SUR LES SYSTÈMES DES BARRES CONDUCTRICES DE LA CHALEUR

par

T. FÉNYES et P. KOSIK

Introduction

Dans leurs travaux [1] [2] et [3] MM. G. FREUD et G. ADLER s'occupent des problèmes de la propagation de la chaleur avec les conditions aux limites composées. M. G. FREUD, dans son travail [1], traite le problème d'une barre infinie, en contact avec un réservoir de chaleur de capacité calorifique non négligable, au cas où les conditions initiales sont homogènes. Dans son ouvrage, [2] M. G. ADLER a résolu le problème de deux barres infinies mises en contact avec un réservoir de chaleur, resp. le problème d'une barre connectant deux réservoirs de chaleur, au cas où les conditions sont homogènes. M. G. FREUD [3] a généralisé le problème de [1] au cas où les conditions sont inhomogènes avec la restriction que la dérivée de la température initiale est nulle au point zéro. P. KOSIK, M. SALLAY et M. ZIMÁNYI dans leur travail [4] ont résolu le problème sans la restriction ci-dessus.

Dans notre travail, nous donnerons la solution du problème du système formé par les barres de longueurs finies ou infinies, dont le nombre doit être quelconque et qui sont en contact thermique avec le même réservoir de chaleur de capacité calorofique non négligable. Le système considéré peut contenir en même temps des barres finies et infinies. Les auteurs ramènent le problème à la solution d'une équation intégrale de type convolutoire qu'on peut discuter à l'aide du calcul opérationnel de MIKUSINSKY. En vertu d'un théorème bien connu du calcul opérationnel la série infinie qui établit la solution est uniformément convergente, ainsi la vérification de la convergence n'est pas nécessaire. Enfin les auteurs démontreront l'unicité du système de la solution.

1. §. Établissement du problème

Considérons un système composé d'un réservoir de chaleur ponctuel et de barres de longueurs $l_1, l_2, \ldots, l_n$ appliquées au réservoir. Supposons la température du réservoir ne dépende que du temps, de plus que dans les sections des barres la température ne dépende que de la distance au réservoir, c'est-à-dire qu'à un instant donné, dans une certaine section d'une barre quelconque, la température soit constante. La qualité matérielle des barres et la section des différentes barres peuvent être différentes. Le système peut contenir aussi des barres infiniment longues. Pour les barres finies, nous prescrirons à l'extrémité libre de la barre la valeur de la température ou la valeur du gradient de la température. Nous supposons que dans le réservoir se produit $Q(t)$

cal/sec. Notre problème revient à déterminer les fonctions caloriques $V_i(x, t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ des barres et la fonction calorique $U(t)$ du réservoir. La fonction calorique de chaque barres satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} = \varkappa_i^2 \frac{\partial V_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

avec les conditions aux limites

$$V_i(x, 0) = f_i(x) . \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) , \tag{2}$$

$$AU'_t + \sum_{i=1}^{n} B_i [U(t) - V_i(0, t)] = Q(t) , \tag{3}$$

$$V'_{ix}(0, t) = - C_i [U(t) - V_i(0, t)] , \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) , \tag{4}$$

(A, B_i, C_i et $\varkappa_i$ sont des constantes positives)

$$V'_{ix}(l_i, t) = g_i(t) , \qquad (i = 1, 2, \ldots, j) , \tag{5}$$

$$V_i(l_i, t) = h_i(t) , \quad (i = j + 1, j + 2, \ldots j + l) . \tag{6}$$

Pour les barres infinies nous supposons que pour un certain $\gamma > 0$ et pour $t \geqq 0$:

$$\lim e^{-\gamma x^2} V_i(x, t) = 0 , \qquad (i = j + l + 1, \ldots , n) , \tag{7}$$

de plus que la température initiale du réservoir $U(0) = U_0$ est donnée.

2. §. Solution du problème

Cherchons le système des solutions $V_i(x, t)$ sous la forme

$$V_i(x, t) = v_i(x, t) + \bar{v}_i(x, t) \tag{8}$$

où v_i et $\bar{v}_i$ satisfont à (1) et aux conditions

1)
$$\begin{aligned}
&\bar{v}_i(x, 0) = f_i(x) , && i = 1, 2, \ldots, n , \\
&\bar{v}'_{ix}(l_i t) = g_i(t) , && i = 1, 2, \ldots, j , \\
&\bar{v}_i(l_i, t) = h_i(t) , && i = j + 1, j + 2, \ldots, j + l \\
&\bar{v}'_{1x}(0, t) = 0 , && \\
&\bar{v}'_{ix}(0, t) = - c_i [\bar{u}(t) - \bar{v}_i(0, t)] , && i = 2, 3, \ldots, n ,
\end{aligned} \tag{9}$$

où

$$\bar{u}(t) = \bar{v}_1(0, t) .$$

2)
$$\begin{aligned}
&v'_{ix}(l_i, t) = 0 , && i = 1, 2, \ldots, j , \\
&v_i (l_i, t) = 0 , && i = j + 1, \ldots, j + l ,
\end{aligned} \tag{10}$$

de plus

$$\begin{aligned}
&Au'_t + \sum_{i=1}^{n} B_i [u(t) - v_i(0, t)] = q(t) , \\
&v'_{ix}(0, t) = - C_i [u(t) - v_i(0, t)] , \qquad i = 1, 2, \ldots, n ,
\end{aligned} \tag{11}$$

où

$$u(t) = U(t) - \overline{u}(t),$$

(12) et

$$q(t) = Q(t) - \overline{Q}(t),$$

où

$$\overline{Q}(t) = A\overline{u}'_t + \sum_{i=1}^{n} B_i\,[\overline{u}(t) - \overline{v}_i(0, t)]\,. \tag{13}$$

Par substitution, on peut facilement voir que la superposition des fonctions $v_i(x, t)$ et $\overline{v}_i(x, t)$ fournit la solution du problème. Ainsi nous avons réduit notre problème à deux problèmes plus simples. Nous discuterons brièvement la détermination des fonctions $\overline{v}_i(x, t)$ à la fin de notre travail. Dans ce qui suit nous occuperons de la détermination des fonctions $v_i(x, t)$ et $u(t)$.[1]

II.

Déterminons tout d'abord la solution de l'équation de la chaleur (1) pour laquelle

$$\begin{aligned} &w_i(x, 0) = 0\,, && i = 1, 2, \ldots, n\,,\\ &w'_{ix}(l_i, t) = 0\,, && i = 1, 2, \ldots, j\,,\\ &w_i(l_i, t) = 0\,, && i = j+1, j+2, \ldots, j+l\,, \end{aligned} \tag{14}$$

de plus pour les $w_i(x, t)$ la relation (7) est valable, si $i = j + l + 1, \ldots, n$, et

$$w'_{tx}(0, t) - C_i\,w_i(0, t) = 1\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{15}$$

Dans ce cas — bien connu de la littérature — partant du principe de Duhamel [6] nous pouvons écrire la relation suivante

$$v_i(x, t) = -\,C_i \int_0^t u'(t-\tau)\,w_i(x, \tau)\,d\tau\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{16}$$

Nous déterminerons tout d'abord les solutions $w_i(x, t)$. Nous distinguerons d'après le type des conditions aux limites valables à l'extrémité droite des barres deux possibilités, ou bien nous examinerons une barre de longueur infinie.

A) $$w'_{ix}(l_i, t) = 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, j\,.$$

Alors nous opérons de la manière suivante: Soit

$$w_i(x, t) = p_i(x\ \ t) - \frac{1}{C_i} \tag{17}$$

[1] Manifestement, le système des fonctions $v_i(x, t)$, $u(t)$ n'est résoluble qu'en connaissance des fonctions $\overline{v}_i(x, t)$ mais pour déterminer les fonctions $v_i(x, t)$, $u(t)$ nous considérons données les fonctions $\overline{v}\,(x, t)$.

où $p_i(x, t)$ est la solution de l'équation de la chaleur satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} p_i(x, 0) &= \frac{1}{C_i}, \\ p'_{ix}(l_i, t) &= 0, \\ p'_{ix}(0, t) - C_i\, p_i(0, t) &= 0 . \end{aligned}$$

Nous pouvons obtenir plus simplement la solution relative aux fonctions $p_i(x, t)$ à l'aide de la méthode de Fourier. La solution sera

$$p_i(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \left(\cos \mu_{ik} x + \frac{C_i}{\mu_{ik}} \sin \mu_{ik} x \right) \exp \left(- \frac{\mu_{ik}^2}{\varkappa_i^2} t \right), \tag{19}$$

où μ_{ik} est la k-ième racine de l'équation

$$\operatorname{tg} \mu l_i = \frac{C_i}{\mu} \tag{20}$$

et

$$a_{ik} = \frac{\int\limits_0^{l_i} \frac{1}{C_i} \left[\cos \mu_{ik} x + \frac{C_i}{\mu_{ik}} \sin \mu_{ik} x \right] dx}{\int\limits_0^{i} \left[\cos \mu_{ik} x + \frac{C_i}{\mu_{ik}} \sin \mu_{ik} x \right]^2 dx} . \tag{21}$$

(19) satisfait vraiment a l'équation différentielle de la chaleur: en effet (20) a des racines infinies réelles et les fonctions propres $\cos \mu_{ik} x + \frac{C_i}{\mu_{ik}} \sin \mu_{ik} x$ forment un système complet, (19) est dérivable par membre et satisfait aussi aux conditions (18). Les idées analogues sont valables aussi dans le cas B).

B) $$w_i(l_i, t) = 0 , \qquad i = j + 1, j + 2, \ldots, j + l .$$

Dans ce cas, soit

$$w_i(x, t) = p_i(x, t) + \frac{x - l_i}{l_i C_i + 1}, \tag{22}$$

où $p_i(x, t)$ est la solution de l'équation de la chaleur satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned} p_i(x, 0) &= \frac{l_i - x}{1 + l_i C_i}, \\ p_i(l_i, t) &= 0, \\ p'_{ix}(0, t) - C_i\, p_i(0, t) &= 0 . \end{aligned} \tag{23}$$

Nous déterminons la fonction $p_i(x, t)$ à l'aide de la méthode de Fourier. Nous obtenons

$$p_i(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik} \left(\cos \nu_{ik} x + \frac{C_i}{\nu_{ik}} \sin \nu_{ik} x \right) \exp \left(- \frac{\nu_{ik}^2}{\varkappa_i^2} t \right) \tag{24}$$

où ν_{ik} est la k-ième racine positive de l'équation

$$\operatorname{tg} \nu l_i = -\frac{\nu}{C_i} \tag{25}$$

et

$$b_{ik} = \frac{\int\limits_0^{l_i} \left(\frac{l_i - x}{l_i C_i + 1}\right)\left(\cos \nu_{ik} x + \frac{C_i}{\nu_{ik}} \sin \nu_{ik} x\right) dx}{\left(\int\limits_0^{l_i} \left[\cos \nu_{ik} x + \frac{C_i}{\nu_{ik}} \sin \nu_{ik} x\right]^2 dx\right)^{1/2}} .$$

On peut facilement voir que les fonctions $w_i(x, t)$ satisfont aux conditions (14) et (15) dans les cas A) et B).

C) (Cas des barres infinies.) Soit $l_i = \infty$ pour $i = j + l + 1, \ldots, n$. En déterminant les fonctions cherchées à l'aide du calcul opérationnel il vient

$$w_i(x, t) = \frac{1}{C_i} \exp\left(C_i x + \frac{C_i^2}{\varkappa_i^2} t\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\varkappa_i x}{2\sqrt{t}} + \frac{C_i}{\varkappa_i}\sqrt{t}\right) - \frac{1}{C_i} \operatorname{erfc}\left(\frac{\varkappa_i x}{2\sqrt{t}}\right). \tag{26}$$

Les calculs faits, nous avons déterminé les fonctions $w_i(x, t)$ dans tous les trois cas.

Remarquons toutefois que nous ne nous occupons pas de la discussion détaillée de la détermination des fonctions $w_i(x, t)$, car les problèmes de la propagation de la chaleur de même type figurent dans plusieurs manuels d'enseignement.

III.

Nous déduirons et déterminerons par la suite une équation intégrale de deuxième ordre de type convolutoire relative à la dérivée de la fonction $u(t)$.

En remplacant (16) dans (11) nous obtenons

$$\begin{gathered} Au'(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i \left[u(t) + C_i \int_0^t u'(t-\tau)\, w_i(0, \tau)\, d\tau\right] = \\ = q(t) = Au'(t) + \int_0^t u'(\tau)\, d\tau \sum_{i=1}^{n} B_i + u(0) \sum_{i=1}^{n} B_i + \sum_{i=1}^{n} B_i C_i \int_0^t u'(\tau)\, w_i(0, t-\tau)\, d\tau. \end{gathered} \tag{27}$$

En appliquant une transformation très simple nous obtiendrons l'équation intégrale suivante:

$$Au'(t) + \int_0^t u'(\tau) \sum_{i=1}^{n} B_i \left[1 + C_i w_i(0, t-\tau)\right] d\tau = q(t) - u(0) \sum_{i=1}^{n} B_i . \tag{28}$$

Nous résoudrons l'équation (28) à l'aide du calcul opérationnel de MIKUSINSKY. D'après la notations de MIKUSINSKY, soit $\{u'(t)\}$ un élément du corps des fractions MIKUSINSKY. Nous pouvons écrire

$$A\{u'\} + \{u'\}\left\{\sum_{i=1}^{n} B_i \left[1 + C_i w_i(0, t)\right]\right\} = \left\{q(t) - u(0) \sum_{i=1}^{n} B_i\right\} \tag{29}$$

d'où

$$(30)\quad \{u'\} = \frac{\left\{q(t) - u(0)\sum_{i=1}^{n} B_i\right\}}{A + \left\{\sum_{i=1}^{n} B_i[1 + C_i w_i(0,t)]\right\}} = \frac{1}{A}\,\frac{\left\{q(t) - u(0)\sum_{i=1}^{n} B_i\right\}}{1 + \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{A}[1 + C_i w_i(0,t)]\right\}}$$

où

$$\{u'\} = \frac{1}{A}\left\{q(t) - u(0)\sum_{i=1}^{n} B_i\right\} -$$

$$-\frac{1}{A}\left\{q(t) - u(0)\sum_{i=1}^{n} B_i\right\}\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{A}[1 + C_i w_i(0,t)]\right\}}{1 + \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{A}[1 + C_i w_i(0,t)]\right\}}.$$

Les fonctions $w_i(0, t)$ sont continues dans l'intervalle $0 \leqq t < \infty$ (voir (17), (19), (22), (24)). Par conséquent en vertu d'un théorème bien connu du calcul opérationnel [8] l'opérateur

$$\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{A}[1 + C_i w_i(0,t)]\right\}}{1 + \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{A}[1 + C_i w_i(0,t)]\right\}}$$

peut être développé en la série

$$(31)\quad \{H(t)\} = -\sum_{\varrho=1}^{\infty} (-1)^{\varrho}\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{A}[1 + C_i w_i(0,t)]\right\}^{\varrho}.$$

La série (31) est, dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq t_0$, absolument et uniformément convergente et établit sur cet intervalle une fonction continue (voir [7] et [8]). Alors d'après (31), nous obtenons la solution de l'équation (28) sous la forme[2]

$$(32)\quad u'(t) = \frac{1}{A}\left[q(t) - u(0)\sum_{i=1}^{n} B_i\right] + \frac{1}{A}\int_0^t \left[q(\tau) - u(0)\sum_{i=1}^{n} B_i\right] H(t-\tau)\,d\tau .$$

Écrirons de nouveau l'intégrale de DUHAMEL

$$(33)\quad v_i(x,t) = -C_i \int_0^t u'(t-\tau)\, w_i(x,\tau)\,d\tau\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

[2] P. KOSIK, M. SALLAY et M. ZIMÁNYI [4] ont démontré que la fonction $q(t)$ est continue pour $t > 0$ et pour $t = 0$ la fonction ne peut prendre qu'une singularité de la forme $\frac{c}{\sqrt{t}}$. D'ou et en vertu de la continuité de $H(t)$ il en résulte inmédiatement que $u'(t)$ est aussi continue pour $t > 0$ et pour $t = 0$ ne peut prendre qu'une singularité de la forme $\frac{c^*}{\sqrt{t}}$. Alors $q(t)$ et $u'(t)$ sont vraiment éléments du corps des fractions de MIKUSINSKY.

Nous remarquons que les fonctions $v_i(x, t)$ admettent une seconde dérivée continue c'est-à-dire fournissent la solution effective du problème de la propagation de la chaleur.

En effet les fonctions $w_i(x, t)$ admettent une seconde dérivée selon x, alors

$$\frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial x^2} = - C_i \int_0^t u'(t-\tau)\, w''_{ixx}(x,\tau)\, d\tau\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

De plus, d'après les propriétés de la convolution il s'ensuit que (33) est dérivable selon t et

$$\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} = - C_i \int_0^t u'(t-\tau) \frac{\partial w_i(x,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau - C_i\, w_i(x, 0)\, u'\,.$$

Vu que $w_i(x, 0) = 0$, par conséquent

$$\frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} = - C_i \int_0^t u'(t-\tau) \frac{\partial w_i(x,\tau)}{\partial \tau}\, d\tau\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Les fonctions $v_i(x, t)$ sont donc déterminées.

Examinons très brièvement la question de la détermination des fonctions $\bar{v}_i(x, t)$.

Cherchons les fonctions $\bar{v}_i(x, t)$ sous la forme[3]

$$\bar{v}_i = k_{i1}(x,t) + k_{i2}(x,t)\,, \qquad i = 2, 3 \ldots n \tag{34}$$

où k_{i1} et k_{i2} sont des fonctions caloriques satisfaisant aux conditions

a)

$$\begin{aligned} k_{i1}(x, 0) &= f_i(x)\,, & i &= 2, 3, \ldots, n\,, \\ k'_{i1x}(0, t) &= 0\,, & i &= 2, 3, \ldots, n\,, \\ k'_{i1x}(l_i, t) &= g_i(t)\,, & i &= 2, 3, \ldots, j\,, \\ k_{i1}(l_i, t) &= h_i(t)\,, & i &= j+1, \ldots, j+l\,, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} k_{i2}(x, 0) &= 0\,, & i &= 2, 3, \ldots, n\,, \\ k'_{i2x}(0, t) &= - C_i\, [\bar{u}(t) - k_{i1}(0, t) - k_{i2}(0, t)]\,, & i &= 2, 3, \ldots, n\,, \\ k'_{i2x}(l_i, t) &= 0\,, & i &= 2, 3, \ldots, j \\ k_{i2}(l_i, t) &= 0\,, & i &= j+1, j+2, \ldots, j+l\,. \end{aligned}$$

(Naturellement, au cas où les barres sont de longueurs infinies, il n'existe que les conditions aux limites pour $x = 0$.)

[3] La détermination des fonctions $\bar{v}_1(x, t)$ est un problème élémentaire que nous ne discutons pas.

Il est facile de voir que la somme des fonctions $k_{i1} + k_{i2}$ fournit vraiment les fonctions cherchées $\bar{v}_i(x, t)$.[4]

Nous pouvons obtenir les fonctions k_{i2} d'après le relation (16) en substituant $\bar{u}(t) - k_{i1}(0, t)$ à $u(t)$.

3. §. Le démonstration d'unicité des solutions

Enfin il nous reste à traiter la question de l'unicité des solutions $U(t)$ et $V_i(x, t)$. Il nous suffit évidemment de démontrer que le principe de monotonité est applicable dans notre problème plus général. (Pour le principe de monotonité voir [1] et [3]).

Il faut alors démontrer le théorème suivant:

Soient $U_\eta(t)$, $V_{i\eta}(x, t)$ les solutions de notre problème, continues même sur la frontière concernant la fonction $Q_\eta(t)$ ($\eta = 1, 2$) pour lesquelles les valeurs initiales et les conditions aux limites prescrites sont équivalentes.

Soit $Q_1(t) > Q_2(t)$ et $U_1(0) > U_2(0)$ pour $0 \leqq t \leqq T$. Alors $V_{i1}(x, t) > > V_{i2}(x, t)$ pour $t \leqq T$ et $0 \leqq x \leqq l_i$. Supposons en premier que $j = 0$, $l = n$ c'est-à-dire que toutes les barres sont finies et que les valeurs initiales sont prescrites aux extrémités droites des barres,

$$V_{i1}(l_i, t) = V_{i2}(l_i, t) .$$

Introduisons les notations suivantes:

$$Q_1(t) - Q_2(t) = Q(t),\ V_{i1}(x, t) - V_{i2}(x, t) = V_i(x,t),\ U_1(t) - U_2(t) = U(t) .$$

D'après le principe du maximum il nous suffit de démontrer que

$$V_i(0, t) \geqq 0,\ \ 0 \leqq t \leqq T .$$

Supposons qu'il existe un t_{i1} pour lequel $V_i(0, t_{i1}) < 0$. Comme $V_i(0, 0) = 0$ et $U(0) > 0$, il en découle que pour un t assez petit: $V'_{ix}(0, t) < 0$ pour chaque i. En tenant compte de la représentation intégrale de $V_i(x, t)$ concernant la fonction $V'_{ix}(0, t)$ prescrite (voir [3]): $V_i(0, t) > 0$ pour un t assez petit. La fonction $V_i(0, t)$ change donc au moins une fois de signe dans l'intervalle $(0, t_{i1})$. Désignons par t_{i2} le plus petit nombre où la fonction $V_i(0, t)$ change de signe et soit

$$t^* = \min_i t_{i2} .$$

(Sans restriction de la généralité nous pouvons supposer que t^* correspond à la solution $V_1(0, t)$ c. à. d. $t^* = t_{12}$.)

Ainsi pour chaque i: $V_i(0, t) \geq 0$ si $0 \leq t \leq t^*$. Vu que $V_1(0, t^*) = 0$ et $V_1(0, t) \geqq 0$ dans l'intervalle $0 \leq t \leq t^*$, en vertu du principe du maximum, $V_1(x, t) \geq 0$, dans le domaine $0 \leq t \leq t^*$, $0 \leq x \leq l_1$ et $V'_{1x}(0, t^*) \geq 0$. D'après (4) il résulte que $U(t^*) \leq 0$ et d'après (3) il est évident que $U'(t^*) > 0$. Alors il existe un $t^{**} < t^*$, où $U(t^{**}) = 0$ et $U'(t^{**}) \leqq 0$. En tenant compte de nouveau de (3) on aboutit à une contradiction.

---

[4] Les fonctions k_{i1} sont déterminables á l'aide de méthodes bien connues figurant dans les manuels d'enseignement.

Au cas où notre système est également composé de barres de longueur infinie resp. pour lesquelles les valeurs de la dérivée par x sont prescrites, la démonstration est analogue a celle publiée dans [3].

Enfin nous exprimons nos remerciements à Mlle. SALLAY pour l'aide apporté dans notre travail.

(Reçu le 10 Janvier 1962.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] FREUD, G.: „Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel. I." *Az MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Kiadványai* III (1955) 389–394.
[2] ADLER, GY.: „Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel. II." *Az MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* **1** (1956) 167–183.
[3] FREUD, G.: „Problèmes de la propagation de la chaleur avec les conditions aux limites composées". *Comptes Rendus du Congrés International des Mathématiques de l'Ingénieur, Mons et Bruxelles* 9–14 Juin, 1958, pp. 199–206.
[4] KOSIK, P.–SALLAY, M.–ZIMÁNYI, M.: „Problèmes de la propagation de la chaleur avec les conditions aux limites composées". *MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* **4** (1959) 377–383.
[5] SOMMERFELD, A.: *Partielle Differentialgleichungen der Physik*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest-Portig K. G. Leipzig, 1954.
[6] COURANT, R.–HILBERT, D.: *Methoden der mathematischen Physik*, I–II., Springer, Berlin, 1937.
[7] MIKUSIŃSKI, J.: *Operational Calculus*. Pergamon Press, London–New York–Paris–Los Angeles Panstwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa, 1959.
[8] BUTZER, P. L.: „Die Anwendung des Operatorenkalküls von Jan Mikusinski auf lineare Integralgleichungen vom Faltungstypus". *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **2** (1958) 114–128.
[9] MIKUSIŃSKI, J. G.–RYLL-NARDZEWSKI, CZ.: „Sur le produit de composition." *Studia Mathematica* **12** (1951) 51–57, Wroclaw.

О СИСТЕМЕ ТЕПЛОПРОВОДЯЩИХ СТЕРЖНЕЙ

T. FÉNYES – P. KOSIK

Резюме

Авторы решают задачу теплопроводности системы состоящей из произвольного конечного числа конечных, соответственно бесконечных стержней примыкающих к тепловому резервуару, тепловой ёмкостью которого нельзя пренебречь. Исследуемая система может одновременно включать в себя стержни конечной и бесконечной длины. Авторы сводят задачу к решению интегрального уравнения второго рода типа свертки, которое они исследуют при помощи операционного исчисления Микусинского. Этим они достигают того, что бесконечный ряд, представляющий решение, согласно одной известной теоремы операционного исчисления, будет равномерно сходиться и поэтому исследование сходимости станет излишним. Авторы, наконец, доказывают единственность системы решений задачи теплопроводности.