

**SUR CERTAINES TRANSFORMÉES DES SÉRIES DE PUISSANCE  
ABSOLUMENT CONVERGENTES SUR LA FRONTIÈRE DE LEUR  
CERCLE DE CONVERGENCE**

par  
LÁSZLÓ ALPÁR

**§ 1. Introduction**

Soit  $f_1(z)$  une fonction régulière dans le cercle  $|z| < 1$  et  $\zeta_0 = re^{i\alpha}$  ( $0 < r < 1$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ) un point fixe. La fonction  $f_2(z)$  définie par la relation

$$(1.1) \quad f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z)$$

est alors également régulière pour  $|z| < 1$ . Désignons par

$$(1.2) \quad f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$$

et

$$(1.3) \quad f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(\zeta_0) z^{\nu}$$

leurs séries de puissance respectives développées autour de l'origine.

M. P. TURÁN a démontré [1] que la convergence de la série (1.2) pour  $z = 1$  n'entraîne pas toujours la convergence de la série (1.3) au point correspondant  $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$  solution de l'équation  $\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} = 1$ . En généralisant

le résultat de M. TURÁN nous avons montré [2] que la transformation (1.1) ne conserve pas non plus la sommabilité  $(C, k)$  ( $k > 0$ ). Plus exactement la sommabilité  $(C, k)$  de la série  $\sum_{\nu} a_{\nu}$  assure la sommabilité  $(C, k + 1/2)$  de la série

$\sum_{\nu} b_{\nu}(\zeta_0) \left(\frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}\right)^{\nu}$ , mais elle n'implique pas la sommabilité  $(C, k + \delta)$  de cette dernière si  $\delta < 1/2$ .

Les théorèmes cités portent sur certaines propriétés locales des fonctions  $f_1(z)$  et  $f_2(z)$  et de leurs séries de Taylor respectives. Plus récemment nous avons obtenu [3] un théorème qui concerne le comportement des séries (1.2) et (1.3) sur la circonférence  $|z| = 1$  et qui s'énonce comme suit:

**Théorème 1.** — *Étant donné un point fixe  $\zeta_0$  ( $0 < |\zeta_0| < 1$ ), on peut trouver des fonctions  $f_1(z)$  régulières pour  $|z| < 1$  se développant en séries de puissance  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$  absolument convergentes pour  $|z| = 1$ , c'est-à-dire*

$$(1.4) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\nu}| = a < \infty,$$

telles que les séries de puissance définies par la relation

$$f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(\zeta_0) z^{\nu}$$

ne soient pas absolument convergente pour  $|z| = 1$ , donc telles que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_{\nu}(\zeta_0)| = \infty .^1$$

Nous nous proposons d'étudier dans cet ouvrage le problème suivant qui se rattache au théorème 1: La relation (1.4) supposée vérifiée, entraîne-t-elle pour  $|z| = 1$  la convergence ordinaire de la série (1.3)? La réponse affirmative s'exprime par le théorème ci-dessous:

**Théorème 2.** — Soient  $f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$  une fonction régulière pour  $|z| < 1$ ,

$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\nu}| < \infty$ ,  $\zeta_0$  ( $0 < |\zeta_0| < 1$ ) un point fixe,  $|z_1| = 1$ ,  $|z_2| = 1$  deux points liés par la relation

$$(1.5) \quad z_1 = \frac{z_2 - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z_2}.$$

Alors la série de puissance obtenue par la transformation

$$f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(\zeta_0) z^{\nu}$$

est uniformément convergente sur la circonférence  $|z| = 1$  et

$$(1.6) \quad f_1(z_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} z_1^{\nu} = f_2(z_2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(\zeta_0) z_2^{\nu}.$$

Si, considérant la relation (1.6), on compare les théorèmes 1 et 2, on peut constater l'existence des couples de fonctions, telles que  $f_1(z)$  et  $f_2(z)$ , admettant les mêmes valeurs dans la même succession lorsque  $z_1$  et  $z_2$ , liés par (1.5), parcourent la circonférence  $|z| = 1$ , et malgré cela  $f_1(z)$  est représentée par une série de puissance absolument convergente pour  $|z| = 1$ , tandis que la série entière qui représente  $f_2(z)$  n'est pas absolument, mais seulement uniformément convergente pour  $|z| = 1$ . Des séries de puissance d'un tel genre, qui sont uniformément mais non absolument convergente sur la frontière de leur cercle de convergence, ont été déjà trouvées par G. H. HARDY ([4], pp. 157—160), et d'après une conjecture de L. FEJÉR par M. RIESZ et par FEJÉR lui-même ([5], pp. 48—50). Néanmoins les séries faisant l'objet de leurs recherches, ne sont pas en relation avec une autre série de Taylor qui, sur la frontière de son cercle de convergence, est absolument convergente.

<sup>1</sup> La note [3] étant rédigée en hongrois, nous avons tenu opportun de reprendre, dans le § 2, la démonstration du théorème 1.

Ces réflexions nous ont amenés à chercher l'inverse du théorème 2 et à soulever la question suivante: À partir des séries de puissance convenables absolument convergentes sur la frontière de leurs cercles de convergence, peut-on faire dériver au moyen d'une transformation du type (1.1) chaque série de puissance uniformément mais non absolument convergente sur la frontière de son cercle de convergence, ou bien l'ensemble des séries de la seconde espèce se subdivise en deux catégories: l'une contenant les séries qui s'obtiennent par une telle transformation, l'autre les série qu'on ne peut déduire de cette façon? Comme  $\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}$  et sa fonction inverse ont la même

structure, la question posée peut être formulée d'une autre manière encore: Désignons par  $f_1(z)$  une fonction régulière pour  $|z| < 1$  dont la série de Taylor est uniformément mais non absolument convergente pour  $|z| = 1$ . Peut-on donner pour chaque  $f_1(z)$  un nombre complexe  $\zeta_0$  ( $0 < |\zeta_0| < 1$ ) tel que le développement Taylorien de la fonction  $f_2(z)$  obtenue par la transformation (1.1) soit absolument convergent pour  $|z| = 1$ , ou bien existe-t-il des fonctions  $f_1(z)$  pour lesquelles on ne peut pas trouver de tel  $\zeta_0$ ? La réponse est formulée par le théorème suivant:

**Théorème 3.** — *Il existe des fonctions  $f_1(z)$  régulières pour  $|z| < 1$ , se développant en une série de puissance  $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$  uniformément mais non absolument convergente pour  $|z| = 1$  et qui se change par la transformation  $f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right)$  en une fonction  $f_2(z)$  dont la série de puissance  $\sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) z^v$  n'est absolument convergente sur la circonférence  $|z| = 1$  pour aucune valeur de  $\zeta_0$  ( $0 < |\zeta_0| < 1$ ).<sup>2</sup>*

Pour démontrer le théorème 1, on établira

$$(1.7) \quad b_n(\zeta_0) = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv}(\zeta_0) a_v,$$

où les quantités  $\gamma_{nv}(\zeta_0)$  sont indépendantes du choix spécial de  $f_1(z)$ . L'expression (1.7) représente un procédé de sommation linéaire et on démontrera que la matrice  $[\gamma_{nv}(\zeta_0)]$  ne remplit pas les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle transforme chaque série absolument convergente en une série absolument convergente (§ 2).

La démonstration du théorème 2 est plus compliquée: Selon (1.7)

$$(1.8) \quad b_n(\zeta_0) z_2^n = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv}(\zeta_0, z_1) (a_v z_1^v)$$

où  $\gamma_{nv}(\zeta_0, z_1) = \gamma_{nv}(\zeta_0) z_1^{-v} z_2^n$ . L'expression (1.8) définit également un procédé de sommation linéaire qui doit transformer la série absolument convergente  $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z_1^v$  dans la série convergente  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z_2^n$ . Il sera démontré que la matrice

<sup>2</sup> J'avais communiqué ma conjecture concernant l'existence de deux sortes des séries de puissance en question à M. P. ERDŐS qui en a fait part dans une lettre à M. G. PIRANIAN. Dans sa réponse, M. PIRANIAN a déjà exposé une démonstration intéressante du théorème 3 qu'on lira dans le § 8.

$\mathcal{M} = [\gamma_{nv}(\zeta_0, z_1)]$  jouit de cette propriété. À cet effet on donnera aux éléments de  $\mathcal{M}$  une forme plus adéquate au calcul (§ 3). On établira ensuite le lemme 1 qui fournira les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice infinie transforme toute série absolument convergente en une série convergente (§ 4). On vérifiera dans les §§ 5 et 6 que  $\mathcal{M}$  satisfait aux conditions établies dans le § 4.

Le § 5 contient deux lemmes permettant de majorer  $|\gamma_{nv}(\zeta_0, z_1)|$ . On montrera d'abord (lemme 2) que  $|\gamma_{nv}(\zeta_0, z_1)| = O(v^{-1/3})$  uniformément en  $z_1$  et  $n$ , et l'on prouvera ensuite (lemme 3) que  $|\gamma_{nv}(\zeta_0, z_1)| = O(v^{-1/3-\varepsilon/2})$  uniformément en  $z_1$  et  $n$  si  $\left| \frac{n}{v} - \frac{1+r}{1-r} \right| \left| \frac{n}{v} - \frac{1-r}{1+r} \right| \geq c_2 v^{-2/3+2\varepsilon}$ , où  $c_2$  est une constante indépendante de  $n$  et  $v$ , et  $\varepsilon \in [0, 1/3]$  désigne un paramètre. Le lemme 3 sera démontré à l'aide de la méthode du col en discutant les différentes formes et positions des courbes de niveau de la fonction  $\left| \left( \frac{w-r}{1-rw} \right)^v w^{-n} \right|$  qui varie avec  $\lambda = \frac{n}{v}$ . Un changement de variable permettra de ramener les cas où  $\lambda < 1$  à ceux où  $\lambda \geq 1$ . Nous aurons à évaluer l'intégrale

$$(1.9) \quad \gamma_{nv}(r_1, 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\lambda} \left( \frac{w-r}{1-rw} \right)^v \frac{dw}{w^{n+1}},$$

où  $L_\lambda$  est une courbe fermée qui entoure l'origine et passe, suivant le cas, par un ou deux cols, notés  $w_1$  et  $w_2$ . L'application de la méthode du col se heurte à des obstacles lorsque  $w_1 = w_2 = 1$  ou bien si  $w_1 - 1 \rightarrow 0$  et  $w_2 - 1 \rightarrow 0$  avec  $v \rightarrow \infty$ . C'est ce qui arrive si  $\left| \lambda - \frac{1+r}{1-r} \right|$  s'anule ou tend vers zéro avec  $v \rightarrow \infty$ .

Le § 5 prépare les calculs effectués dans le § 6. Le point essentiel de notre démonstration est d'établir que les sommes partielles  $\sigma_{mv}(\zeta_0, z_1) = \sum_{n=0}^m \gamma_{nv}(\zeta_0, z_1)$  sont uniformément bornées en  $z_1$ ,  $m$  et  $v$ . Ce qui revient à prouver que les intégrales

$$(1.10) \quad I_{mv} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\lambda} \left( \frac{w-r}{1-rw} \right)^v \frac{dw}{w^{m+1}(w-e^{i\beta})}$$

sont uniformément bornées en  $\beta$ ,  $m$  et  $v$ , où  $\lambda = \frac{m}{v}$ ,  $L_\lambda$  désigne le contour qui figure dans (1.9) et  $0 \leq \beta \leq 2\pi$  est un angle qui ne dépend que de  $z_1$ . Les difficultés proviennent maintenant de deux circonstances: la coïncidence ou le rapprochement indéfini des deux cols cause des inconvénients déjà mentionnés; il arrive de plus, si  $\beta \neq 0$ , que pour certaines valeurs de  $\lambda$  l'un des cols, soit p.e.  $w_1$ , coïncide avec le pôle  $e^{i\beta}$  ou bien que  $w_1 - e^{i\beta} \rightarrow 0$  avec  $v \rightarrow \infty$ ; si  $\beta = 0$  les mêmes cas se produisent simultanément avec les deux cols, mais ce fait ne soulève pas des complications particulières. Lorsque  $\left| \lambda - \frac{1+r}{1-r} \right| = O(v^{-2/3})$ , en appliquant le lemme 2, un calcul direct fournira la borne supé-

rieure de  $\sigma_{mv}(\zeta_0, z_1)$ . Si, pour  $\left| \lambda - \frac{1+r}{1-r} \right| \geq c_2 v^{-2/3+2\epsilon}$ , on a  $w_1 - e^{i\beta} = 0$  ou  $w_1 - e^{i\beta} \rightarrow 0$  ( $v \rightarrow \infty$ ), on procédera d'une manière analogue en s'appuyant sur le lemme 3.

Nous avons déjà étudié dans notre ouvrage [2] (III, p. 102) l'intégrale

$$g_{vn} = \frac{c_v^{(k+\delta)}}{2\pi i} \frac{\binom{n+k}{k}}{\binom{v+k+\delta}{k+\delta}} \int_{L_{vn}} \frac{(1 + \bar{\zeta}_0 \omega)^{k+\delta} \omega^n}{(1 - \omega)^\delta (\omega + \zeta_0)} \left( \frac{1 + \bar{\zeta}_0 \omega}{\omega + \zeta_0} \right)^v d\omega,$$

analogue à  $I_{mv}$ , où  $k \geq 0$ ,  $0 < \delta < 1$  sont des constantes,  $|c_v^{(k+\delta)}|$  une quantité bornée et  $L_{vn}$  un contour d'intégration contenant le pôle  $\omega = -\zeta_0$ . En outre cette intégrale ne devait être considérée que pour les  $n$  et  $v$  satisfaisant à la double inégalité

$$(1.11) \quad \frac{1-r}{1+r} + \frac{1}{\log v} + \frac{v'_v + 1}{v} \leq \frac{n}{v} = \lambda \leq \frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{\log v} - \frac{v_v + 1}{v}$$

( $0 \leq v_v < 1$ ,  $0 < v'_v \leq 1$ ). Au cours de l'évaluation de  $g_{vn}$  nous avons rencontré les mêmes difficultés que nous venons de mentionner en esquisant le calcul de  $I_{mv}$ , mais en comparant les expressions de  $I_{mv}$ , et  $g_{vn}$ , et vu l'inégalité (1.11) on aperçoit qu'il faut tenir compte encore des circonstances suivantes:

(1.10) ne contient pas le facteur  $\binom{n+k}{k} \binom{v+k+\delta}{k+\delta}^{-1} = O(v^{-\delta})$ ; l'exposant

qui figure dans (1.10) correspondant à  $\delta$  est égale à 1; dans le cas de  $g_{vn}$  on a selon (1.11)  $\frac{1+r}{1-r} - \lambda > \frac{1}{\log v}$  tandis que dans le cas considéré  $\left| \lambda - \frac{1+r}{1-r} \right| \geq \geq c_2 v^{-2/3+2\epsilon}$ . D'autre part, le fait que nous cherchons seulement une borne supérieure de  $|I_{mv}|$  indépendante de  $\beta$ ,  $m$  et  $v$  et non sa valeur asymptotique, comme dans le cas de  $g_{vn}$ , nous offre certaines facilités.

La convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z_2^n$  étant ainsi prouvée, la relation (1.6) est imédiate. On montrera encore (§ 7) que cette série est aussi uniformément convergente pour  $|z_2| = 1$ .

Enfin le théorème 3 sera établi en s'appuyant sur la théorie des représentations conformes (§ 8).

\* \*

Les symboles  $O$  et  $o$  seront employés dans le sens de  $v \rightarrow \infty$ . On désignera de plus par  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) ou bien des constantes numériques positives ou bien des quantités bornées de la forme

$$(1.12) \quad c_j = c_j(v, \epsilon) = c_j^* + c_j^{**}(v, \epsilon) = c_j^* + O(1) > 0,$$

où  $c_j^*$  est une constante numérique positive.

### § 2. Démonstration du théorème 1

Les relations (1.1) et (1.3) permettent d'écrire

$$(2.1) \quad b_n(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_I f_1 \left( \frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} \right) \frac{dz}{z^{n+1}},$$

où  $l$  est une courbe simple fermée entourant l'origine tracée dans le cercle  $|z| < 1$ . Remplaçons dans (2.1)  $f_1(z)$  par sa série de Taylor donnée sous (1.2):

$$(2.2) \quad b_n(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \left( \frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} \right)^{\nu} \right\} \frac{dz}{z^{n+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}(\zeta_0) a_{\nu},$$

où

$$(2.3) \quad \gamma_{n\nu}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \left( \frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} \right)^{\nu} \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

L'expression (2.2) représente le procédé de sommation cherché déjà signalé sous (1.7). Il nous faut trouver un critère permettant de décider si ce procédé transforme la série  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$  absolument convergente en la série absolument convergente

$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu}(\zeta_0)$ . Ce critère est fourni par le théorème suivant dû à K. KNOPP et G. G. LORENTZ ([6], p. 11, Satz 1):

Soit  $[\gamma_{n\nu}]$  une matrice infinie ( $n = 0, 1, 2, \dots; \nu = 0, 1, 2, \dots$ ). Pour que  $[\gamma_{n\nu}]$  transforme toute série  $\sum_{\nu=0}^{\infty} x_{\nu}$  absolument convergente en la série absolument convergente  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ , où

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu} x_{\nu} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

il faut et il suffit qu'il existe une constante  $K > 0$  vérifiant l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}| \leq K. \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

On démontrera que, dans le cas considéré, il n'existe aucune constante  $K > 0$  qui satisfait à l'inégalité

$$(2.4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n\nu}(\zeta_0)| \leq K \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

En effet, la relation (2.3) signifie que

$$(2.5) \quad \left( \frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} \right)^{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n\nu}(\zeta_0) z^n.$$

Des fonctions du type  $\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}$  ont été étudiées par M. B. M. BAJŠANSKI ([7], pp. 142–144, Théorème 3) lequel a obtenu le résultat suivant:

Soit

- 1)  $f(z)$  une fonction holomorphe pour  $|z| < R$ ,  $R > 1$ ;
- 2)  $f(z) = 1$  pour  $|z| = 1$ ;
- 3)  $f(z) \neq e^{i\theta} z^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Alors, en posant

$$[f(z)]^\nu = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\nu n} z^n,$$

on aura

$$(2.6) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{\nu n}| = \infty.$$

La fonction  $\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}$  remplit les conditions 1), 2), 3) et il résulte ainsi de (2.5) et (2.6) que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{\nu n}(\zeta_0)| = \infty.$$

Par conséquent il n'existe pas de constante  $K$  vérifiant (2.4) pour chaque  $\nu$ . Il y a donc des séries  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$  absolument convergentes qui se transforment par  $[\gamma_{\nu n}(\zeta_0, z_1)]$  en des séries non absolument convergentes  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0)$ . Le théorème 1 est ainsi établi.

### § 3. Expression des éléments de $\mathcal{M}$

Le procédé de sommation (1.8) s'écrit sans plus sous une forme plus explicite à l'aide de (2.2) et (2.3):

$$(3.1) \quad b_n(\zeta_0, z_2^n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{z_1^{-\nu} z_2^n}{2\pi i} \int_l \left( \frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} \right)^\nu \frac{dz}{z^{n+1}} \right\} (a_\nu z_1^\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{\nu n}(\zeta_0, z_1) a_\nu z_1^\nu.$$

En prenant pour  $l$  la circonférence  $|z| = 1$ , on aura

$$(3.2) \quad \gamma_{\nu n}(\zeta_0, z_1) = \frac{z_1^{-\nu} z_2^n}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left( \frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z} \right)^\nu \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

C'est l'expression (3.2) qui doit prendre une forme un peu différente plus propice à nos calculs. Étant donné que  $\zeta_0 = re^{i\alpha}$ , posons  $z = e^{i\alpha} w$  dans (3.2):

$$(3.3) \quad \gamma_{\nu n}(\zeta_0, z_1) = \frac{e^{i(n-\nu)\alpha}}{2\pi i} \frac{z_2^n}{z_1^\nu} \int_{|w|=1} \left( \frac{w - r}{1 - rw} \right)^\nu \frac{dw}{w^{n+1}}.$$

On en tire

$$(3.4) \quad |\gamma_{\nu n}(\zeta_0, z_1)| = |\gamma_{\nu n}(r, 1)| \leq 1.$$

### § 4. Transformation des séries absolument convergentes en séries convergentes

La démonstration du théorème 2 consiste à prouver que la matrice  $\mathcal{M} = [\gamma_{\nu n}(\zeta_0, z_1)]$  transforme toute série absolument convergente en une série convergente. C'est dans ce but que nous allons établir le lemme suivant:

**Lemme 1. — A.** — Soit  $[\gamma_{nv}]$  une matrice infinie ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $v = 0, 1, 2, \dots$ ) et

$$\sigma_{mv} = \sum_{n=0}^m \gamma_{nv}.$$

Pour que  $[\gamma_{nv}]$  transforme toute série  $\sum_{v=0}^{\infty} x_v$  absolument convergente en une série convergente  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ , où

$$(4.1) \quad y_n = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv} x_v \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

il faut et il suffit

I. que

$$(4.2) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_{mv} = \sigma_v \quad (v = 0, 1, 2, \dots)$$

existe;

II. que l'on ait une constante  $K > 0$  vérifiant l'inégalité

$$(4.3) \quad |\sigma_{mv}| \leq K \quad (m = 0, 1, 2, \dots; v = 0, 1, 2, \dots).$$

**B.** — En supposant de plus

III. que l'on ait

$$(4.4) \quad \sigma_v = 1 \quad (v = 0, 1, 2, \dots),$$

alors

$$(4.5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{v=0}^{\infty} x_v,$$

donc le procédé de sommation (4.1) est aussi permanent.

**Démonstration.** — On se servira du fait que l'ensemble des suites  $x = \{x_v\}$  dont chacune est formée à partir des termes d'une série absolument convergente constitue un espace de Banach  $B$  avec la norme  $\|x\| = \sum_{v=0}^{\infty} |x_v|$ .

1° Les conditions sont suffisantes. — Supposons d'abord que les conditions I et II et ensuite III sont réalisées. Leur suffisance résulte directement du théorème suivant de S. BANACH et H. STEINHAUS ([8], p. 79, Théorème 3):<sup>3</sup>

*Si une suite de fonctionnelles linéaires  $\{U_n(x)\}$  définie dans l'espace  $E$  est convergente dans un ensemble  $G$  qui est dense dans une sphère  $S$  et si la suite des normes  $\{\|U_n\|\}$  est bornée, la suite des fonctionnelles  $\{U_n(x)\}$  est convergente dans l'espace  $E$  tout entier.*

Les sommes partielles de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$  définissent une suite de fonc-

<sup>3</sup> Dans ce qui suit on désigne par  $E$  un espace de Banach.

tionnelles linéaires  $\{U_m(x)\}$  dans l'espace  $B$ , soit

$$(4.6) \quad \sum_{n=0}^m y_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_{m\nu} x_{\nu} = U_m(x).$$

En effet,  $\|U_m\| = \sup_{\nu} |\sigma_{m\nu}|$  (cf. [8], p. 67), d'où, d'après (4.3),  $\|U_m\| \leq K$ .

D'autre part les suites  $x' = \{x'_{\nu}\}$  qui ne contiennent qu'un nombre fini de termes différentes de zéro forment un ensemble partout dense dans  $B$  et en vertu de (4.2) la suite des fonctionnelles linéaires  $\{U_m(x')\}$  est convergente dans  $G$ . La suite de fonctionnelles  $\{U_m(x)\}$  est donc convergente dans l'espace  $B$  tout entier, et l'on a pour tout  $x \in B$

$$(4.7) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} U_m(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sigma_{\nu} x_{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Les conditions I et II sont donc suffisantes.

Si en outre (4.4) subsiste aussi, la relation (4.5) est une conséquence immédiate de (4.7).

2° *Les conditions sont nécessaires.*  $\Leftarrow$  Supposons maintenant que  $[\gamma_{n\nu}]$  transforme chaque série absolument convergente en une série convergente.

Envisageons en premier lieu la suite particulière  $x = \{x_{\nu}\}$  où  $x_{\nu} = 0$  si  $\nu \neq \mu$  et  $x_{\mu} = 1$ . On a alors  $y_n = \gamma_{n\mu}$ ,  $\sum_{n=0}^m y_n = \sigma_{m\mu}$  et il s'ensuit, par hypothèse, que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m y_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_{m\mu} = \sigma_{\mu}$$

existe. En posant  $\mu = 0, 1, 2, \dots$ , on constate que la condition I se trouve vérifiée.

La nécessité de la condition II découle d'un autre théorème de S. BANACH et H. STEINHAUS ([8], p. 80, Théorème 5):

*Étant donnée dans  $E$  une suite  $\{U_n(x)\}$  de fonctionnelles linéaires telles que  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |U_n(x)| < \infty$  pour tout  $x \in E$ , la suite des normes  $\{\|U_n\|\}$  est bornée.*

Montrons d'abord que  $U_m(x)$  définie par (4.6) est une fonctionnelle linéaire dans  $B$ . La condition I étant remplie, on a  $|\sigma_{m\nu}| < \infty$  pour chaque  $\nu < \infty$ . On en déduit, en posant

$$U_{m\mu}(x) = \sum_{\nu=0}^{\mu} \sigma_{m\nu} x_{\nu}, \quad \|U_{m\mu}\| = \sup_{\nu \leq \mu} |\sigma_{m\nu}| \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots),$$

que  $\{U_{m\nu}(x)\}$  est une suite de fonctionnelles linéaires dans  $B$ . Selon l'hypothèse, on a  $\overline{\lim}_{\mu \rightarrow \infty} |U_{m\nu}(x)| = |U_m(x)| < \infty$  pour tout  $x \in B$ . Il résulte ainsi du théorème cité que la suite des normes  $\{\|U_{m\nu}\|\}$  est bornée pour chaque  $m < \infty$  et  $\|U_m\| = \sup_{\nu} |\sigma_{m\nu}| < \infty$ .

Appliquons ensuite le théorème invoqué à la suite de fonctionnelles linéaires  $\{U_m(x)\}$ . On a, par hypothèse,  $\lim_{m \rightarrow \infty} |U_m(x)| = |U(x)| < \infty$  pour tout  $x \in B$ .

Par conséquent la suite des normes  $\{\|U_m\|\}$  est bornée, donc  $\sup |\sigma_{mv}| = \|U_m\|$  est uniformément bornée en  $m$  et  $v$ . La condition II est aussi nécessaire.

On en conclut enfin que si le procédé (4.1) est permanent,  $\sigma_v = 1$  pour  $v = 0, 1, 2, \dots$ . La condition III doit donc être remplie.

Remarquons encore que par la suite nous n'utiliseront que la suffisance des conditions du lemme 1.

### § 5. Majoration des éléments de $\mathcal{M}$

La relation (3.4) montre déjà que les quantités  $|\gamma_{nv}(\zeta_0, z_1)|$  sont uniformément bornées, mais ce résultat est insuffisant pour ce qui suit. Dans le but d'en donner une meilleure estimation nous établirons deux lemmes.

**Lemme 2.** — *On a*

$$(5.1) \quad |\gamma_{nv}(\zeta_0, z_1)| = O(v^{-1/3})$$

uniformément en  $z_1$  et  $n$ .

**Démonstration.** — Il résulte de (3.4) qu'il suffit d'évaluer  $|\gamma_{nv}(r, 1)|$ . Posons dans la formule (3.3)

$$w = e^{i\varphi}, \quad \frac{w-r}{1-rw} = e^{i\theta(\varphi)};$$

nous obtenons:

$$(5.2) \quad \pi |\gamma_{nv}(r, 1)| = \left| \int_{\pi}^{2\pi} e^{i[v\theta(\varphi) - n\varphi]} d\varphi \right| \leq \left| \int_{\pi}^{\pi+v^{-1/3}} \right| + \left| \int_{\pi+v^{-1/3}}^{2\pi-v^{-1/3}} \right| + \left| \int_{2\pi-v^{-1/3}}^{2\pi} \right| = I_1 + I_2 + I_3.$$

Il est évident que

$$(5.3) \quad I_1 + I_3 \leq 2v^{-1/3}.$$

Pour majorer  $I_2$  nous appliquons le lemme suivant de VAN DER CORPUT ([9], pp. 116—117): *Si la fonction  $u(\varphi)$ ,  $a \leq \varphi \leq b$ , a une dérivée croissante, et si  $u''(\varphi) \geq \kappa > 0$ , où  $\kappa$  est une constante, alors*

$$(5.4) \quad \left| \int_a^b e^{i\nu u(\varphi)} d\varphi \right| \leq \frac{2}{\pi} (\kappa\nu)^{-1/2}.$$

Dans notre cas  $u(\varphi) = \theta(\varphi) - \frac{n}{v}\varphi$  et

$$u''(\varphi) = - \frac{2r(1-r^2)\sin\varphi}{(1-2r\cos\varphi+r^2)^2}.$$

Par conséquent  $u''(\varphi) \geq c_1 v^{-1/3} = \kappa$  pour  $\varphi \in [\pi + v^{-1/3}, 2\pi - v^{-1/3}]$ . On tire ainsi de (5.2) et (5.4)

$$(5.5) \quad I_2 = O(v^{-1/3})$$

uniformément en  $z_1$  et  $\nu$ . La proposition du lemme 2 se trouve ainsi vérifiée par (5.3), (5.5) et (5.2).

Nous aurons besoin encore d'une meilleure estimation de  $|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)|$  que celle donnée sous (5.1). À cet effet nous démontrons un autre lemme.

**Lemme 3.** — Soit  $\frac{n}{\nu} = \lambda$  et  $0 \leq \varepsilon \leq 1/3$ . Alors, si l'inégalité

$$(5.6) \quad \left| \lambda - \frac{1+r}{1-r} \right| \left| \lambda - \frac{1-r}{1+r} \right| \geq c_2 \nu^{-2/3+2\varepsilon}$$

est vérifiée, il existe un contour d'intégration particulier  $L_\lambda$  tel que

$$(5.7) \quad |\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)| \leq \Gamma_{n\nu} = \frac{2}{2\pi} \int_{L_\lambda} \left| \frac{w-r}{1-rw} \right|^\nu \frac{|dw|}{|w|^{n+1}} = O(\nu^{-1/3-\varepsilon/2})$$

uniformément en  $z_1$  et  $n$ .

**Démonstration.** — La relation (5.7) s'établit facilement si  $\lambda$  est suffisamment grand ou suffisamment petit. En effet, désignons par  $\varrho$  et  $\varrho_1$  deux constantes:  $1 < \varrho < r^{-1}$ ,  $r < \varrho_1 < 1$ ; dans la formule (3.3) on peut remplacer le contour d'intégration  $|w| = 1$  par la circonférence  $|w| = \varrho$  resp.  $|w| = \varrho_1$ . Les relations

$$|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)| \leq \left( \varrho^{-\lambda} \max_{|w|=\varrho} \left| \frac{w-r}{1-rw} \right| \right)^\nu, \quad |\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)| \leq \left( \varrho_1^{-\lambda} \max_{|w|=\varrho_1} \left| \frac{w-r}{1-rw} \right| \right)^\nu$$

sont alors immédiates. Il existe donc trois nombres positifs  $\delta = \delta(\varrho, \varrho_1) < 1$ ,  $\lambda(\varrho) > 1$  et  $\lambda(\varrho_1) < 1$  tels que pour  $\lambda \geq \lambda(\varrho)$  ou  $\lambda \leq \lambda(\varrho_1)$

$$(5.8) \quad |\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)| \leq \Gamma_{n\nu} < \delta^\nu.$$

L'inégalité (5.8) entraîne (5.7). La circonférence  $|w| = \varrho$  resp.  $|w| = \varrho_1$  représente maintenant la courbe  $L_\lambda$ .

Il reste à examiner les cas où  $\lambda(\varrho_1) < \lambda < \lambda(\varrho)$ . Fixons, une fois pour toute,  $\lambda(\varrho)$  et  $\lambda(\varrho_1)$ .  $\lambda$  est ainsi compris entre deux constantes positives indépendantes de  $n$  et  $\nu$ . Ce fait permettra une réduction de plus. Nous allons voir que les cas où  $\lambda < 1$  se ramènent à ceux où  $\lambda \geq 1$ . Pour cette fin, posons dans (3.3)  $(w-r)(1-rw)^{-1} = \omega^{-1}$ , nous obtenons

$$(5.9) \quad \gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1) = (1-r^2) \frac{e^{i(\nu-n)\alpha} z_1^n}{2\pi i z_1^\nu} \int_{|\omega|=1} \left( \frac{\omega+r}{1+r\omega} \right)^{n-1} \frac{d\omega}{\omega^\nu (1+r\omega)^2}.$$

Cette intégrale s'anulant pour  $\nu = 0$  se calcule facilement pour  $n \leq 1$ . Lorsque  $n > 1$  nous allons majorer  $|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)|$  en évaluant  $\left| \left( \frac{\omega+r}{1+r\omega} \right)^{n-1} \omega^{-\nu} \right|$  et en intégrant le long d'un contour d'intégration convenablement choisi sur lequel  $|1+r\omega|^{-2}$  est une quantité bornée. Abstraction faite donc du facteur  $(1+r\omega)^{-2}$  les intégrales intervenant dans les formules (3.3) et (5.9) sont de la même structure, toutefois avec la différence que les rôles des paramètres

$n$  et  $\nu$  sont interchangés. En conséquence, si (5.7) est déjà démontrée pour  $1 \leq \lambda < \lambda(\varrho)$ , on a  $|\gamma_{n\nu}(\zeta_0, z_1)| = O(n^{-1/3-\varepsilon/2})$  pour  $\lambda(\varrho) < \lambda < 1$ , et cette dernière relation est équivalente à (5.7), puisque  $n = \lambda\nu$ . En tenant compte de plus de l'inégalité (5.8), seuls les cas où  $1 \leq \lambda < \lambda(\varrho)$  sont à étudier.

Cela étant,  $\lambda - \frac{1-r}{1+r} \geq \frac{2r}{1-r}$ , et la condition (5.6) se réduit à

$$(5.10) \quad \left| \lambda - \frac{1+r}{1-r} \right| \geq c_2 \nu^{-2/3+2\varepsilon}.$$

L'intégrale qui figure dans l'expression (3.3) est du type

$$(5.11) \quad J_\nu = \int_L h(w) [F(w)]^\nu dw = \int_L h(w) e^{\nu f(w)} dw.$$

Lorsque  $\nu \rightarrow \infty$ , la valeur asymptotique de  $J_\nu$  peut être déterminée par la méthode du col ([10], pp. 77—101) si certaines conditions sont remplies. L'élément essentiel de cette méthode consiste à choisir convenablement le contour d'intégration dans le domaine de régularité  $D$  de la fonction à intégrer. La méthode du col peut être brièvement décrite de la manière suivante: 1) Les cols en question se trouvent parmi les racines de l'équation  $f'(w) = 0$  qui appartiennent à  $D$ . 2) Soit  $w_1 \in D$  une de ces racines. La courbe de niveau  $G(w_1)$ , donnée par l'équation

$$(5.12) \quad |F(w)| = |F(w_1)| = c_3 \text{ resp. } \operatorname{Re} f(w) = \operatorname{Re} f(w_1) = \log c_3,$$

divise  $D$  en deux domaines partiels  $D_1$  et  $D_2$  tels que

$$(5.13) \quad \begin{aligned} |F(w)| < c_3 \text{ resp. } \operatorname{Re} f(w) < \log c_3, & \text{ si } w \in D_1, \\ |F(w)| > c_3 \text{ resp. } \operatorname{Re} f(w) > \log c_3, & \text{ si } w \in D_2. \end{aligned}$$

3)  $G(w_1)$  a un point double en  $w_1$  où elle se coupe sous un angle droit. 4)  $L$  passant par  $w_1$  est tracée en  $D_1$ ;  $|F(w)|$  atteint donc sur  $L$  son maximum absolu en  $w_1$ . 5) Il est avantageux que  $L$  soit tangente en  $w_1$  à la droite  $t_1$  (l'axe du col  $w_1$ ), bissectrice de l'angle formé par les deux tangentes tracées en  $w_1$  à  $G(w_1)$  et dont un segment appartient à  $D_1$  au voisinage de  $w_1$ .

Si un tel choix de  $L$  est possible, de plus si  $F(w)$  resp.  $f(w)$  ainsi que  $h(w)$  sont indépendantes de  $\nu$ , si enfin  $f''(w_1) \neq 0$ , alors en désignant par  $\tau_1$  l'angle compris entre  $t_1$  et l'axe réel, on a

$$(5.14) \quad J_\nu = h(w_1) e^{\nu f(w_1) + i \tau_1} \left( \frac{2\pi}{\nu |f''(w_1)|} \right)^{1/2} \{1 + O(\nu^{-1})\}.$$

Si pour une raison quelconque  $L$  doit passer par plusieurs cols, la valeur asymptotique de  $J_\nu$  s'obtient comme la somme d'expressions analogues à (5.14).

Dans notre problème l'intégrale contenue par la formule (3.3) concrétise l'expression générale (5.11). D'après (3.4) il suffit de nous occuper de l'intégrale

$$(5.15) \quad \gamma_{n\nu}(r_1, 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left( \frac{w-r}{1-rw} \right)^\nu \frac{dw}{w^{n+1}}.$$

La courbe fermée  $L$  entoure le pôle  $w = 0$ , mais elle ne renferme pas le point  $w = r^{-1}$ . L'application de la formule (5.14) à l'intégrale (5.15) exige le choix préalable des fonctions  $F(w)$  resp.  $f(w)$  et  $h(w)$ , la détermination du col (ou des cols), le calcul des quantités  $h(w_1)$ ,  $f(w_1)$ ,  $|f''(w_1)|$ ,  $\tau_1$  et la construction de la courbe  $L$ . Soient

$$(5.16) \quad F(w) = w^{-\lambda} \frac{w-r}{1-rw}, \quad f(w) = \log \left( w^{-\lambda} \frac{w-r}{1-rw} \right),$$

$$h(w) = w^{-1},$$

où  $w^{-\lambda}$  est compté avec sa détermination principale. On a ainsi

$$(5.17) \quad f'(w) = -\frac{\lambda}{w} + \frac{1}{w-r} + \frac{r}{1-rw} =$$

$$= \frac{r\lambda w^2 - [(1+r^2)\lambda - (1-r^2)]w + r\lambda}{w(w-r)(1-rw)},$$

d'où les racines de l'équation  $f'(w) = 0$ :

$$(5.18) \quad w_{1,2} = \frac{1}{2r\lambda} \left\{ (1+r^2)\lambda - (1-r^2) \pm (1-r^2) \left( \lambda - \frac{1+r}{1-r} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \lambda - \frac{1-r}{1+r} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

On voit que les cols ne dépendent pas directement de  $n$  ou de  $r$  mais seulement de  $\lambda$  et l'on peut écrire  $w_{1,2} = w_{1,2}(\lambda)$ . La courbe  $L$ , qui doit passer (au moins) par un de ces cols, varie donc avec  $\lambda$  et pour cette raison on la désignera par  $L_\lambda$ .

On voit de (5.18) que pour  $\lambda > \frac{1+r}{1-r}$  les cols sont réels, et comme  $w_1 w_2 = 1$  (cf. (5.17)),  $w_1$  est le conjugué de  $w_2$  par rapport à la circonférence  $|w| = 1$ . On vérifie de même que  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_1(\lambda) = r^{-1}$  et  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_2(\lambda) = r$ . Il en résulte que pour  $\frac{1+r}{1-r} < \lambda < \lambda(\varrho)$  les cols sont des points intérieurs de l'intervalle réel  $(r, r^{-1})$ .

Pour  $1 \leq \lambda < \frac{1+r}{1-r}$ , on a  $|w_1| = |w_2| = 1$  et  $w_1 = \bar{w}_2$ , donc

$$(5.19) \quad w_1 = e^{i\vartheta}, \quad w_2 = e^{-i\vartheta} \quad (\vartheta = \vartheta(\lambda) > 0)$$

avec

$$(5.20) \quad \cos \vartheta = \frac{1+r^2}{2r} - \frac{1-r^2}{2r\lambda},$$

$$\sin \vartheta = \frac{1-r^2}{2r\lambda} \left( \frac{1+r}{1-r} - \lambda \right)^{\frac{1}{2}} \left( \lambda - \frac{1-r}{1+r} \right)^{\frac{1}{2}},$$

Par conséquent la condition (5.10) et celle que  $\lambda \geq 1$  se traduit par le fait que  $\cos \vartheta(1) = r$  et

$$(5.21) \quad c_4 v^{-1/3+\varepsilon} \leq \vartheta(\lambda) \leq \vartheta(1) < \frac{\pi}{2}.$$

Lorsque (5.10) n'est pas réalisée, on a  $\vartheta(\lambda) = O(v^{-1/3+\varepsilon})$ .

Si enfin  $\lambda = \frac{1+r}{1-r}$ , on obtient  $w_1 = w_2 = 1$ . Ce cas est d'ailleurs écarté par la condition (5.10), mais il sera examiné dans le § 6 à l'aide de la relation (5.1) du lemme 2.

On tire ensuite de (5.17) et (5.18)

$$(5.22) \quad \begin{aligned} f''(w_1) &= \frac{\lambda}{w_1^2} \left( \lambda - \frac{1+r}{1-r} \right)^{1/2} \left( \lambda - \frac{1-r}{1+r} \right)^{1/2}, \\ f''(w_2) &= - \frac{\lambda}{w_2^2} \left( \lambda - \frac{1+r}{1-r} \right)^{1/2} \left( \lambda - \frac{1-r}{1+r} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Les expressions (5.22) font ressortir le sens de la condition (5.6) resp. (5.10) dans l'application de la formule (5.14). En ce qui concerne  $\lambda$ ,  $w_1$  et  $w_2$ , nous venons de constater que  $\lambda \geq 1$ ,  $r \leq |w_1|^{-1} \leq 1$ ,  $1 \leq |w_2|^{-1} \leq r^{-1}$ . Il découle ainsi de (5.22), au cas où (5.10) est réalisée, que  $|f''(w_1)|^{-1} = O(v^{1/3-\varepsilon})$ ,  $|f''(w_2)|^{-1} = O(v^{1/3-\varepsilon})$ ; pour  $\varepsilon = 1/3$  ces quantités ont donc une borne supérieure indépendante de  $v$ . En outre on tire de (5.16)

$$(5.23) \quad h(w_1) = O(1), \quad h(w_2) = O(1)$$

pour tous les  $\lambda$  en question.

Ceci posé, nous allons distinguer les cas suivants:

$$1^\circ \quad \varepsilon = \frac{1}{3}, \quad \frac{1+r}{1-r} + c_2 \leq \lambda < \lambda(\varrho).$$

$$2^\circ \quad 0 \leq \varepsilon < \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{1+r}{1-r} + c_2 v^{-2/3+2\varepsilon}.$$

$$3^\circ \quad \varepsilon = 0, \quad \frac{1+r}{1-r} - c_2 v^{-2/3} \leq \lambda \leq \frac{1+r}{1-r} + c_2 v^{-2/3}.$$

$$4^\circ \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{1+r}{1-r} - c_2 v^{-2/3+2\varepsilon}.$$

$$5^\circ \quad \varepsilon = \frac{1}{3}, \quad 1 \leq \lambda \leq \frac{1+r}{1-r} - c_2.$$

$c_2$  est une constante arbitraire, fixée une fois pour toutes, suffisamment petite pour que nos raisonnements aient toujours le sens désiré; on pourra prendre

p.e.  $c_2 = \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1+r^2} r^4 (1-r)^4$ . Le paramètre  $\varepsilon$  parcourant l'intervalle  $[0, \frac{1}{3}]$  est choisi de telle façon que  $\lambda$  soit un nombre rationnel. Dans le cas 3° les  $|\gamma_{nv}(\zeta_0, z_1)|$  seront évalués à l'aide du lemme 2. Les cas 1° et 2° sont caractérisés par le fait que  $\frac{1+r}{1-r} < \lambda$ , les cas 4° et 5° par celui que  $1 \leq \lambda < \frac{1+r}{1-r}$ .

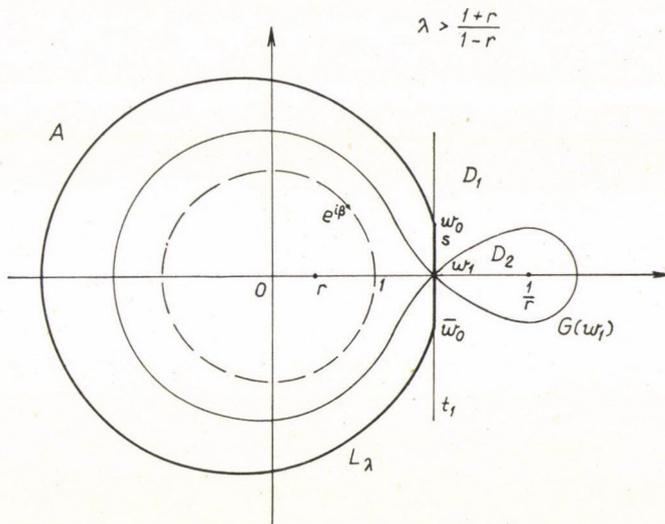


Figure 1.

Ces distinctions sont utilisés à la construction de  $L_\lambda$ . Pour la discussion qui suit posons  $|F(w)| = g_\lambda(w)$  pour les valeurs réelles de  $w$ .

A) 
$$\frac{1+r}{1-r} < \lambda < \lambda(\varrho).$$

Les racines de l'équation  $g'_\lambda(w) = 0$  sont  $w_1$  et  $w_2$ ,  $r < w_2 < 1 < w_1 < r^{-1}$ .  $g_\lambda(w)$  est continue pour  $r \leq w < r^{-1}$  et  $g_\lambda(r) = 0$ ,  $g_\lambda(1) = 1$ ,  $g_\lambda(r^{-1}) = \infty$ .  $g_\lambda(w)$  atteint donc son minimum local en  $w_1$  son maximum local en  $w_2$  et, par suite,  $g_\lambda(w_1) < 1$ ,  $g_\lambda(w_2) > 1$ . Il en résulte,  $F(w_1)$  étant maintenant réelle, que (cf.(5.13)):

(5.24)  $0 < F(w_1) = e^{f(w_1)} = c_5 < 1$  resp.  $f(w_1) = \log c_5 = -c_6 < 0$ .

Selon (5.16) on a  $|F(w)| = 1$  pour  $|w| = 1$  et  $F(r^{-1}) = \infty$ ,  $F(\infty) = 0$ . On en conclut d'une part que la courbe de niveau  $G(w_1)$  définie par (5.12) est à distance finie, d'autre part que la circonférence  $|w| = 1$  et le point  $w = r^{-1}$  appartiennent à  $D_2$ . En conséquence,  $G(w_1)$  est une courbe fermée qui entoure d'un côté le cercle  $|w| \leq 1$ , de l'autre côté le point  $w = r^{-1}$ , en se coupant sous un angle droit en  $w_1$  (fig. 1; nos figures ne sont pas des dessins précis, elles représentent seulement la configuration des courbes en question d'une manière qualitative).  $G(w_1)$  est manifestement symétrique

par rapport à l'axe réel, lequel est l'une des bissectrices des angles formés par les deux tangentes à  $G(w_1)$  tracées en  $w_1$ . Pourtant l'axe réel ne peut pas être l'axe du col  $t_1$ , car  $|F(w)|$  prend son minimum local en  $w_1$  quand  $w \in (r, r^{-1})$ , quoique  $|F(w)|$  doit atteindre son maximum local en  $w_1$  lorsque  $w \in t_1$ . L'axe  $t_1$  est donc la perpendiculaire à l'axe réel passant par  $w_1$ , et  $\tau_1 = \frac{\pi}{2}$ .

Après ces considérations  $L_\lambda$  peut être construite comme suit: elle est tangente à  $t_1$  en  $w_1$  et entoure la partie de  $G(w_1)$  qui contient le cercle  $|w| \leq 1$ . (Sur la figure 1 un segment de  $t_1$  fait partie de  $L_\lambda$ , circonstance qui s'expliquera d'ici peu.)  $L_\lambda$  se trouve entièrement dans  $D_1$  excepté son point  $w_1$ , et ainsi (cf. (5.24))  $\operatorname{Re} f(w) \leq -c_6 < 0$  si  $w \in L_\lambda$ . (La courbe de niveau déterminée par (5.12) possède outre  $G(w_1)$  une seconde branche, une courbe fermée contenant le point  $w = r$  et se plaçant dans le cercle  $|w| < 1$ . Cette branche de la courbe de niveau ne nous intéresse pas.)

$L_\lambda$  étant déterminée examinons les cas 1° et 2°.

$$1^\circ \quad \varepsilon = \frac{1}{3}, \quad \frac{1+r}{1-r} + c_2 \leq \lambda < \lambda(\varrho).$$

Les relations (5.22), (5.23) et (5.24) montrent que la formule (5.14) s'applique sans difficulté et l'on a:

$$(5.25) \quad |\gamma_{nv}(\zeta_0, z_1)| \approx \Gamma_{nv} = w_1^{-1} (2\pi f''(w_1))^{-1/2} e^{-c_6 v} v^{-1/2} \{1 + O(v^{-1})\}.$$

(5.7) est donc vérifiée dans le cas 1°.

$$2^\circ \quad 0 \leq \varepsilon < \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{1+r}{1-r} + c_2 v^{-2/3+2\varepsilon}.$$

On obtient de (5.16), (5.18) et (5.22)

$$(5.26) \quad \begin{aligned} w_1 &= w_1(\lambda) = 1 + c_7 v^{-1/3+\varepsilon}, \\ f(w_1) &= -c_8 v^{-1+3\varepsilon}, \quad f''(w_1) = 2c_9 v^{-1/3+\varepsilon}. \end{aligned}$$

$w_1, h(w_1), f(w_1), f''(w_1)$  dépendent maintenant de  $v$ , l'application immédiate de la formule (5.14) n'est donc pas permise, mais une discussion analogue à celle qui conduit à la relation (5.14) fournit, comme on verra, la proposition (5.7).

$t_1$  est déterminé par l'équation  $w = w_1 + iy$  ( $-\infty \leq y \leq \infty$ ).

Admettons que  $L_\lambda$  soit composée d'un segment rectiligne  $s \subset t_1$  d'extrémités  $w_0 = w_1 + iv^{-4/15}$  et  $\bar{w}_0 = w_1 - iv^{-4/15}$  et de l'arc  $A$  de la courbe de niveau  $G(w_0)$  définie par l'équation

$$(5.27) \quad |ef(w)| = |ef(w_0)| = |ef(\bar{w}_0)|$$

qui constitue avec  $s$  la courbe fermée  $L_\lambda$  contenant le point  $w = 0$ .

Pour majorer l'intégrale en question prise le long de  $s$ , développons  $f(w)$  en série de Taylor autour de  $w_1$  lorsque  $w \in t_1$ :

$$(5.28) \quad f(w) = -c_8 v^{-1+3\varepsilon} - c_9 v^{-1/3+\varepsilon} y^2 + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s)!} f^{(2s)}(w_1) y^{2s} + \\ + i \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} f^{(2s+1)}(w_1) y^{2s+1},$$

ici nous avons pris en considération les expressions (5.26). Or, quel que soit  $w_1$  on peut déduire de (5.17) que

$$(5.29) \quad \frac{f^{(s)}(w_1)}{s!} = \frac{1}{s(w_1 - r)^s} \left\{ (-1)^s \lambda \frac{(w_1 - r)^s}{w_1^s} - (-1)^s + r^s \left( \frac{w_1 - r}{1 - rw} \right)^s \right\},$$

Si en particulier  $w_1$  est donné par (5.26), on a  $0 < w_1 - r < 1$  et on obtient de (5.29)

$$(5.30) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(s)}(w_1)}{s!} \right|^{-1/s} = w_1 - r.$$

La série (5.28) est donc convergente pour  $|y| < w_1 - r$ . Il en résulte que

$$(5.31) \quad v \operatorname{Re} f(w) = -c_8 v^{3\varepsilon} - c_9 v^{2/3+\varepsilon} y^2 + v y^4 O(1) \quad (|y| < w_1 - r).$$

Pour  $|y| \leq v^{-4/15}$ , on a  $v y^4 = O(v^{-1/15})$  et on conclut de (5.31)

$$(5.32) \quad \int_s |w^{-1} e^{vf(w)}| dy = O(e^{-c_8 v^{3\varepsilon}}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_9 v^{2/3+\varepsilon} y^2} dy = \\ = O(e^{-c_8 v^{3\varepsilon}} v^{-1/5-\varepsilon/2}).$$

On obtient également de (5.31)

$$(5.33) \quad v \operatorname{Re} f(w_0) = -c_8 v^{3\varepsilon} - c_9 v^{2/15+\varepsilon} + O(1) = v \operatorname{Re} f(\bar{w}_0),$$

et il découle de (5.27) et (5.33) que

$$(5.34) \quad \int_A |w^{-1} e^{vf(w)}| |dw| = O(e^{-c_8 v^{3\varepsilon} - c_9 v^{2/15+\varepsilon}}).$$

Les relations (5.32) et (5.34) prouvent que (5.7) est vérifiée dans le cas 2°.

$$B) \quad 1 \leq \lambda < \frac{1+r}{1-r}.$$

L'équation  $g'_i(w) = 0$  n'a pas maintenant de racines réelles, mais d'après (5.19)  $w_1 = e^{i\theta}$ ,  $w_2 = e^{-i\theta}$  et, par suite,

$$(5.35) \quad |F(w_1)| = |e^{f(w_1)}| = 1, \quad |F(w_2)| = |e^{f(w_2)}| = 1.$$

La courbe de niveau en question passe donc par  $w_1$  et  $w_2$ ; on la désignera par  $G(w_1, w_2)$ . En vertu de (5.12) et (5.35) l'équation de  $G(w_1, w_2)$  s'écrit sous la forme particulière  $|F(w)| = |e^{f(w)}| = 1$ . Or, cette équation est vérifiée par tous les points de la circonférence  $|w| = 1$  qui forme en conséquence une branche distincte de  $G(w_1, w_2)$  et que l'on note par  $G_1$ . Cependant  $G(w_1, w_2)$  doit encore posséder une autre branche orthogonale à  $G_1$  en  $w_1$  et  $w_2$ . Désignons cette branche par  $G_2(w_1, w_2)$ . Il est aisé de voir que  $G_2(w_1, w_2)$  est une courbe à distance finie admettant l'axe réel comme axe de symétrie (fig. 2).

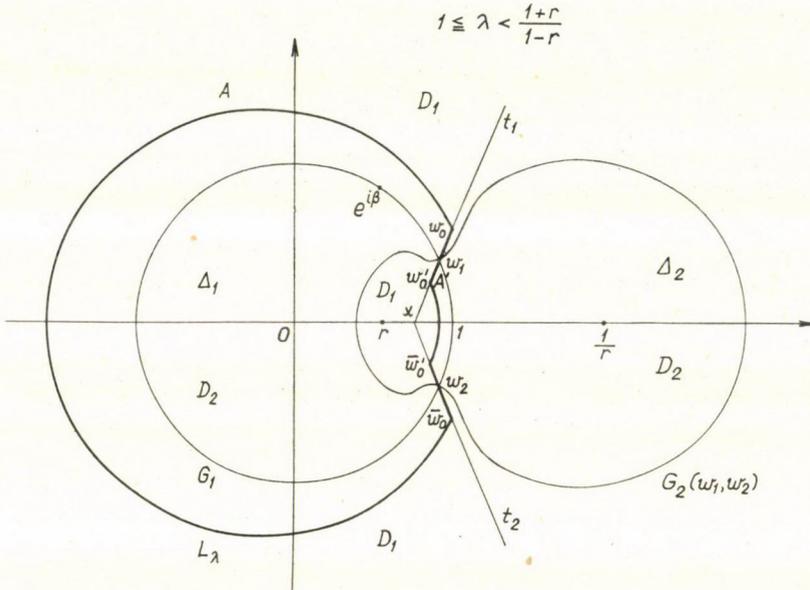


Figure 2.

Quant à la distribution des valeurs de  $g_\lambda(w)$ , on a

$$(5.36) \quad g_\lambda(0) = \infty, \quad g_\lambda(r) = 0, \quad g_\lambda(r^{-1}) = \infty, \quad g_\lambda(\infty) = 0.$$

Il en résulte que

$$(5.37) \quad 0 \in D_2, \quad r \in D_1, \quad r^{-1} \in D_2, \quad \infty \in D_1.$$

En désignant par  $\Delta_1$  resp.  $\Delta_2$  le domaine limité par  $G_1$  resp.  $G_2(w_1, w_2)$ , on déduit de (5.35) et (5.37)

$$(5.38) \quad D_1 = (\Delta_1 \cap \Delta_2) \cup (\bar{\Delta}_1 \cap \bar{\Delta}_2), \quad D_2 = \Delta_1 \cup \Delta_2 - \Delta_1 \cap \Delta_2$$

( $\bar{\Delta}_1$  resp.  $\bar{\Delta}_2$  est le domaine complémentaire de  $\Delta_1$  resp.  $\Delta_2$  par rapport au plan  $w$ ).  $t_1$  resp.  $t_2$  (l'axe du col  $w_2$ ) pénètre donc aussi bien dans  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  que dans  $\bar{\Delta}_1 \cap \bar{\Delta}_2$  et, étant bissectrice de l'un des angles compris entre le rayon et la tangente de  $G_1$  passant par  $w_1$  resp.  $w_2$ , forme avec l'axe réel l'angle  $\tau_1 = \vartheta + \frac{\pi}{4}$  resp.  $\tau_2 = -\tau_1$ .

Par conséquent  $L_\lambda$  est tangente à  $t_1$  en  $w_1$  et à  $t_2$  en  $w_2$ ; elle se compose de deux arcs dont l'un se trouve dans  $\Delta_1 \cap \Delta_2$  et l'autre dans  $\bar{\Delta}_1 \cap \bar{\Delta}_2$  et contient le point  $w = 0$ . (Sur la figure 2 un segment de  $t_1$  resp.  $t_2$  fait partie de  $L_\lambda$ .) Selon (5.38)  $L_\lambda \subset D_1$  sauf les cols  $w_1, w_2$ , donc  $\text{Re } f(w) \leq 0$  si  $w \in L_\lambda$  (cf. (5.35)).  $L_\lambda$  étant construite, passons à l'étude des cas  $4^\circ$  et  $5^\circ$ .

$$4^\circ \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{1+r}{1-r} - c_2 \nu^{-2/3+2\varepsilon}.$$

On obtient de (5.18)–(5.22)

$$(5.39) \quad e^{i\theta} = w_1 = w_1(\lambda) = 1 - c_{10} \nu^{-2/3+2\varepsilon} + ic_{11} \nu^{-1/3+\varepsilon} = \bar{w}_2(\lambda) = \bar{w}_2, \\ \theta = c_4 \nu^{-1/3+\varepsilon}, \quad |f''(w_1)| = |f''(w_2)| = 2c_{12} \nu^{-1/3+\varepsilon}.$$

L'application directe de la formule (5.14) n'est donc pas légitime, mais un procédé analogue à celui que nous avons appliqué dans le cas  $2^\circ$  permet d'établir la proposition énoncée.

L'axe  $t_1$  est déterminé par l'expression  $w = w_1 + e^{i\tau_1} u$  ( $-\infty \leq u \leq \infty$ ) et  $t_2$  est symétrique à  $t_1$  par rapport à l'axe réel.

Cette fois-ci nous devons considérer deux cas:  $1/3 > \varepsilon \geq 1/6, 1/6 > \varepsilon > 0$ .

Pour  $\varepsilon \geq 1/6$  supposons que  $L_\lambda$  se compose de deux segments de droite et de deux arcs (fig. 2), chacun appartenant à une courbe de niveau particulière, déterminés comme suit: Soit  $s_1 \subset t_1$  le premier segment d'extrémités  $w_0 = w_1 + e^{i\tau_1} \nu^{-1/3}$  et  $w'_0 = w_1 - e^{i\tau_1} \nu^{-1/3}$ . Soit  $s_2 \subset t_2$  le second segment avec les extrémités  $\bar{w}_0$  et  $\bar{w}'_0$ . L'arc  $A$  resp.  $A'$  joint les points  $w_0$  et  $\bar{w}_0$  resp.  $w'_0$  et  $\bar{w}'_0$ . Ils forment avec  $s_1$  et  $s_2$  la courbe fermée  $L_\lambda$  contenant le point  $w = 0$ . L'arc  $A$  resp.  $A'$  appartient à la courbe de niveau  $G(w_0)$  resp.  $G(w'_0)$  donnée par l'équation

$$(5.40) \quad |e^{f(w)}| = |e^{f(w_0)}| = |e^{f(\bar{w}_0)}| \quad \text{resp.} \quad |e^{f(w)}| = |e^{f(w'_0)}| = |e^{f(\bar{w}'_0)}|.$$

Considérons ensuite la série de Taylor de  $f(w)$  développée autour de  $w_1$  lorsque  $w \in t_1$ , en tenant compte de la relation (5.39),

$$(5.41) \quad f(w) = f(w_1) + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{f^{(s)}(w_1)}{s!} (e^{i\tau_1} u)^s = f(w_1) - c_{12} \nu^{-1/3+\varepsilon} u^2 + \sum_{s=3}^{\infty} (p_s + iq_s) u^s,$$

où  $p_s$  et  $q_s$  sont des nombres réels. Comme  $0 < |w_1 - r| < 1$ , on peut conclure de (5.29) et (5.30) que la série (5.41) converge pour  $|u| < |w_1 - r|$ , condition qu'on suppose être réalisée dans les raisonnements qui suivent. Étant donné que  $\text{Re } f(w_1) = 0$ , on tire de (5.41) pour  $|u| \leq \nu^{-1/3}$ :

$$(5.42) \quad \nu \text{Re } f(w) = -c_{12} \nu^{2/3+\varepsilon} u^2 + O(1).$$

Il s'ensuit, à cause de la symétrie de  $L_\lambda$  et de  $f(w)$ , que

$$(5.43) \quad \int_{s_1} |w^{-1} e^{vf(w)}| du = \int_{s_2} |w^{-1} e^{vf(w)}| du = O(\nu^{-1/3-\varepsilon/2}).$$

Il résulte de plus de (5.42) que

$$(5.44) \quad \nu \text{Re } f(w_0) = -c_{12} \nu^\varepsilon + O(1) = \nu \text{Re } f(\bar{w}_0), \\ \nu \text{Re } f(w'_0) = -c_{12} \nu^\varepsilon + O(1) = \nu \text{Re } f(\bar{w}'_0).$$

On obtient ainsi par (5.40) et (5.44)

$$(5.45) \quad \int_A |w^{-1} e^{\nu f(w)}| |dw| = O(e^{-c_{12} \nu^\varepsilon}),$$

$$\int_{A'} |w^{-1} e^{\nu f(w)}| |dw| = O(e^{-c_{12} \nu^\varepsilon}), \quad (\varepsilon \geq 1/6).$$

(5.43) et (5.45) fournissent la relation (5.7) si  $\varepsilon \geq 1/6$ .

Lorsque  $0 < \varepsilon < 1/6$ , les expressions (5.45) ne peuvent pas être majorées par  $O(\nu^{-1/3-\varepsilon/2})$  si  $\varepsilon$  est trop petit. On peut tourner cette difficulté par une modification de  $L_\lambda$  et un calcul plus détaillé.  $L_\lambda$  soit composée de deux segments de droite  $s_1$  et  $s_2$  et de l'arc  $A$  (fig. 2)<sup>4</sup>.  $s_1 \subset t_1$  a maintenant pour extrémités  $x = w_1 + e^{i\tau_1} u_1$  et  $w_0 = w_1 + e^{i\tau_1} \nu^{-4/15}$ , en désignant par  $x$  l'intersection de  $t_1, t_2$  et de l'axe réel.  $\theta$  étant donné par (5.39), on aura  $u_1 = -c_{13} \nu^{-1/3+\varepsilon}$ .  $s_2 \subset t_2$  a pour extrémités  $x$  et  $\bar{w}_0$ .  $A$  est l'arc de la courbe de niveau  $G(w_0)$ , déterminée par l'équation

$$(5.46) \quad |ef(w)| = |ef(w_0)| = |ef(\bar{w}_0)|,$$

qui forme avec  $s_1$  et  $s_2$  la courbe fermée  $L_\lambda$  entourant le point  $w = 0$ .

Pour pouvoir tirer des conclusions appropriées de la formule (5.41), il faut évaluer les quantités  $p_3, c_{12}$  et  $c_{13}$ . Elles s'obtiennent de (5.20), (5.22) et (5.29):

$$(5.47) \quad p_3 = -\frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{r(1+r)}{(1-r)^3} + O(\nu^{-1/3+\varepsilon}) < 0,$$

$$c_{12} = \frac{1+r}{1-r} \left( \frac{rc_2}{1-r^2} \right)^{1/2} + O(\nu^{-2/3+\varepsilon}), \quad c_{13} = \sqrt{2} \frac{(1-r)^2}{r} \left( \frac{rc_2}{1-r^2} \right)^{1/2} + O(\nu^{-1/3+\varepsilon}).$$

Il en résulte pour  $w \in s_1$  et  $0 < u \leq \nu^{-4/15} = u_2$  que

$$(5.48) \quad \nu \operatorname{Re} f(w) = -c_{12} \nu^{2/3+\varepsilon} u^2 + p_3 \nu u^3 + \nu u^4 O(1) < -c_{12} \nu^{2/3+\varepsilon} u^2 + O(1),$$

et de là, en vertu de la symétrie de  $L_\lambda$  et de  $f(w)$ ,

$$(5.49) \quad \int_0^{u_2} \left| \frac{e^{\nu f(w_1 + e^{i\tau_1} u)}}{w_1 + e^{i\tau_1} u} \right| du = \int_0^{u_2} \left| \frac{e^{\nu f(w_2 + e^{i\tau_2} u)}}{w_2 + e^{i\tau_2} u} \right| du = O(\nu^{-1/3-\varepsilon/2}).$$

D'autre part on obtient de (5.47) et (5.48) pour  $u_1 = -c_{13} \nu^{-1/3+\varepsilon} \leq u < 0$ :

$$\nu \operatorname{Re} f(w) = -c_{12} \nu^{2/3+\varepsilon} u^2 \left\{ 1 - \frac{p_3}{c_{12}} \nu^{1/3-\varepsilon} u + O(\nu^{-1/3+\varepsilon}) \right\} < -c_{14} \nu^{2/3+\varepsilon} u^2$$

avec

$$c_{14} = c_{12} \left\{ \frac{2}{3} + O(\nu^{-1/3+\varepsilon}) \right\}.$$

<sup>4</sup> Nous avons gardé les notations précédentes pour se servir encore de la figure 2, mais nous donnons de définitions nouvelles à  $s_1, s_2, A$  et  $w_0$ .

Par conséquent

$$(5.50) \quad \int_{u_1}^0 \left| \frac{e^{\nu f(w_1 + e^{i\tau_1} u)}}{w_1 + e^{i\tau_1} u} \right| du = \int_{u_1}^0 \left| \frac{e^{\nu f(w_2 + e^{i\tau_2} u)}}{w_2 + e^{i\tau_2} u} \right| du = O(\nu^{-1/3 - \varepsilon/2}).$$

Il reste à examiner l'intégrale étendue sur  $A$ . Il vient de (5.48):

$$\nu \operatorname{Re} f(w_0) = -c_{12} \nu^{2/15 + \varepsilon} + p_3 \nu^{1/5} + O(\nu^{-1/5}) = \nu \operatorname{Re} f(\bar{w}_0),$$

d'où, vu la relation (5.46),

$$(5.51) \quad \int_A |w^{-1} e^{\nu f(w)}| |dw| = O(e^{-c_{12} \nu^{2/15 + \varepsilon} + p_3 \nu^{1/5}}).$$

(5.49) — (5.51) constituent la démonstration de la relation (5.7) lorsque  $\varepsilon < 1/6$ .

$$5^\circ \quad \varepsilon = \frac{1}{3}, \quad 1 \leq \lambda \leq \frac{1+r}{1-r} - c_2.$$

Cette fois-ci  $\operatorname{Re} f(w_1) = \operatorname{Re} f(w_2) = 0$ , et d'après (5.22) et (5.19)  $|f''(w_1)|^{-1} = |f''(w_2)|^{-1} = O(1)$ ,  $|h(w_1)| = |h(w_2)| = 1$ . La formule (5.14) peut donc être appliquée et l'on a:

$$(5.52) \quad |\gamma_{nv}(\zeta_0, z_1)| \approx \Gamma_{nv} = \left( \frac{2}{\pi |f''(w_1)|} \right)^{1/2} \nu^{-1/2} \{1 + O(\nu^{-1})\}.$$

Ce qui vérifie (5.7).

Le lemme 3 est ainsi entièrement établi.

### § 6. La matrice $\mathcal{M}$ remplit les conditions du lemme 1

Après ces préparatifs reprenons l'étude de l'expression (3.1).

$\rho$  désigne la constante définie dans le § 5 ( $1 < \rho < r^{-1}$ ). La formule (3.3) peut ainsi prendre la forme:

$$(6.1) \quad \gamma_{nv}(\zeta_0, z_1) = \frac{e^{i\nu\alpha}}{2\pi i z_1^\nu} \int_{|w|=\rho} \left( \frac{w-r}{1-rw} \right)^\nu \frac{e^{-i\nu\alpha} z_2^n}{w^{n+1}} dw,$$

d'où, en tenant compte de (1.5),

$$(6.2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{nv}(\zeta_0, z_1) = \frac{e^{i\nu\alpha}}{2\pi i z_1^\nu} \int_{|w|=\rho} \left( \frac{w-r}{1-rw} \right)^\nu \frac{dw}{w - e^{-i\alpha} z_2} = 1.$$

Les conditions I et III du lemme 1 sont donc réalisées.

Posons ensuite  $e^{-i\alpha} z_2 = e^{i\beta}$  et

$$(6.3) \quad \sum_{n=0}^m \gamma_{nv}(\zeta_0, z_1) = \sigma_{mv}(\zeta_0, z_1).$$

Il reste à montrer l'existence d'une constante  $K > 0$  vérifiant l'inégalité

$$(6.4) \quad |\sigma_{mv}(\zeta_0, z_1)| \leq K \quad (|z_1| = 1; m = 0, 1, 2, \dots; \nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Il découle de (6.1) — (6.3) que

$$\begin{aligned}
 \sigma_{mv}(\zeta_0, z_1) &= \frac{e^{i\nu\alpha}}{3\pi i z_1^\nu} \int_{|w|=\varrho} \left( \frac{w-r}{1-rw} \right)^\nu \frac{w^{m+1} - e^{i(m+1)\beta}}{w^{m+1}(w - e^{i\beta})} dw \stackrel{\text{def}}{=} \\
 (6.5) \quad &= 1 - \frac{C_{mv}}{2\pi i} \int_{|w|=\varrho} \left( \frac{w-r}{1-rw} \right)^\nu \frac{dw}{w^{m+1}(w - e^{i\beta})} \stackrel{\text{def}}{=} \\
 &\stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{C_{mv}}{2\pi i} \int_{|w|=\varrho} H(w) dw \stackrel{\text{def}}{=} 1 - C_{mv} J_{mv}.
 \end{aligned}$$

- Pour vérifier (6.4) il suffit d'établir que  $|J_{mv}|$  est uniformément bornée en  $z_1$ ,  $m$  et  $\nu$ . Si l'on remplace  $m$  par  $n$  la fonction  $H(w)$  ne diffère de  $[F(w)]^\nu$  (cf. (5.15), (5.16)) que par le facteur  $(w - e^{i\beta})^{-1}$ ; il est donc tout indiqué d'évaluer  $|J_{mv}|$  par la méthode du col, en posant  $\lambda = \frac{m}{\nu}$  et

$$(6.6) \quad h(w) = w^{-1}(w - e^{i\beta})^{-1}.$$

En effet, on verra que tout le calcul se ramène à l'étude de l'intégrale

$$(6.7) \quad I_{mv} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\lambda} H(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\lambda} h(w) e^{\nu f(w)} dw,$$

où  $f(w)$  est définie par (5.16) et  $L_\lambda$  est la courbe déterminée dans le § 5.  $H(w)$  a deux pôles dans le cercle  $|w| \leq \varrho$ , notamment  $w = 0$  et  $w = e^{i\beta}$ .  $L_\lambda$  entoure certainement le pôle  $w = 0$ , mais elle ne contient pas toujours  $e^{i\beta}$ . Le résidu de  $H(w)$  étant égal à 1 en valeur absolue au point  $e^{i\beta}$ , on a  $|J_{mv} - I_{mv}| = 1$  si  $L_\lambda$  ne renferme pas  $e^{i\beta}$  et  $J_{mv} = I_{mv}$  dans le cas contraire.

Pour  $\lambda \geq \lambda(\varrho)$  on obtient (6.4) directement de (5.8) et (6.5), car  $|h(w)| \leq \leq \varrho^{-1}(\varrho - 1)^{-1}$  pour  $|w| = \varrho$  et, par suite,  $|J_{mv}| \leq \varrho^{-1}(\varrho - 1)^{-1} \delta^\nu$ . En général, l'évaluation de  $|I_{mv}|$  dérive sans plus des résultats obtenus dans le § 5 si  $|h(w_1)| = O(1)$  resp.  $|h(w_2)| = O(1)$ . Les difficultés surgissent là où  $|h(w_1)|^{-1}$  resp.  $|h(w_2)|^{-1}$  est nulle ou tend vers zéro lorsque  $\nu \rightarrow \infty$ .

Ces remarques faites, discutons les cas énumérés dans le § 5.

$$1^\circ \quad \varepsilon = \frac{1}{3}, \quad \frac{1+r}{1-r} + c_2 \leq \lambda < \lambda(\varrho).$$

$L_\lambda$  passe maintenant par le seul col  $w_1$ , entoure aussi le pôle  $e^{i\beta}$  et  $|h(w_1)| < c_{15}$  quel que soit  $\beta$ . La formule (5.14) est donc applicable et selon (5.25), (6.5) et (6.7) on a  $|\sigma_{mv}(\zeta_0, z_1)| = 1 - O(e^{-c_2 \nu} \nu^{-1/2})$ . L'inégalité (6.4) est ainsi vérifiée.

$$2^\circ \quad 0 \leq \varepsilon < \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{1+r}{1-r} + c_2 \nu^{-2/3+2\varepsilon}.$$

$L_\lambda$  passe encore par le seul col  $w_1$  et contient  $e^{i\beta}$ . On tire de (5.26) et (6.6) :  $|h(w_1)| = O(\nu^{1/3-\varepsilon})$ . Il en résulte, en vertu de (5.32), (5.34) et (6.5), que

$|\sigma_{mv}(\zeta_0, z_1)| = 1 - O(e^{-c_2 v^{2/3}} v^{-\frac{3\varepsilon}{2}})$ . La relation (6.4) est encore prouvée.

$$3^\circ \quad \varepsilon = 0, \quad \frac{1+r}{1-r} - c_2 v^{-2/3} \leq \lambda \leq \frac{1+r}{1-r} + c_2 v^{-2/3}.$$

Désignons par  $\lambda'$  le plus grand et par  $\lambda''$  le plus petit des  $\lambda$  satisfaisant à la condition 3° et posons

$$(6.8) \quad \frac{1+r}{1-r} v - c_2 v^{1/3} \leq \lambda'' v = m'' \leq m \leq m' = \lambda' v \leq \frac{1+r}{1-r} v + c_2 v^{1/3},$$

d'où  $m' - m'' = c_{16} v^{1/3}$ . D'autre part il résulte du cas 2° que

$$|\sigma_{m'v}(\zeta_0, z_1)| = O(1).$$

Ces faits et le lemme 2 prouvent que

$$(6.9) \quad \begin{aligned} |\sigma_{mv}(\zeta_0, z_1)| &= \left| \sigma_{m'v}(\zeta_0, z_1) - \sum_{j=m+1}^{m'} \gamma_{jv}(\zeta_0, z_1) \right| \leq \\ &\leq |\sigma_{m'v}(\zeta_0, z_1)| + O(1) = O(1) \quad (m'' \leq m \leq m'). \end{aligned}$$

La relation (6.4) se trouve donc démontré dans le cas 3°.

$$4^\circ \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{3}, \quad \lambda = \frac{1+r}{1-r} - c_2 v^{-2/3+2\varepsilon}.$$

En raison de la symétrie nous admettons pour ce qui suit que  $0 \leq \beta \leq \pi$ . Il en découle que  $|h(w_1)| = |e^{i\theta} - e^{i\beta}|^{-1} \geq |h(w_2)| = |e^{-i\theta} - e^{i\beta}|^{-1}$ . On peut donc affirmer, en vertu du lemme 3, que la relation (6.4) est établie toutes les fois que  $|h(w_1)| = O(v^{1/3+\varepsilon/2})$ . Or, il est sûr que cette dernière condition n'est pas remplie pour toute valeur de  $\varepsilon$  lorsque  $e^{i\beta}$  se trouve sur un certain arc  $B \subset G_1$  contenant l'arc où  $w_1$  se déplace quand  $\varepsilon$  varie de 0 à  $1/3$ .

Partons donc de l'hypothèse que  $e^{i\beta} \in B$  et posons (cf. (6.8))

$$(6.10) \quad \lambda'' - (k+1)v^{-1} = \lambda_k = \frac{1+r}{1-r} - c_2 v^{-2/3+2\varepsilon} = \frac{m_k}{v}, \quad \vartheta_k = \vartheta(\lambda_k),$$

où  $k \geq 0$  est un entier et

$$(6.11) \quad v^{2\varepsilon k} = v^{2\varepsilon_0} \left( 1 + \frac{k}{c_2} v^{-1/3-2\varepsilon_0} \right) \text{ resp. } k = c_2 v^{1/3} (v^{2\varepsilon k} - v^{2\varepsilon_0}).$$

Selon la condition 4°  $\lambda_k > \frac{1+r}{1-r} - c_2$ ; on obtient ainsi de (6.10)

$$(6.12) \quad 0 \leq k < c_2(v - v^{1/3+2\varepsilon_0}) = k^*.$$

(6.10) montre également que  $\{\lambda_k\}$  et  $\{m_k\}$  sont des suites décroissantes et,  $\vartheta(\lambda)$  étant une fonction décroissante de  $\lambda$  (cf. (5.20)), il s'ensuit que  $\vartheta_k$  croît avec  $k$ .

Cela étant, supposons d'abord que  $\beta \geq \vartheta_0$ . Il existe alors un indice  $k_0 = k_0(\nu)$  tel que

$$(6.13) \quad \vartheta_{k_0-1} \leq \beta \leq \vartheta_{k_0}.$$

Nous pouvons admettre aussi que  $k_0 \leq \frac{1}{2} k^*$ , car le même raisonnement s'applique dans le cas contraire. Désignons par  $k_1$  l'entier défini par l'égalité

$$(6.14) \quad k_1 = k_0 + c_{17} \nu^{1/3 + \varepsilon_{k_0}/2}.$$

On a donc, grâce à (6.11),

$$(6.15) \quad \nu^{2\varepsilon_{k_1}} = \nu^{2\varepsilon_{k_0}} \left( 1 + \frac{c_{17}}{c_2} \nu^{-3\varepsilon_{k_0}/2} \right) = c_{18} \nu^{2\varepsilon_{k_0}}.$$

Il résulte ensuite de (6.13)

$$(6.16) \quad \begin{aligned} |e^{i\vartheta_{k_1}} - e^{i\vartheta_{k_0}}|^{-1} &= \left( 2 \sin \frac{\vartheta_{k_1} - \vartheta_{k_0}}{2} \right)^{-1} \geq \\ &\geq |e^{i\vartheta_{k_1}} - e^{i\beta}|^{-1} = |h(w_1(\lambda_{k_1}))|. \end{aligned}$$

Or, on obtient de la première formule (5.20):

$$\cos \vartheta_{k_0} - \cos \vartheta_{k_1} = 2 \sin \frac{\vartheta_{k_1} + \vartheta_{k_0}}{2} \sin \frac{\vartheta_{k_1} - \vartheta_{k_0}}{2} = \frac{1 - r^2}{2r} \frac{\lambda_{k_0} - \lambda_{k_1}}{\lambda_{k_0} \lambda_{k_1}},$$

d'où

$$(6.17) \quad \left( 2 \sin \frac{\vartheta_{k_1} - \vartheta_{k_0}}{2} \right)^{-1} = \frac{2r \lambda_{k_0} \lambda_{k_1}}{1 - r^2} \frac{\nu}{k_1 - k_0} \sin \frac{\vartheta_{k_1} + \vartheta_{k_0}}{2}.$$

La seconde formule (5.20) fournit la relation

$$(6.18) \quad \begin{aligned} \sin \vartheta_{k_1} + \sin \vartheta_{k_0} &= 2 \sin \frac{\vartheta_{k_1} + \vartheta_{k_0}}{2} \cos \frac{\vartheta_{k_1} - \vartheta_{k_0}}{2} = \\ &= [c_{19}(\nu, \varepsilon_{k_1}) + c_{19}(\nu, \varepsilon_{k_0}) \nu^{\varepsilon_{k_0} - \varepsilon_{k_1}}] \nu^{-1/3 + \varepsilon_{k_1}}, \end{aligned}$$

ici nous avons fait usage de la notation (1.12);  $c_{19}(\nu, \varepsilon)$  est une quantité bornée pour  $0 < \varepsilon < 1/3$  et  $\cos \frac{1}{2}(\vartheta_{k_1} - \vartheta_{k_0}) > \cos \vartheta(1) = r$ . Il découle donc de (6.15) et (6.18) que

$$(6.19) \quad \sin \frac{\vartheta_{k_1} + \vartheta_{k_0}}{2} = O(\nu^{-1/3 + \varepsilon_{k_0}}).$$

On aura enfin, d'après (6.14), (6.16), (6.17), (6.19) et (5.7):

$$(6.20) \quad |h(w_1(\lambda_{k_1}))| = O(\nu^{1/3 + \varepsilon_{k_0}/2}), \quad |\sigma_{m_{k_1}}(\zeta_0, z_1)| = O(1).$$

Pour  $k > k_1$  on a évidemment  $|h(w_1(\lambda_{k_1}))| < |h(w_1(\lambda_k))|$ ,  $\Gamma_{m_{k\nu}} = O(\Gamma_{m_{k_1\nu}})$  et, par suite,

$$(6.21) \quad |\sigma_{m_{k\nu}}(\zeta_0, z_1)| = O(1) \quad (k_1 < k \leq k^*).$$

Pour  $k_0 \leq k \leq k_1$  on déduit du lemme 3 de (6.14) et (6.15) que

$$S_1 = \sum_{k=k_0}^{k_1} |\gamma_{m_{k^v}}(\zeta_0, z_1)| = O(1),$$

d'où, en vertu de (6.20),

$$(6.22) \quad |\sigma_{m_{k^v}}(\zeta_0, z_1)| \leq |\sigma_{m_{k_1^v}}(\zeta_0, z_1)| + S_1 = O(1) \quad (k_0 \leq k \leq k_1).$$

Lorsque  $k < k_0$  il y a deux cas à envisager: a)  $k_0 = O(v^{1/3})$ ; b)  $v^{1/3} = o(k_0)$ . a) Si  $k_0 = O(v^{1/3})$ , il résulte du lemme 2 que

$$S_2 = \sum_{k=0}^{k_0-1} |\gamma_{m_{k^v}}(\zeta_0, z_1)| = O(1).$$

On a donc, vu (6.9),

$$(6.23) \quad |\sigma_{m_{k^v}}(\zeta_0, z_1)| \leq |\sigma_{m_{k_0^v}}(\zeta_0, z_1)| + S_2 = O(1) \quad (0 \leq k < k_0).$$

b) Si  $v^{1/3} = o(k_0)$ , on peut trouver un entier  $k_2$  tel que l'on ait

$$(6.24) \quad k_0 - 1 = k_2 + c_{20} v^{1/3 + \varepsilon_{k_2}/2}.$$

Cette équation n'a qu'une seule solution réelle inférieure à  $k_0 - 1$ . Il découle alors du lemme 3 que

$$S_3 = \sum_{k=k_2}^{k_0-1} |\gamma_{m_{k^v}}(\zeta_0, z_1)| = O(1)$$

et de là, en tenant compte de (6.22),

$$(6.25) \quad |\sigma_{m_{k^v}}(\zeta_0, z_1)| \leq |\sigma_{m_{k_0^v}}(\zeta_0, z_1)| + S_3 = O(1) \quad (k_2 \leq k < k_0).$$

Il reste à étudier les cas où  $k < k_2$ . Il est évident qu'on a aussi  $v^{1/3} = o(k_2)$ . D'après a) on peut supposer que  $k \geq c_2 v^{1/3}$ ; il s'ensuit, grâce à (6.11), que

$$(6.26) \quad k_2 - k \leq c_2 v^{1/3 + 2\varepsilon_{k_2}} \{1 - (v^{2\varepsilon_0} + 1) v^{-2\varepsilon_{k_2}}\} = k'.$$

Un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire pour  $k = k_1$  (cf. (6.10), (6.16), (6.17), (6.19)) fournira la relation

$$(6.27) \quad |\sigma_{m_{k^v}}(\zeta_0, z_1)| = O\{ |h(w_1(\lambda_{k'}))| \Gamma_{m_{k^v}} \} = O\left( \frac{v^{1/3 + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_{k'/2}}}{k_0 - 1 - k} \right);$$

et l'on peut déduire de (6.10) que

$$(6.28) \quad v^{-\varepsilon_{k'/2}} = v^{-\varepsilon_{k_2}/2} \left( 1 - \frac{k_2 - k}{c_2} v^{-1/3 - 2\varepsilon_{k_2}} \right)^{-1/4}.$$

Ainsi, en vertu de (6.24) et (6.28), (6.27) s'écrira sous la forme

$$(6.29) \quad |\sigma_{m_{k^v}}(\zeta_0, z_1)| = O\left\{ \left( \frac{c_{20}}{c_2} + \frac{k_2 - k}{c_2} v^{-1/3 - \varepsilon_{k_2}/2} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{k_2 - k}{c_2} v^{-1/3 - 2\varepsilon_{k_2}} \right)^{-1/4} \right\}.$$

Il est simple de voir que pour  $1 \leq k_2 - k \leq k'$  (cf. (6.26)) le produit qui figure dans (6.29) atteint son maximum pour  $k_2 - k = 1$ . Par conséquent

$$(6.30) \quad |\sigma_{mk^v}(\zeta_0, z_1)| = O(1) \quad (0 \leq k < k_2).$$

Les expressions (6.20)–(6.23), (6.25), (6.30) établissent enfin l'inégalité (6.4).

Soit en second lieu  $\beta < \vartheta_0$  (cf. (6.10)). On peut poser alors  $\vartheta_{k_0} = \vartheta_0$  et reprendre, avec certaines simplifications, la démonstration qui vient d'être faite pour  $\beta \geq \vartheta_0$ .

Le cas où  $\beta \geq \vartheta_{k^*}$  (cf. (6.12)) ne présente aucune nouvelle difficulté.

La relation (6.4) est donc entièrement prouvée dans le cas 4°.

$$5^\circ \quad \varepsilon = \frac{1}{3}, \quad 1 \leq \lambda \leq \frac{1+r}{1-r} - c_2.$$

La démonstration s'effectue de la même manière que dans le cas 4°. L'inégalité  $|h(w_2)| \leq |h(w_1)|$  est encore valable et, selon la valeur de  $\beta$ , on a ou bien  $|h(w_1)| = O(v^{1/2})$ , ou bien  $v^{1/2} |h(w_1)|^{-1} = o(1)$ . Dans le premier cas il découle du lemme 3 que  $|\sigma_{mv}(\zeta_0, z_1)| = O(1)$ . Le second cas se présente lorsque  $e^{i\beta}$  se trouve sur un certain arc  $B' \subset G_1$ . Supposons que l'indice  $k_0$  ait le même sens que dans la formule (6.13), sans admettre maintenant que  $k_0 < k^*$ . Posons  $k_1 = k_0 + c_{21}v^{1/2}$ ,  $k_2 = k_0 - c_{21}v^{1/2}$ . Il vient de (6.17):  $|h(w_1(\lambda_{k_1}))| = O(v^{1/2})$  et, par suite,  $|\sigma_{mk_1^v}(\zeta_0, z_1)| = O(1)$ . On a ensuite, d'après le lemme 3,

$$S_4 = \sum_{k=k_2}^{k_1} |\gamma_{mk^v}(\zeta_0, z_1)| = O(1);$$

il en résulte que

$$|\sigma_{mk^v}(\zeta_0, z_1)| = O(1); \quad (k_2 \leq k \leq k_1).$$

Il est clair de plus que  $|h(w_1(\lambda_k))| = O(v^{1/2})$  donc  $|\sigma_{mk^v}(\zeta_0, z_1)| = O(1)$  pour  $k < k_2$  et  $k > k_1$ .

(6.4) est ainsi établie dans le cas 5°.

Les conditions du lemme 1 sont donc remplies.

### § 7. Uniformité de la convergence

Il faut prouver l'uniformité de la convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(\zeta_0) z_2^n$  pour  $|z_2| = 1$ . Posons, en tenant compte de (3.1) et (6.3),

$$B_m = \sum_{n=0}^m b_n(\zeta_0) z_2^n = \sum_{v=0}^{\infty} \sigma_{mv}(\zeta_0, z_1) a_v z_1^v.$$

Nous allons montrer qu'en désignant par  $\eta > 0$  un nombre aussi petit que l'on veut, il existe un entier  $m_0 = m_0(\eta)$  tel que

$$(7.1) \quad |B_{m+p} - B_m| = \left| \sum_{v=0}^{\infty} [\sigma_{m+p,v}(\zeta_0, z_1) - \sigma_{mv}(\zeta_0, z_1)] a_v z_1^v \right| \leq \eta,$$

pour tous les entiers  $p > 0, m > m_0$ . En effet, on obtient de (7.1)

$$(7.2) \quad |B_{m+p} - B_m| \leq \sum_{v=0}^{v_0-1} |\sigma_{m+p,v}(\zeta_0, z_1) - \sigma_{mv}(\zeta_0, z_1)| |a_v| + \\ + \sum_{v=v_0}^{\infty} |\sigma_{m+p,v}(\zeta_0, z_1) - \sigma_{mv}(\zeta_0, z_1)| |a_v| = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

On a, par hypothèse,  $\sum_{v=0}^{\infty} |a_v| = a$  (cf. (1.4)),  $v_0$  peut donc être choisi tel qu'il vérifie l'inégalité

$$(7.3) \quad \sum_{v=v_0}^{\infty} |a_v| \leq \frac{\eta}{4K}.$$

D'autre part, d'après (6.4),

$$(7.4) \quad |\sigma_{m+p,v}(\zeta_0, z_1) - \sigma_{mv}(\zeta_0, z_1)| \leq 2K.$$

Il découle de (7.3) et (7.4) que

$$(7.5) \quad \Sigma_2 \leq \frac{\eta}{2}.$$

Nous avons vu (cf. (6.2)) que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_{mv}(\zeta_0, z_1) = 1$  pour chaque  $v$ . Comme  $v_0$  est fixé par (7.3), il existe un entier  $m_0 = m_0(\eta)$  tel que l'inégalité

$$(7.6) \quad |\sigma_{m+p,v}(\zeta_0, z_1) - \sigma_{mv}(\zeta_0, z_1)| \leq \frac{\eta}{2a}$$

soit vérifiée lorsque  $m > m_0$  et  $v < v_0$ . Il suit ainsi de (1.4) et (7.6) que

$$(7.7) \quad \Sigma_1 \leq \frac{\eta}{2}.$$

(7.1) est donc la conséquence de (7.5), (7.7) et (7.2).

### § 8. Démonstration du théorème 3

On établira l'existence d'une fonction  $f_1(z)$  régulière pour  $|z| < 1$  se développant en une série de Taylor  $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$  uniformément mais non absolument convergente pour  $|z| = 1$ , ayant une fonction transformée  $f_2(z)$  dont la série de Taylor  $\sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) z^v$  est de même uniformément mais non absolument convergente pour  $|z| = 1$  quelle que soit la valeur de  $\zeta_0$ . Le raisonnement qui suit est fondé sur le théorème suivant de L. FEJÉR [11]: Soit  $\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$  une fonction régulière et univalente pour  $|z| < 1$ , continue pour  $|z| \leq 1$ . Alors la série  $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$  est uniformément convergente sur la circonférence  $|z| = 1$ .

Désignons par  $\Delta$  un domaine limité par une courbe de Jordan  $J$  ayant au moins un point, soit  $P$ , non accessible par une courbe de longueur finie de l'intérieur de  $\Delta$ . L'exemple d'une telle courbe est représenté sur la figure 3.  $J$  y est composée des côtés d'un triangle dont  $P$  est un sommet et d'une suite infinie de couples de coupures rectilignes s'accumulant en  $P$ . Chaque coupure parcourue dans les deux sens représente une ligne double. Chaque couple de coupures est formé de deux segments de droite parallèles à une direction fixe et limite une bande; la longueur totale de toutes ces bandes est supposée infinie.

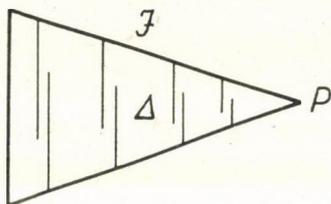


Figure 3.

Cela étant, soit  $f_1(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$  la fonction régulière et univalente pour  $|z| < 1$ , continue pour  $|z| \leq 1$  qui applique le cercle  $|z| < 1$  sur  $\Delta$  et la circonférence  $|z| = 1$  sur  $J$  tel que  $P$  soit le point homologue à  $z = 1$ . Selon le théorème cité de FEJÉR  $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$  est uniformément convergente pour  $|z| = 1$ . Le rayon  $(0, 1)$  du cercle  $|z| \leq 1$  se transforme par  $f_1(z)$  en une courbe  $\Gamma_1$  allant d'un point de  $\Delta$  au point  $P$ . Soit  $0 < \xi < 1$ , alors  $f_1(z)$  change l'intervalle  $(0, \xi)$  de l'axe réel en un arc de  $\Gamma_1$  de longueur

$$(8.1) \quad A_1(\xi) = \int_0^{\xi} |f_1'(x)| dx \geq \int_0^{\xi} \left( \sum_{v=1}^{\infty} v |a_v| x^{v-1} \right) dx = \sum_{v=1}^{\infty} |a_v| \xi^v.$$

La longueur de  $\Gamma_1$  étant infinie,  $A_1(\xi) \rightarrow \infty$  lorsque  $\xi \rightarrow 1$ , c'est-à-dire  $\sum_{v=0}^{\infty} |a_v| = \infty$ .

La série  $\sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$  est donc uniformément mais non absolument convergente pour  $|z| = 1$ .

D'autre part la fonction  $Z = \frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}$  applique le cercle  $|z| \leq 1$  sur lui-même en faisant correspondre au point  $z = \frac{1 + \zeta_0}{1 + \bar{\zeta}_0}$  le point  $Z = 1$ .

Par conséquent  $f_2(z) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) z^v$  est également régulière et univalente pour  $|z| < 1$ , continue pour  $|z| \leq 1$ , applique le cercle  $|z| < 1$  sur  $\Delta$  et la circonférence  $|z| = 1$  sur  $J$ ,  $P$  étant le point homologue à  $z = e^{i\theta}$ . La série  $\sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) z^v$

est uniformément convergente pour  $|z| = 1$  selon le théorème de FEJÉR. Le rayon  $(0, e^{i\nu})$  du cercle  $|z| \leq 1$  se transforme par  $f_2(z)$  en une courbe  $\Gamma_2$  issue d'un point de  $\Delta$  et aboutissant en  $P$ . En posant  $z = \rho e^{i\nu}$ , on peut écrire sans plus la relation analogue à (8.1):

$$A_2(\xi) = \int_0^\xi |f_2(\rho e^{i\nu})| d\rho \leq \int_0^\xi \left( \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |b_\nu(\zeta_0)| \rho^{\nu-1} \right) d\rho = \sum_{\nu=1}^{\infty} |b_\nu(\zeta_0)| \xi^\nu$$

et  $A_2(\xi) \rightarrow \infty$  pour  $\xi \rightarrow 1$ , donc  $\sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu(\zeta_0)| = \infty$ . La série  $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu$  est aussi

uniformément mais non absolument convergente pour  $|z| = 1$  quelle que soit la valeur de  $\zeta_0$ .

On retrouve la même idée dans la note [12] de J. E. LITTLEWOOD qui emploie aussi le domaine du type  $\Delta$  (dit «domaine crocodile») pour démontrer que certaines séries ne sont pas absolument convergentes.

(Reçu le 9 Août 1961, révisé le 25 Avril 1962.)

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] TURÁN, P.: „A remark concerning the behaviour of a power-series on the periphery of its convergence circle.” *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **12** (1956) 19–26.
- [2] ALPÁR, L.: „Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence, I., II., III.” *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **3** (1958) 1–12, **3** (1958) 141–158, **5** (1960) 97–152.
- [3] ALPÁR, L.: „Egyes hatványsorok abszolút konvergenciája a konvergencia kör kerületén”. *Matematikai Lapok* **11** (1960) 312–322.
- [4] HARDY, G. H.: „A theorem concerning Taylor's series”. *The quarterly Journal of pure and applied Mathematics* **44** (1913) 147–160.
- [5] FEJÉR, L.: „Über Potenzreihen, deren Summe im abgeschlossenen Konvergenzkreis überall stetig ist.” *Sitzungsberichte der K. Bayer. Akad. der Wiss., Math.-phys. Kl.*, (1917) 33–50.
- [6] KNOPP, K.—LORENTZ, G. G.: „Beiträge zur absoluten Limitierung.” *Archiv der Mathematik* **2** (1949–50) 10–16.
- [7] BAJŠANSKI, B. M.: „Sur une classe générale de procédés de sommation du type Euler—Borel.” *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences* **10** (1956) 131–152.
- [8] BANACH, S.: *Théorie des opérations linéaires*. Monografie Matematyczne, Tome I., Warszawa (1932).
- [9] ZYGMUND, A.: *Trigonometrical series*. Chelsea Publishing Co. New York (1952).
- [10] DE BRUIJN, N. G.: *Asymptotic methods in analysis*. North-Holland Publishing Co. Amsterdam, P. Noordhoff-Groeningen (1958).
- [11] FEJÉR, L.: „La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple.” *Comptes Rendus* (Paris) **156** (1913) 46–49.
- [12] LITTLEWOOD, J. E.: „On a theorem of Hardy and Littlewood.” *The Journal of the London Mathematical Society* **13** (1938) 194–195.

## О НЕКОТОРЫХ ПРЕОБРАЗОВАННЫХ ВИДАХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ, АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ НА ГРАНИЦАХ СВОИХ КРУГОВ СХОДИМОСТИ

L. ALPÁR

### Резюме

Пусть  $f_1(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$  регулярная в круге  $|z| < 1$  функция, и  $\zeta_0 (0 < |\zeta_0| < 1)$  зафиксированное число. Функция  $f_2(z)$ , определенная соотношением

$$(1.1) \quad f_1\left(\frac{z - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) z^v$$

является тогда тоже регулярной функцией для  $|z| < 1$ . Если предположить еще, что  $\sum_{v=0}^{\infty} |a_v| < \infty$ , тогда спрашивается, что можно высказать о поведении степенного ряда функции  $f_2(z)$  на границе ее круга сходимости. На этот вопрос дают ответ две первые теоремы, доказанные в этой статье. Третья теорема является обратной теоремой второй.

Первая теорема утверждает, что существует такая функция  $f_1(z)$ , что степенный ряд преобразованной по (1.1) функции  $f_2(z)$  не абсолютно сходится на окружности  $|z| = 1$ , то есть  $\sum_{v=0}^{\infty} |b_v(\zeta_0)| = \infty$ .

Напротив, вторая теорема высказывает, что для любой функции  $f_1(z)$  из выполнения условия  $\sum_{v=0}^{\infty} |a_v| < \infty$  всегда следует равномерная сходимость степенного ряда

$\sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) z^v$  для всех  $|z| = 1$  и далее, если  $|z_1| = |z_2| = 1$  и  $z_1 = \frac{z_2 - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 z_2}$ , тогда

$$f_1(z_1) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z_1^v = f_2(z_2) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v(\zeta_0) z_2^v.$$

Сравнивая эти две теоремы мы видим, что существуют такие функции  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$ , которые в соответствующих точках единичного круга  $|z| = 1$  имеют те же самые значения, когда  $z_1$  и  $z_2$  пробегают окружность  $|z| = 1$  и, всё таки, значения первой функции представлены абсолютно сходящимся степенным рядом, а значение второй равномерно, но не абсолютно сходящимся степенным рядом.

Третья теорема утверждает, что существует такая функция  $f_1(z)$ , степенный ряд которой равномерно, но не абсолютно сходится на окружности  $|z| = 1$  и преобразованная функция  $f_2(z)$ , которой представлена также только равномерно, но не абсолютно сходящимся на окружности  $|z| = 1$  степенным рядом, то есть для которой  $\sum_{v=0}^{\infty} |b_v(\zeta_0)| = \infty$ , каким бы ни было значение числа  $\zeta_0$ , если только  $0 < |\zeta_0| < 1$ . Это означает, что степенные ряды равномерно, но не абсолютно сходящиеся на окружности  $|z| = 1$ , не все могут быть получены путем какого бы то ни было преобразования типа (1.1) степенного ряда, абсолютно сходящегося на окружности  $|z| = 1$ .