ÜBER DIE PARALLELBEREICHEN NACH INNEN VON EIBEREICHEN

von

J. CZIPSZER

Es sei K ein Eibereich, d. h. eine nichtleere, konvexe, abgeschlossene und beschränkte ebene Menge. Verschiebt man jede abgeschlossene Halbebene, welche von einer Stützgerade von K begrenzt ist und K enthält, in der zur Stützgerade normalen, nach dem Inneren der Halbebene weisenden Richtung mit dem Abstand t und bildet den Durchschnitt der verschobenen Halbebenen, so entsteht eine konvexe, abgeschlossene, im Inneren von K liegende Menge $K(t)$, welche man das *Parallelbereich nach innen von K im Abstande* t nennt. (Für $t = 0$ setzt man $K(0) = K$.) $K(t)$ kann auch als die Menge derjenigen Punkten von K definiert werden, die vom Rande von K einen Abstand nicht kleiner als t aufweisen; die zwei Definitionen sind einander gleichwertig.[1] Für $0 \leqq t \leqq \varrho_K$, wobei ϱ_K den Inkreisradius von K bezeichnet, ist $K(t)$ ein Eibereich mit inneren Punkten, für $t = \varrho_K$ ist es eine Strecke oder ein Punkt und für $t > \varrho_K$ ist es leer.

Die Betrachtung der Mengenschar $\big(K(t)\big)_{0 \leqq t \leqq \varrho_K}$ hat sich für die Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung nebst deren Verschärfung für Eibereiche sehr fruchtbar erwiesen. (Siehe [1], [2], [3] und [4][2].)

G. Bol beweist in [1] (unter Verwendung anderer Bezeichnungen), dass der Umfang $L_K(t)$ von $K(t)$ das unbestimmte Integral einer Funktion $-\varkappa_K(t)$ ist, wobei $\varkappa_K(t)$ monoton nicht abnimmt und der Ungleichung $\varkappa_K(t) \geqq$ $\geqq 2\pi$ genügt.[3] Daraus leitet er die Formel

$$L^2 - 4\pi O = \lim_{t=\varrho_K - 0} L^2(t) + 2\int_0^{\varrho_K} L_K(t)\big(\varkappa_K(t) - 2\pi\big)\,dt$$

ab, wo L den Umfang, O die Oberfläche von K bedeutet. Diese Formel setzt die Positivität des isoperimentrischen Defizites in Evidenz. A. a. O. wird auch

[1] Siehe für diese Definitionen G. Bol [1], wo der Begriff des Parallelbereiches nach innen Th. Kaluza zugeschrieben ist.

[2] Der Begriff der Parallelmengen nach innen lässt sich für konvexe Körper des n-dimensionalen euklidischen Raumes bilden und auf den Beweis der n-dimensionalen isoperimetrischen Ungleichung anwenden. Siehe in dieser Richtung [2], [3], [5] p. 269 und [6]. In dieser Note beschäftigen wir uns aber ausschliesslich mit dem zweidimensionalen Fall.

[3] $\varkappa_K(t)$ ist gleich $2\pi + \sum\left(2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_P}{2} - \alpha_P\right)$, wo α_P den Winkel der Normalen der halbseitigen Tangenten im Eckpunkt P bedeutet und die Summe über alle Eckpunkte von K ausgestreckt werden muss.

die Positivität von $L^2 - 2\varkappa(0)O$ bewiesen. A. RÉNYI hat in [4] die erwähnten Bolsche Resultate erneut bewiesen und andere Verschärfungen der isoperimetrischen Ungleichung ebenfalls mit Hilfe der Funktion $\varkappa_K(t)$ aufgestellt. $\varkappa_K(t)$ wird bei RÉNYI die *charakteristische Funktion von K* genannt.

Vor kurzem hat mir Herr Professor RÉNYI das Problem gestellt, diejenigen Funktionen zu kennzeichnen, welche als charakteristische Funktionen von Eibereichen auftreten können.

Um dieses Problem beantworten zu können, bemerken wir zunächst, dass die oben erwähnten Ergebnisse von BOL die folgende Behauptung enthalten:

Satz 1. *Für jedes Eibereich K mit inneren Punkten ist $L_K(t)$ in $[0, \varrho_K)$ eine konkave Funktion, welche der Ungleichung*

$$-D^+ L_K(t) \geqq 2\pi \tag{1}$$

genügt. (D^+ bedeutet rechtseitige Ableitung.)

Wir werden die Definition der charakteristischen Funktion ein wenig abändern, indem wir unter der charakteristischen Funktion eines Eibereiches K mit inneren Punkten die Funktion

$$\varkappa_K(t) = -D^+ L_K(t) \qquad (0 \leqq t < \varrho_K)$$

verstehen werden; diese $\varkappa_K(t)$ kann natürlich von der früher erwähnten (vgl. Fussnote [3]) nur für höchstens abzählbar viele t-Werte abweichen.

Laut Satz 1 ist $\varkappa_K(t)$ eine, von recht stetige, monoton nicht abnehmende Funktion, für welche $\varkappa_K(t) \geqq 2\pi$ gilt. Ausserdem ist $\varkappa_K(t)$ offenbar über $[0, \varrho_K)$ integrierbar.

Folgendes Ergebnis zeigt, dass diese Eigenschaften die charakteristischen Funktionen schon vollständig kennzeichnen.

Satz 2. *Zu jeder, in einem Intervall $[0, \varrho)$ $(\varrho > 0)$ definierte, von recht stetige, monoton nicht abnehmende und integrierbare Funktion $\varkappa(t)$, für welche*

$$\varkappa(t) \geqq 2\pi \tag{2}$$

gilt, lässt sich ein Eibereich mit inneren Punkten finden, dessen charakteristische Funktion $\varkappa(t)$ ist.

Der Vollständigkeit halber werden wir auch Satz 1 beweisen. (Man könnte übrigens diesen Satz aus der allgemeinen Theorie der konkaven Scharen von konvexen Körpern folgern.)

Wir denken im Folgenden ein rechtwinkliges Koordinatensystem in der Ebene festgelegt. Ist K ein Eibereich, so gehört jeder reellen Zahl φ eine eindeutig bestimmt Stützgerade l_φ von K und eine von dieser Stützgerade begrenzte und K enthaltende Halbebene derart, dass die zur Stützgerade normale und von der Halbebene wegweisende Richtung den Richtungswinkel φ besitzt. Diese Stützgerade soll im Folgenden als die »zum Richtungswinkel φ gehörende Stützgerade« bezeichnet werden. Wir bezeichnen mit $h(\varphi)$ den Abstand des Ursprungs von der Stützgerade, wobei dieser Abstand mit negativem Vorzeichen genommen werden muss, falls die Halbebebene den Ursprung nicht enthält. Es heisst $h(\varphi)$ bekanntlich die Stützfunktion von K. Bei dem Beweise der Sätzen 1 und 2 werden wir die folgenden Eigenschaften der Stützfunktion verwenden.

(3) *Sind K_1 und K_2 Eibereiche mit den Stützfunktionen $h_1(\varphi)$ und $h_2(\varphi)$, so ist $K_1(t) \supset K_2$ für $0 \leqq t \leqq \varrho_{K_1}$ dann und nur dann gültig, wenn $h_1 \geqq h_2 + t$ ist.*

(4) *Ist* $h(t, \varphi)$ *für jedes, in einem Intervall* I *liegenden Wert von* t, *eine Stützfunktion in* φ *und ist* $q(t)$ *eine in* I *nichtnegative Funktion, für welche* $h(t, \varphi)\, q(t)$ *für jedes* φ *über* I *integrierbar ist, so stellt* $\int_I h(t, \varphi)\, q(t)\, dt$ *wiederum eine Stützfunktion dar. Insbesondere ist die Linearkombination von Stützfunktionen mit nicht negativen Koeffizienten eine Stützfunktion.*

(5) *Das Integral der Stützfunktion eines Eibereiches über ein Intervall der Länge* 2π *ergibt den Umfang des Bereiches.*

(3) folgt direkt aus den Definitionen. Was (4) und (5) betrifft, siehe [7], p. 28 und 65.

Beweis des Satzes 1. Die folgende Transitivitätseigenschaft der Schar $K(t)$ ist leicht einzusehen:

(6) *Setzt man* $K(t_1) = K_1$, *so ist* $K_1(t_2 - t_1) = K(t_2)$ *für* $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \varrho_K$.

Wir bezeichnen mit $h(t, \varphi)$ die Stützfunktion von $K(t)$ für $0 \leqq t \leqq \varrho_K$.

Verwendet man (3) mit $K_1 = K(t_1)$, $K_2 = K(t_2)$ und $t = t_2 - t_1$, so erhält man unter Beachtung von (6)

$$h(t_1, \varphi) \geqq h(t_2, \varphi) + t_2 - t_1 \,. \tag{7}$$

Hieraus ergibt sich für $0 < \theta < 1$

$$h(t_1, \varphi) - (1 - \theta)(t_2 - t_1) \geqq \theta\, h(t_1, \varphi) + (1 - \theta)\, h(t_2, \varphi) \,.$$

Die rechte Seite ist nach (4) Stützfunktion eines Eibereiches K'. Gemäss (6) und (3) zieht man aus obiger Ungleichung die Implikation

$$K\big(\theta t_1 + (1 - \theta) t_2\big) = K\big(t_1 + (1 - \theta)(t_2 - t_1)\big) \supset K'.$$

Wendet man (3) mit $K_1 = K(\theta t_1 + (1 - \theta) t_2)$, $K_2 = K'$ und $t = 0$ an, so folgert man hieraus die Ungleichung $h(\theta t_1 + (1 - \theta)\, t_2, \varphi) \geqq \theta\, h(t_1, \varphi) + (1 - \theta)\, h(t_2, \varphi)$. (Der obige Beweis dieser Ungleichung stammt von G. Bol, siehe [3], p. 41.) Integriert man nach φ über $[0, 2\pi]$, so erhält man wegen (5)

$$L_K\big(\theta t_1 + (1 - \theta)\, t_2\big) \geqq \theta\, L_K(t_1) + (1 - \theta)\, L_K(t_2) \,,$$

womit die Konkavität von $L_K(t)$ bewiesen ist.

Die Integration von (6) über $[0, 2\pi]$ liefert

$$- \frac{L_K(t_1) - L_K(t_2)}{t_1 - t_2} \geqq 2\pi \,.$$

(1) ergibt sich hieraus, indem man t_2 gegen t_1 streben lässt.

Beweis des Satzes 2. Man kann sehr leicht einsehen, dass die konvexe Hülle des Einheitskreises und des Punktes $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}, 0\right)$ für $0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ $\max\left(1, \dfrac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\right)$ ist.

Wir bezeichnen mit $\alpha(t)$ die einzige, im Intervall $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ fallende Lösung der Gleichung

$$\varkappa(t) = 2(\pi - \alpha + \operatorname{tg}\alpha) \,.$$

Wegen (2) und der Monotonität von $\varkappa(t)$, ist $\alpha(t)$ eine für jedes $0 \leqq t < \varrho$ definierte, nicht abnehmende Funktion. Wir setzen

$$h(\varphi) = \int_0^\varrho \max\left(1, \frac{\cos\varphi}{\cos\alpha(t)}\right) dt\,.$$

Infolge der Beziehung

$$\frac{1}{\cos\alpha(t)} \leqq \frac{\sin\alpha(t) + \cos\alpha(t)}{\cos\alpha(t)} < \frac{1}{2}\varkappa(t) + 1$$

und der Integrierbarkeit von $\varkappa(t)$, ist $h(\varphi)$ für jedes reelle φ definiert. Nach den oben gesagten ist der Integrand für jedes t eine Stützfunktion, so dass $h(\varphi)$ in Betracht auf (4) die Stützfunktion eines Eibereiches K ist.

Wegen $h(\varphi) \geqq \varrho$ enthält K den um den Ursprung geschriebenen Kreis vom Radius ϱ, so dass

$$(8) \qquad \varrho_K \geqq \varrho$$

ist. K besitzt also innere Punkte; wir werden zeigen, dass seine charakteristische Funktion gleich $\varkappa(t)$ ist. Damit wird der Beweis vollendet.

Infolge (8) ist $K(t)$ für $0 \leqq t < \varrho$ nicht leer; seine Stützfunktion sei $h(t, \varphi)$. Wir setzen noch

$$\tilde{h}(t, \varphi) = \int_t^\varrho \max\left(1, \frac{\cos\varphi}{\cos\tau}\right) d\tau \qquad (0 \leqq t < \varrho)\,.$$

$\tilde{h}(t, \varphi)$ ist, genau wie $h(\varphi)$, Stützfunktion eines Eibereiches, das wir mit K_t bezeichnen. Man hat offenbar

$$(9) \qquad h(\varphi) \geqq \tilde{h}(t, \varphi) + t$$

und in Betracht auf die Monotonität von $\alpha(t)$ auch

$$(10) \qquad h(\varphi) = \tilde{h}(t, \varphi) + t \quad \text{für} \quad \alpha(t) \leqq |\varphi| \leqq \pi\,.$$

Es folgt aus (9) und (3) $K(t) \supset K_t$ und mithin

$$(11) \qquad h(t, \varphi) \geqq \tilde{h}(t, \varphi)\,.$$

(7) ergibt für $t_1 = 0$

$$(12) \qquad h(\varphi) \geqq h(t, \varphi) + t\,.$$

Die Formeln (10), (11) und (12) haben

$$(13) \qquad \tilde{h}(t, \varphi) = h(t, \varphi) \qquad \text{für} \quad \alpha(t) \leqq |\varphi| \leqq \pi$$

zur Folge.

Aus der, für $|\varphi| \leqq \alpha(t)$ gültigen Formel

$$\tilde{h}(t, \varphi) = (\varrho - t)\cos\varphi$$

liest man sofort ab, dass die zu den Richtungswinkeln $\leq \alpha(t)$ gehörigen Stützgeraden von K_t alle durch denselben Punkt $P_t = (\varrho - t, 0)$ der x-Achse gehen. Folglich gehört P_t zu K_t und um so mehr zu $K(t)$. Beachten wir (13), so sehen wir dass die zu den Richtungswinkeln $\varphi = \pm \alpha(t)$ gehörige Stützgeraden von $K(t)$ mit derjenigen von K_t identisch sind, so dass sie sich auch in P_t schneiden. Folglich ist P_t ein Eckpunkt von $K(t)$ und die Stützgeraden von $K(t)$, welche zu Richtungswinkeln $\leq \alpha(t)$ gehören, ebenfalls durch P_t gehen. Das bedeutet, dass für jedes $\varphi \in [-\alpha(t), \alpha(t)]$ die zugehörigen Stützgeraden von K_t und $K(t)$ identisch sind, folglich besteht die Gleichung (13) auch für $|\varphi| \leq \alpha(t)$. Damit haben wir gezeigt, dass die Formel

$$h(t, \varphi) = \int_t^{\varrho} \max\left(1, \frac{\cos\varphi}{\cos\alpha(\tau)}\right) d\tau \qquad (0 \leq t < \varrho)$$

für jedes φ gültig ist.

Wir können jetzt den Umfang von $K(t)$ gemäss (5) berechnen:

$$L_K(t) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t, \varphi)\, d\varphi = 2 \int_t^{\varrho} \int_0^{\pi} \max\left(1, \frac{\cos\varphi}{\cos\alpha(t)}\right) d\varphi\, d\tau =$$

$$= 2 \int_t^{\varrho} \left[\int_0^{\alpha(\tau)} \frac{\cos\varphi}{\cos\alpha(\tau)}\, d\varphi + \int_{\alpha(\tau)}^{\pi} d\varphi \right] d\tau =$$

$$= 2 \int_t^{\varrho} \big(\operatorname{tg}\alpha(\tau) + \pi - \alpha(\tau)\big)\, d\tau = \int_t^{\varrho} \varkappa(\tau)\, d\tau\,.$$

Hieraus ergibt sich durch (rechtseitiges) Differenzieren

$$\varkappa_K(t) = \varkappa(t) \qquad (0 \leq t < \varrho). \tag{14}$$

Da $L_K(t)$ monoton abnimmt und für $t \to \varrho$ gegen 0 strebt, muss sich $K(\varrho)$ auf einen Punkt reduzieren. Folglich ist $\varrho_K = \varrho$ und (14) besagt also die Identität von $\varkappa_K$ und $\varkappa$, w. z. b. w.

(Eingegangen: 22. März, 1962.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] BOL, G.: ,,Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen''. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* **51** (1941) 219–257.

[2] BOL, G.: ,,Einfache Isoperimetriebeweise für Kreis und Kugel''. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität* **15** (1943) 27–36.

[3] BOL, G.: ,,Beweis einer Vermutung von H. Minkowski''. Ibid., 37–56.

[4] RÉNYI, A.: ,,Integral formulae in the theory of convex curves''. *Acta Scientiarum Mathematicarum* **2** (1946–48) 158–166.

[5] HADWIGER, H.: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Springer, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957.

[6] DINGHAS, A.: ,,Bemerkung zu einer Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung durch H. Hadwiger''. *Mathematische Nachrichten* **1** (1948) 284–286.

[7] BONNESEN, T.–FENCHEL, W.: *Theorie der konvexen Körper.* Springer, Berlin, 1934.

О ВНУТРЕННИХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

J. CZIPSZER

Резюме

Пусть K есть ограниченное, замкнутое выпуклое, плоскостное множество с внутренними точками. Обозначим через ϱ максимум радиусов окружностей, которые можно вписать в K. Пусть $0 \leqq t < \varrho$; обозначим через $K(t)$ множество тех точек K, расстояние которых от границы K не меньше t. Как известно, $K(t)$ также замкнутое, выпуклое множество с внутренними точками, его называют внутренней параллельной областью K на расстоянии t. Известно также, что периметр $K(t)$, которую мы обозначим через $L(t)$, есть вогнутая, монотонно убывающая функция, причем

$$\varkappa(t) = -\frac{d}{dt} L(t) \geqq 2\pi .$$

$\left(\text{Здесь } \frac{d}{dt}\right.$ обозначает правую производную. См. [1], [4].$\Big)$ По примеру [4] назовем $\varkappa(t)$ характеристической функцией K. Из сказанного следует, что $\varkappa(t)$ есть определенная в $[0, \varrho)$, монотонно возрастающая, непрерывная справа, интегрируемая функция, которая удовлетворяет неравенству $\varkappa(t) \geqq 2\pi$. В настоящей работе доказывается, что если функция $\varkappa(t)$ обладает этими свойствами, то существует такое ограниченное, замкнутое, выпуклое, плоскостное множество с внутренними точками, характеристическая функция которой есть $\varkappa(t)$.