_2$  zusammengesetzte geschlossene (im Allgemeinen sich mehrfach überschneidende) Kurve. Bekanntlich ist

$$\text{Var}_{j_1 - j_2} \arg z = 2k\pi,$$

wo  $k$  eine ganze Zahl ist (positiv, negativ, oder 0).

Es kann gezeigt werden, dass aus der Gültigkeit von

$$\text{Var}_\gamma \arg f(z) = 2\pi n,$$



mit

$$\text{Var}_\gamma \arg z = 2\pi$$

folgt, dass für

$$\text{Var}_{\gamma_1} \arg z = 2k\pi$$

die Gleichung

$$\text{Var}_{\gamma_1} \arg f(z) = 2kn\pi$$

gültig ist, sobald die Kurven  $\gamma$  und  $\gamma_1$  mit der Kreisscheibe  $|z| \leq R_0$  keinen Punkt gemeinsam haben. Es ist also

$$\text{Var}_{j_1-j_2} \arg f(z) = 2kn\pi$$

und

$$\text{Var}_{j_1-j_2} \arg F(z) = 2k\pi.$$

In jedem Falle kehrt also der Punkt  $F(z)$ , nachdem  $z$  die Kurve  $j_1 - j_2$  durchgelaufen hat, in ihre Anfangslage  $F(z_1)$  zurück (hängt doch  $|F(z)|$  nur von  $z$  ab). Das bedeutet aber, dass der Wert von  $F(z_2)$  derselbe ist, einerlei ob  $z$  auf der Kurve  $j_1$ , oder aber auf der Kurve  $j_2$  von  $z_1$  bis  $z_2$  gelangte. Also ist die oben definierte Funktion  $F(z)$  im Gebiete  $|z| > R_0$  eindeutig.

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $F(z)$  auch schlicht ist. Um diese Eigenschaft von  $F(z)$  (wenigstens für genügend grosse  $|z|$ -Werte) nachzuweisen machen wir von der Gleichung

$$\text{Var}_\gamma \arg F(z) = 2\pi$$

Gebrauch ( $\gamma$  ist die auch vorhin gebrauchte Jordansche Kurve, die in ihrem Innengebiet den Kreis  $|z| \leq R_0$  enthält. Diese Gleichung folgt aus der Gleichheit  $[F(z)]^n = f(z)$ ).

Wir können nämlich einen Kreis mit einem Radius  $R_{00}$  um den Nullpunkt der  $z$ -Ebene finden, so dass sobald  $|z| \geq R_{00}$ , die Werte  $|F(z)| > \text{Max}_{|z|=R_0} |F(z)|$  sind. (Ist doch  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |F(z)| = \infty$  gleichmässig.) Betrachten wir einen Punkt  $z_0$  mit  $|z_0| \geq R_{00}$  und es sei  $F(z_0) = w_0$ . Aus  $|w_0| > \text{Max}_{|z|=R_0} |F(z)|$  folgt leicht, dass

$$\text{Var}_{\Gamma_0} \arg [F(z) - w_0] = 0$$

ist. Ausserdem ist, wenn  $\Gamma_1$  ein Kreis um  $z = 0$  mit einem genügend grossen Radius ist, laut Satz 2

$$\text{Var}_{\Gamma_1} \arg [F(z) - w_0] = 2\pi.$$

Das bedeutet, dass in dem Kreisring, der durch die Kreise  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  bestimmt wird, der Wert  $w_0$  durch die Funktion  $F(z)$  genau einmal angenommen wird (Hilfssatz 4). Beschränken wir uns auf die Punkte  $z$ , für welche  $|z| \geq R_{00}$  ist, so können wir somit behaupten, dass die entsprechenden Werte  $w = F(z)$  durch die Funktion  $F(z)$  genau einmal angenommen werden, d.h., dass die Abbildung  $z \rightarrow F(z)$  im Aussengebiet des Kreises mit dem Radius  $R_{00}$  (und auf dieser Kreislinie selbst) schlicht ist. Damit ist der Hilfssatz 5 bewiesen. Wir wollen nunmehr statt  $R_{00}$  das Zeichen  $R_0$  benutzen, d.h. wir wollen nachträglich auch annehmen, dass der Kreis  $|z| \leq R_0$  so gewählt wurde, dass in dem abgeschlossenen Gebiete  $|z| \geq R_0$  die Abbildung  $z \rightarrow F(z)$  schlicht ist.

Bei dem Beweise des Satzes 3 machen wir von dem von AHLFORS und BEURLING eingeführten Begriffe der »Extremallänge einer Kurvenfamilie« Gebrauch [4]. Es seien hier die bekannte Definition der Extremallänge einer Kurvenfamilie und ihre im Folgenden zu gebrauchenden Eigenschaften angeführt. Es sollen gewisse rektifizierbare Kurven  $c$  im Gebiete  $\mathfrak{G}$  der  $z$ -Ebene liegen. Die Menge dieser Kurven bezeichnen wir als die Kurvenfamilie  $\{c\}$ . Das Gebiet  $\mathfrak{G}$  sei so beschaffen, und es sei  $\varrho(z)$  eine solche in  $\mathfrak{G}$  definierte, reelle, nichtnegative Funktion von  $z = x + iy$ , dass das im Lebesgueschen Sinne genommene Integral

$$A_{\varrho} = \int_{\mathfrak{G}} \varrho^2 dx dy$$

existiert. Es soll ausserdem für jede Kurve  $c$  das Kurvenintegral nach der Bogenlänge  $s$  als Parameter

$$C_{\varrho}(c) = \int_c \varrho(z) ds$$

existieren. Wir betrachten alle Funktionen  $\varrho(z)$  der verlangten Art, für welche noch die Bedingung

$$C_{\varrho}(c) \geq 1$$

erfüllt ist. Wir nennen das stets vorhandene Infimum

$$\inf_{\varrho} A_{\varrho}$$

den »Modul« der Kurvenfamilie  $\{c\}$  und bezeichnen es durch  $M\{c\}$ . Ist  $M\{c\} \neq 0$ , so nennen wir die Grösse  $1/M\{c\} = L\{c\}$  »die Extremallänge der Kurvenfamilie  $\{c\}$ «. Wenn  $M\{c\} = 0$ , so sagen wir, die Extremallänge  $L\{c\}$  sei unendlich. Es wird bewiesen, dass die Zahl  $L\{c\}$  von dem Gebiete  $\mathfrak{G}$ , in welches die Kurvenfamilie  $\{c\}$  eingebettet ist, unabhängig ist, so, dass man von der Extremallänge (bzw. Modul) einer Kurvenfamilie ohne Bezugnahme auf das Gebiet  $\mathfrak{G}$  sprechen kann. Die Zahl  $L\{c\}$  ist eine konforme Invariante der Kurvenfamilie  $\{c\}$ , das heisst, wird das Gebiet  $\mathfrak{G}$  konform und schlicht auf ein Gebiet  $\mathfrak{G}'$  abgebildet, wobei die Kurvenfamilie  $\{c\}$  in eine Kurvenfamilie  $\{c'\}$  in  $\mathfrak{G}'$  übergeht, so wird  $L\{c\} = L\{c'\}$ . Wir werden im Folgenden die Verallgemeinerung dieser Eigenschaft der Extremallänge für quasikonforme Abbildungen gebrauchen.

**Hilfssatz 6.** Ist die im Gebiete  $\mathfrak{G}$  definierte schlichte Abbildungsfunktion  $w = f(z)$  eine  $K$ -quasikonforme Funktion, wobei durch die Abbildung  $z \rightarrow w$  die Kurvenfamilie  $\{c\}$  in eine Kurvenfamilie  $\{c'\}$  in der  $w$ -Ebene übergeht, so gelten die Ungleichungen

$$(3) \quad \frac{L\{c\}}{K} \leq L\{c'\} \leq K \cdot L\{c\}.$$

Der Beweis dieser Ungleichungen findet sich in der Arbeit von A. PFLUGER [5]. (Es ist zu bemerken, dass PFLUGER sich einer anderen, von J. HERSCH [6] stammenden Definition der Extremallänge bedient, die von der Rektifizierbarkeit der Kurven  $c$  keinen Gebrauch macht, uns genügt hier die ursprüngliche Definition von AHLFORS und BEURLING [4], für welche der Beweis der Ungleichungen (3) ebenso durchgeführt wird, wie für die HERSCH'sche Definition.)



Im Folgenden werden wir noch zwei leicht zu beweisende Hilfssätze über Extremallängen von Kurvenfamilien gebrauchen. (Betreffs der Beweismethoden sei auf die Arbeit von J. HERSCH [6] hingewiesen.)

**Hilfssatz 7.** Das Gebiet  $\mathfrak{G}$  sei ein echter Teil des Gebietes  $\mathfrak{G}_1$  die Kurvenfamilie  $\{c\}$  soll das Gebiet  $\mathfrak{G}$ , die Kurvenfamilie  $\{c_1\}$  soll das Gebiet  $\mathfrak{G}_1$  lückenlos ausfüllen und  $\{c\}$  sei eine Teilmenge von  $\{c_1\}$ . Das Infimum  $\inf_{\mathfrak{G}_1} \iint_{\mathfrak{G}_1} \varrho_1^2 dx dy < \infty$

für alle Funktionen  $\varrho_1(x, y)$ , die zur Bestimmung von  $M\{c_1\}$  zulässig sind, soll durch eine überall in  $\mathfrak{G}_1$  stetige und positive Funktion  $\varrho_1(x, y)$  verwirklicht werden. Dann ist

$$L\{c\} > L\{c_1\}.$$

**Hilfssatz 8.** Die Extremallänge der Familie der aller glatten Jordanschen Kurven  $\gamma$ , die im Kreisringe  $0 < R_1 \leq |z| \leq R_2$  verlaufen und den Kreis  $|z| = R_1$  in ihren (abgeschlossenen) Innengebieten erhalten, ist :

$$L\{c\} = \frac{2\pi}{\log(R_2/R_1)}.$$

Wir können nunmehr zum Beweise des Satzes 3 übergehen.

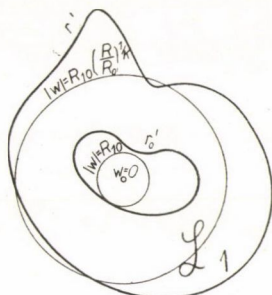
Es sei  $w = f(z)$  eine Funktion, die den Voraussetzungen des Satzes 3 genüge leistet, und es sei  $F(z) = \sqrt[n]{f(z)}$  die  $K$ -quasikonforme Funktion, die das Gebiet  $|z| \geq R_0$  der  $z$ -Ebene auf ein Gebiet der  $w$ -Ebene schlicht abbildet. Durch  $\Gamma'_0$  soll die Jordansche Kurve in der  $w$ -Ebene, in die der Kreis  $|z| = R_0$  bei der Abbildung  $z \rightarrow w = F(z)$  transformiert wird, bezeichnet werden, und hierbei wird das Äussere des Kreises  $|z| = R_0$  (d.h. das Gebiet  $|z| > R_0$ ) auf das Äussere von  $\Gamma'_0$  in der  $w$ -Ebene abgebildet. Da für  $|z| \geq R_0$  immer  $f(z) \neq 0$  ist, so wird der Punkt  $w = 0$  im Innengebiete von  $\Gamma'_0$  liegen.  $|w| \leq R_{10}$  sei der grösste Kreis um  $w = 0$ , als Mittelpunkt dessen sämtliche Punkte zum abgeschlossenen Innengebiet von  $\Gamma'_0$  gehören, und  $|w| \leq R_{20}$  sei der kleinste Kreis um  $w = 0$  der alle Punkte von  $\Gamma'_0$  enthält (Fig. 2.).



Figur 2.

Nun betrachten wir einen Kreisring  $R_0 \leq |z| \leq R$  in der  $z$ -Ebene. Das Bild dieses Kreisringes bei der Abbildung  $z \rightarrow w = F(z)$  ist ein zweifach zusammenhängender Bereich  $\mathfrak{Q}_1$ , der durch die Jordanschen Kurven  $\Gamma'_0$  und  $\Gamma'$ , das Bild von  $|z| = R$ , begrenzt wird. In der  $w$ -Ebene fixieren wir den Kreisring  $R_{10} \leq |w| \leq R_{10} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{1/K}$  und vergleichen ihn mit dem Bereiche  $\mathfrak{Q}_1$  (Fig. 3.).

$\{c\}$  sei die Familie aller geschlossenen glatten Jordanschen Kurven in der  $z$ -Ebene, die im Kreisringe  $R_0 \leq |z| \leq R$  verlaufen und den Kreis  $|z| < R_0$  in ihren Innengebieten enthalten. Die Kurven  $c$  der Familie  $\{c\}$  füllen diesen Kreisring lückenlos aus. Die Bilder  $c'$  der Kurven  $c$  bei der Abbildung



Figur 3.

$z \rightarrow w = F(z)$  sind glatte Jordansche Kurven, die ihrerseits den Bereich  $\Omega_1$  lückenlos ausfüllen und die Kurve  $\Gamma'_0$  (also auch den Kreis  $|w| = R_{10}$ ) in ihren Innengebieten enthalten. Nach Hilfssatz 8 ist

$$L\{c\} = \frac{2\pi}{\log(R/R_0)}$$

und nach Hilfssatz 6 gelten für die Extremallänge  $L\{c'\}$  der Kurvenfamilie  $\{c'\}$  die Ungleichungen:

$$(4) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{K} \frac{2\pi}{\log(R/R_0)} \leq L\{c'\} \leq K \frac{2\pi}{\log(R/R_0)}$$

$$\frac{2\pi}{\log\left[\left(\frac{R}{R_0}\right)^K\right]} \leq L\{c'\} \leq \frac{2\pi}{\log\left[\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{1}{K}}\right]}.$$

Mit Hilfe des Hilfssatzes 7 können wir nun zeigen, dass es nicht vorkommen kann, dass

$$(5) \quad \max_{|z|=R} |F(z)| < R_{10} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{1}{K}}$$

sei. Denn, wäre diese Ungleichung erfüllt, so würde das bedeuten, dass der Bereich  $\Omega_1$  ein echter Teil des Kreisringes  $R_{10} \leq |w| \leq R_{10} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{1}{K}}$  ist und somit nach Hilfssatz 7 die Ungleichung

$$(6) \quad L\{c'\} > \frac{2\pi}{\log\left[\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\frac{1}{K}}\right]}$$



gilt. (Die Voraussetzungen des Hilfssatzes 7 sind bei der Annahme (5) erfüllt, insbesondere wird das Infimum des Integrals  $\iint_{(R_0 \leq |z| \leq R)} \varrho^2 dx dy$  für einen Kreis-

ring  $R_0 \leq |z| \leq R$  durch die zulässige Funktion  $\varrho = \frac{1}{2\pi|z|}$  verwirklicht.)

Die erhaltene Ungleichung (6) steht aber im Widerspruch mit den (stets gültigen) Ungleichungen (4), es muss also für alle  $R > R_0$

$$\max_{|z|=R} |F(z)| \geq \frac{R_{10}}{R_0^{1/K}} \cdot R^{\frac{1}{K}} = \text{Const} \cdot R^{\frac{1}{K}}$$

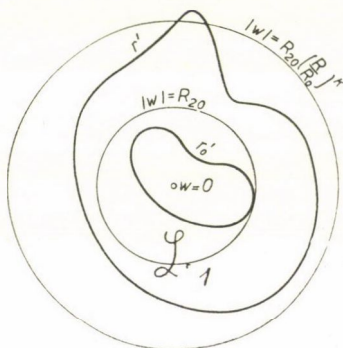
sein. Wenn man berücksichtigt, dass  $|F(z)|^n = |f(z)|$  ist, so bedeutet dies, dass

$$(7) \quad \max_{|z|=R} |f(z)| \geq C_1 R^{\frac{n}{K}}$$

wo  $C_1$  eine Konstante ist. Damit ist die erste Ungleichung des Satzes 3 bewiesen.

Der Beweis der zweiten Ungleichung wird nach der gleichen Methode vollzogen, und zwar: Wir fixieren in der  $w$ -Ebene den Kreis mit dem Radius  $R_{20} \left(\frac{R}{R_0}\right)^K$  und vergleichen den Kreisring  $R_{20} \leq |w| \leq R_{20} \left(\frac{R}{R_0}\right)^K$  mit dem zweifach zusammenhängenden Bereiche  $\mathfrak{L}_1$  (S. Fig. 4.). Wiederum folgt aus dem Hilfssatz 7, dass es nicht vorkommen kann, dass

$$(8) \quad \min_{|z|=R} |F(z)| > R_{20} \left(\frac{R}{R_0}\right)^K$$



Figur 4.

sei. Denn, wäre diese Ungleichung erfüllt, so würde dies bedeuten, dass der Kreisring  $R_{20} \leq |w| \leq R_{20} \left(\frac{R}{R_0}\right)^K$  in echter Teil des Bereiches  $\mathfrak{L}_1$  ist, die Menge aller glatten Jordanschen Kurven in diesem Kreisring, die den Kreis  $|w| < R_{20}$  in ihren Innengebieten enthalten, wäre ein echter Teil der Menge aller Bildkurven  $c'$  (der Kurvenfamilie  $\{c'\}$ ), und nachdem man verifiziert hat, dass



sämtliche Voraussetzungen des Hilfssatzes 7 erfüllt sind (vorausgesetzt, dass die Ungleichung (8) gilt), würde man zu dem Ergebnis

$$L\{c'\} < \frac{2\pi}{\log \left[ \left( \frac{R}{R_0} \right)^K \right]}$$

kommen, was mit den Ungleichungen (4) im Widerspruch steht. Es ist also für alle  $R > R_0$

$$\min_{|z|=R} |F(z)| \leq R_{20} \left( \frac{R}{R_0} \right)^K = \text{Const} \cdot R^K.$$

Widerum folgt aus  $|F(z)|^n = |f(z)|$ , dass

$$\min_{|z|=R} |f(z)| \leq C_2 R^{nK}$$

(wo  $C_2$  eine Konstante ist)

Damit ist die Behauptung des Satzes 3 bewiesen.

Dieser Satz ist auf Klassen von komplexwertigen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, deren Realteil und Imaginärteil  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  (wo  $z = x + iy$ ) einem gewissen System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus genügen, anwendbar. Solche Funktionsklassen wurden von M. A. LAWRENTJEW [7], B. W. SCHABAT [8], L. BERS [9] und auch von anderen Verfassern untersucht (s. den Bericht von KÜNZI [10]). Unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen betreffs dieser Systeme kann man zeigen, dass ihre Lösungen  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$   $K$ -quasikonforme Funktionen sind. L. BERS kam auf die Idee, die Analoga von rationalen Funktionen in solchen Funktionsklassen zu betrachten, und hat bekannte Sätze der Funktionentheorie auf sie übertragen [9].

Es ist noch zu bemerken, dass die Exponenten  $n/K$  und  $nK$  in der Formulierung des Satzes 3 die »besten« sind (wenn man *alle*  $K$ -quasikonformen Funktionen, die die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllen, in Betracht zieht). Dies kann man aus folgenden Beispielen ersehen:

a)  $f(z) = R^K \cdot e^{i\varphi}$ ; ( $z = Re^{i\varphi}$ ) ist eine  $K$ -quasikonforme Funktion, die den Voraussetzungen des Satzes 3 genüge leistet.  $\min_{|z|=R} |f(z)| = R^K$  (also  $n = 1$ ). Natürlich ist gleichzeitig auch  $\max_{|z|=R} |f(z)| = R^K$ .

b)  $f(z) = R^{1/K} \cdot e^{i\varphi}$ ; ( $z = Re^{i\varphi}$ ) ist auch eine  $K$ -quasikonforme Funktion, auf welche der Satz 3 anwendbar ist und

$$\max_{|z|=R} |f(z)| = R^{\frac{1}{K}} \quad \left( \text{auch} \quad \min_{|z|=R} |f(z)| = R^{\frac{1}{K}} \right).$$

Man kann folgendermassen einsehen, dass z. B.  $f(z) = R^K e^{i\varphi}$  eine  $K$ -quasikonforme Funktion von  $z = Re^{i\varphi}$  ist. Wegen der zentralen Symmetrie der Abbildung  $z \rightarrow R^K e^{i\varphi}$  können wir uns auf die Untersuchung der Umgebung eines Punktes  $z = R \neq 0$  beschränken und in diesem Punkte das

Verhältnis der beiden Grössen

$$\left| \frac{df}{dz} \right|_{\varphi=0} \quad \text{und} \quad \left| \frac{df}{dz} \right|_{R=\text{Const}} \quad \text{bilden}$$

(die dann respektive gleich der grossen und der kleinen Halbachse der Ellipse

$$(2) \text{ sind}). \text{ Nun ist } \left| \frac{df}{dz} \right|_{\varphi=0} = \frac{d}{dR} R^K = K R^{K-1}$$

und

$$\left| \frac{df}{dz} \right|_{R=\text{Const}} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \left| \frac{R^K e^{i\varphi} - R^K}{R e^{i\varphi} - R} \right| = R^{K-1}$$

woraus

$$\left| \frac{df}{dz} \right|_{\varphi=0} / \left| \frac{df}{dz} \right|_{R=\text{Const}} = K$$

folgt.

(Eingegangen: 5. Januar, 1962.)

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] LOHWATER, A. J.: „The Boundary Behaviour of a Quasi-Conformal Mapping.” *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, **5** (1956) 335–342.
- [2] KÜNZI, H. P.: „Quasikonforme Abbildungen”. *Suomalaisen Tiedeakatemia Toimituksia*, Sarja A, I. *Mathematica* 249/2 (1958).
- [3] GRÖTZSCH, H.: „Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes”. *Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften. Math. Phys. Klasse*, **80** (1928) 503–507.
- [4] AHLFORS, L.—BEURLING, A.: „Conformal invariants and function-theoretic null-sets.” *Acta Math.* **83** (1950) 101–129.
- [5] PFLUGER, A.: „Extremallängen und Kapazität”. *Comment. Math. Helv.* **29** (1955) 120–131.
- [6] HERSCH, J.: „Longueurs extrémales et théorie des fonctions”. *Comment. Math. Helv.*, **29** (1955) 301–337.
- [7] ЛАВРЕНТЬЕВ, М. А.: „Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей”. *Матем. сб.* **21** (1947) 285–320. (Übersetzung ins Ungarische: *A Magyar Tud. Akad. III. Osztályának Közleményei* **11** (1961) 179–223.)
- [8] ШАБАТ, Б. В.: „Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных”, *Матем. сб.* **17** (59) (1945) 193–210.
- [9] BERS, L.: „Partial differential equations and generalized analytic functions”. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.* **36** (1950) 130–136.
- [10] KÜNZI, H. P.: *Quasikonforme Abbildungen*. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.



# ОБ АНАЛОГАХ ЦЕЛЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО, II.

K. SZILÁRD

## Резюме

Начало статьи см. в этом журнале, том VI., 1961, стр. 375—380.

Доказывается теорема 3: Пусть  $w = f(z)$  является  $K$ -квазиконформной функцией (т. е., если  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , тогда существуют непрерывные частные производные  $u_x, u_y, v_x, v_y$  в области определения от  $f(z)$ , где  $z = x + iy$  и отображение  $z \rightarrow w$   $K$ -квазиконформно с возможным исключением изолированных точек  $z$ ) и пусть она определена для всех конечных значений  $z$ , где  $|z| \geq \text{Const}$ . Если  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$  равномерно, тогда существуют натуральное число  $n$  и три положительные постоянные  $C_1, C_2$  и  $R_0$  (зависящие от функции  $f(z)$ ) такие, что для всех  $R > R_0$  имеют место неравенства

$$\max_{|z|=R} |f(z)| \geq C_1 R^{n/K} \quad \text{и} \quad \min_{|z|=R} |f(z)| \leq C_2 R^{nK}.$$

В доказательстве автор пользуется свойствами «экстремальной длины» семейства кривых, введенной Альфорсом и Бёирлингом [4].