NEUER BEWEIS EINES GRAPHENTHEORETISCHEN SATZES VON P. TURÁN

von

B. ANDRÁSFAI

Von P. TURÁN stammt der folgende graphentheoretische Problemenkreis: Höchstens wie viele Kanten kann ein Graph G mit n Knotenpunkten enthalten, wenn G keinen Teilgraph mit gewissen vorgeschriebenen Eigenschaften enthält, und welche sind jene Graphen, die n Knotenpunkte haben und unter der gegebenen Bedingung die grösstmögliche Anzahl von Kanten besitzen? TURÁN behandelt zum ersten Male in einer 1941 veröffentlichten Arbeit [1] (s. auch [2]) eine derartige Frage. Satz 1 dieser Arbeit bildete den Ausgangspunkt zahlreicher Untersuchungen dieses Problemenkreises. In der vorliegenden Arbeit wird für diesen Satz ein neuer Beweis gegeben.

Der zu beweisende Satz bezieht sich auf ungerichtete, endliche Graphen. Wir schliessen auch jene Graphen nicht aus, die keine Kante bzw. keinen Knotenpunkt enthalten. Zwei Knotenpunkte — im weiteren kurz Punkte genannt — sollen durch höchstens eine Kante verbunden sein, und jede Kante soll zwei verschiedene Punkte (Endpunkte) enthalten. Die Menge der Punkte bzw. der Kanten des Graphen G wird mit M_G bzw. N_G, die Anzahl der Kanten von G mit $\nu(G)$ bezeichnet. Sind A und B Punktmengen, so wollen wir eine Kante, wenn einer ihrer Endpunkte in A, der andere in B liegt, eine *AB-Kante* nennen. Der Graph G' ist ein *Teilgraph* von G, wenn die Punkte und Kanten von G' gleichzeitig Punkte und Kanten von G sind. Ist G' ein Teilgraph von G, so sagen wir auch, dass *G G' enthält*. Ist $A \subseteq M_G$, so bezeichnet $[A]_G$ denjenigen Teilgraphen von G, der aus sämtlichen Punkten von A und aus sämtlichen AA-Kanten von G besteht. Ein Graph wird ein *vollständiger n-Graph* genannt, wenn er n Punkte hat und je zwei seiner Punkte durch eine Kante verbunden sind. $H(n, k)$ $(k \geqq 2)$ bezeichnet die folgende *Klasse* von Graphen: Jene und nur jene Graphen sind Elemente von $H(n, k)$, die n Punkte besitzen und keinen vollständigen k-Graphen enthalten. Ist $G \in H(n, k)$ und enthält G die maximale Anzahl von Kanten, so sagen wir, dass G ein *extremaler Graph* der Klasse $H(n, k)$ ist.

Die Anzahl der Elemente einer beliebigen Menge A wird mit $\alpha(A)$ bezeichnet. Gilt für die Mengen $A_1, \ldots, A_l$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i, j = 1, \ldots, l; i \neq j)$ und $\bigcup_{i=1}^{l} A_i = A$, so sagen wir, dass $\{A_1, \ldots, A_l\}$ eine *Zerlegung* der Menge A ist. Unter einer *gleichmässigen Zerlegung* der Punktmenge A verstehen wir eine solche Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_l\}$ von A, für welche $|\alpha(A_i) - \alpha(A_j)| \leqq 1$ $(i, j = 1, \ldots, l)$ gilt. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass wenn

$\alpha(A) = n$ und $n = q \cdot l + r$ $(0 \leqq r < l)$ besteht, so in einer gleichmässigen Zerlegung $\{A_1, \ldots A_l\}$ von A r Mengen A_i $q+1$ Punkte und $l-r$ Mengen A_i q Punkte enthalten; also wird durch n und l die Menge der nichtnegativen, ganzen Zahlen $\alpha(A_i)$ $(i = 1, \ldots, l)$ eindeutig bestimmt.

Der erwähnte Turánsche Satz lässt sich nun mit den eingeführten Begriffen folgendermassen formulieren:

Satz (TURÁN): *Der Graph G ist dann und nur dann ein extremaler Graph der Klasse $H(n, k)$, wenn eine solche gleichmässige Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_{k-1}\}$ von $\boldsymbol{M}_G$ existiert, dass N_G aus sämtlichen $A_i\,A_j$-Kanten $(i, j = 1, \ldots, k-1;\ i \neq j)$ besteht.*

I. Zuerst beweisen wir durch vollständige Induktion bezüglich k die folgende Behauptung:

Ist G ein extremaler Graph der Klasse $H(n, k)$, so existiert eine solche Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_{k-1}\}$ von M_G, dass N_G aus sämtlichen A_iA_j-Kanten $(i, j = 1, \ldots, k-1;\ i \neq j)$ besteht.

Die Behauptung ist für $k = 2$ richtig. Ist nämlich $G \in H(n, 2)$, so kann G keine Kante enthalten.

Nun sei $k > 2$, und nehmen wir an, dass unsere Behauptung für jedes $m \geqq 0$ in Bezug der extremalen Graphen der Klasse $H(m, k-1)$ richtig ist. Ferner sei n beliebig und G ein extremaler Graph der Klasse $H(n, k)$.

Betrachten wir alle solche Teilmengen C von M_G, für die $[C]_G$ keinen vollständigen $(k-1)$-Graphen enthält. Wählen wir aus diesen Mengen C eine solche Menge A heraus, welche die maximale Anzahl von Punkten besitzt. Es seien $\alpha(A) = n'$ und $B = M_G - A$. Auf Grund der extremalen Eigenschaften von G und A werden wir beweisen, dass

(a) $[A]_G$ ein extremaler Graph der Klasse $H(n', k-1)$ ist;

(b) G alle AB-Kanten, jedoch keine BB-Kante enthält.[1]

Aus unserer Induktionsannahme folgt dann die Existenz einer solchen Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_{k-2}\}$ von A, bei welcher die Menge der Kanten von $[A]_G$ aus sämtlichen $A_i\,A_j$-Kanten $(i, j = 1, \ldots, k-2;\ i \neq j)$ besteht. Demzufolge ergibt $\{A_1, \ldots, A_{k-2}, B\}$ eine gesuchte Zerlegung von M_G.

Das Bestehen von (a) und von (b) wird folgendermassen nachgewiesen:

Bezeichnen wir mit ν_B die Anzahl derjenigen Kanten von G, die mindestens einen zu B gehörigen Endpunkt haben. Dann besteht

$$\nu(G) = \nu([A]_G) + \nu_B . \tag{1}$$

Zu keinem Punkt von G können mehr als $\alpha(A)$ Kanten inzident sein. Sei nämlich p ein beliebiger Punkt von G, und P die Menge der von p verschiedenen Endpunkte jener Kanten von G, die zu p inzident sind. $[P]_G$ enthält keinen vollständigen $(k-1)$-Graphen, da ein solcher Graph G_1, ergänzt durch p und durch jene Kanten, die p mit den Punkten von G_1 verbinden, einen vollständigen k-Graphen in G ergeben würde. Wegen der maximalen Eigenschaft von A ist also $\alpha(P) \leqq \alpha(A)$. Daraus folgt, dass

$$\nu_B \leqq \alpha(A) \cdot \alpha(B) . \tag{2}$$

[1] Falls A oder B leer sind, dann existieren keine AB- und BB-Kanten. In diesem Falle ist (b) nichtssagend.

Hier kann die Gleichheit dann und nur dann bestehen, wenn G keine BB-Kante enthält und zu jedem Punkt von B $\alpha(A)$ Kanten von G inzident sind, d. h. wenn alle AB-Kanten in G existieren.

Betrachten wir nun einen solchen Graphen G^*, für den $M_{G^*} = M_G$, $[A]_{G^*}$ ein extremaler Graph der Klasse $H(n', k-1)$ ist, und G^* alle AB-Kanten, jedoch keine BB-Kante enthält. Dann gilt

$$\nu(G^*) = \nu([A]_{G^*}) + \alpha(A) \cdot \alpha(B) .$$

G^* kann ferner keinen vollständigen k-Graphen enthalten, denn ein solcher Graph könnte höchstens einen Punkt in B besitzen, und so müsste $[A]_{G^*}$ einen vollständigen $(k-1)$-Graphen enthalten. G^* gehört also zur Klasse $H(n, k)$.

Wenn (a) nicht richtig ist, so gilt $\nu([A]_G) < \nu([A]_{G^*})$, und wenn (b) nicht besteht, dann ist wegen (2) $\nu_B < \alpha(A) \cdot \alpha(B)$. In beiden Fällen folgt aus (1) und (2) $\nu(G^*) > \nu(G)$, was jedoch der extremalen Eigenschaft von G widerspricht.

II. Es besteht die Behauptung: Enthält der Graph G n Punkte, und gibt es eine solche Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_{k-1}\}$ von M_G, bei der G keine $A_i A_i$-Kante $(i = 1, \ldots, k-1)$ besitzt, so gilt $G \in H(n, k)$. Es müssen nämlich bei jeder Wahl von k Punkten von M_G mindestens zwei dieser Punkte derselben Menge A_i zugehören. Zwei solche Punkte sind aber nicht durch eine Kante verbunden.

Schliesslich sei G ein Graph mit n Punkten, für welchen eine solche Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_{k-1}\}$ von M_G existiert, dass N_G aus sämtlichen $A_i A_j$-Kanten $(i, j = 1, \ldots, k-1; i \neq j)$ besteht. Laut unserer vorherigen Feststellung ist $G \in H(n, k)$. Sei $\alpha(A_i) = n_i$. Dann ist $\sum_{i=1}^{k-1} n_i = n$ und

$$\nu(G) = \binom{n}{2} - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{n_i}{2} .$$

Der rechtsstehende Ausdruck ist dann und nur dann maximal, wenn $\sum_{i=1}^{k-1} \binom{n_i}{2}$ minimal ist. $\sum_{i=1}^{k-1} \binom{n_i}{2}$ nimmt jedoch seinen minimalen Wert dann und nur dann an, wenn $|n_i - n_j| \leq 1$ $(i, j = 1, \ldots, k-1)$ gilt; ist nämlich für irgendwelche Indizes g und h $n_g - n_h > 1$, so gilt

$$\binom{n_g - 1}{2} + \binom{n_h + 1}{2} < \binom{n_g}{2} + \binom{n_h}{2},$$

wonach $\sum_{i=1}^{k-1} \binom{n_i}{2}$ verkleinert werden kann.

Aus I und aus den obigen folgt, dass ein Graph G dann und nur dann ein extremaler Graph der Klasse $H(n, k)$ ist, wenn eine solche gleichmässige Zerlegung $\{A_1, \ldots, A_{k-1}\}$ von M_G existiert, bei welcher N_G aus sämtlichen $A_i\, A_j$-Kanten $(i, j = 1, \ldots, k - 1;\ i \neq j)$ besteht. Damit ist der Turánsche Satz bewiesen.

(Eingegangen: 16. März, 1962.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] TURÁN, P.: "Egy gráfelméleti szélsőérték feladatról". *Mat. és Fiz. Lapok* **48** (1941) 436—452.
[2] TURÁN, P.: "On the theory of graphs". *Colloquium Mathematicum* **8** (1954) 19—30.