SUR UN PROBLÈME DE SUBSTITUTION DE P. VERMES

par

J. DÉNES — C. PÁSZTOR

Nous connaissons ce problème de P. VERMES d'après la communication de G. GRÄTZER. P. VERMES nous a fait savoir par lettre que ce problème a été publié dans [3] et résolu dans [4]. Son résultat est identique au nôtre.

Problème. *Est-ce que toutes les substitutions α sur les éléments de l'ensemble $E = \{1, 2, \dots\}$ peuvent être le produit des* chapelets[1] *de nombre fini?*

Désignons par S_E l'ensemble de toutes les substitutions α sur les éléments de E.

Dans cet article nous examinons la structure de cycle des substitutions infinies et sa relation avec la structure du chapelet. L'un de notre résultat est que toutes les substitutions $\alpha \in S_E$ peuvent être le produit de deux chapelets au plus. (Theorème 3.)

Lemme 1. *Une substitution $\alpha \in S_E$ est un chapelet où le produit $\alpha = \sigma\eta^{-1}$, où η^{-1} est un chapelet et σ une substitution qui n'a que des cycles de longueur infinie.*

Démonstration. On sait (voir SERRET [2]) qu'en multipliant une substitution π composée de k cycles par une transposition τ, la substitution $\pi\tau$ se compose de $k + 1$ ou $k - 1$ cycles selon que les deux éléments de τ sont dans le même cycle de la substitution π ou non.

Soit $\pi = \xi_1 \xi_2$ où ξ_1 est un cycle de longueur finie et ξ_2 est un cycle de longueur infinie, $\tau = (ab)$ où $a \in \xi_1$, $b \in \xi_2$, $a,b \in E$ donc $\pi\tau$ est une substitution composée d'un seul cycle de longueur infinie.

Soit $\alpha \in S_E$, si α n'est pas un chapelet, rangeons ses cycles conformément à la grandeur de leurs plus petits éléments. Désignons par $a_{n,1}$ le plus petit élément du cycle ξ_n, alors $a_{n,1} < a_{n+1,1}$.

Le lemme est vrai, si tous les cycles ξ_i de α sont de longueur infinie. Supposons que α a aussi des cycles de longueur finie.

---

[1] Une substitution $a = \prod_{i=1}^{\infty} a_i$ sur les éléments de l'ensemble E est un chapelet, si l'on peut décomposer la droite de nombre E en des sections de longueur finie (ce sont des grains du chapelet) de sorte que a_i ne permute que les éléments qui sont dans l'i-ième section.

Les chapelets sont appelées par P. VERMES „string" dont les éléments sont les „beads". Là, les élément non nulle d'un matrix de substitution de chapelet se figurent dans les „grains" (carré fini) se situant le long de la diagonale du matrix.

Désignons par $N(f)$ l'ensemble des nombres d'ordre des cycles de longueur finie et du premier cycle de longueur infinie (s'il existe) de α, et par $a_{n,1}$, le plus petit élément du cycle ξ_n, alors

$$\sigma = \alpha \prod_{n \varepsilon N(f)} (a_{n,1}, a_{n,1} - 1) = \alpha\eta$$

n'a que des cycles infinie et par conséquence

$$\alpha = \sigma\eta^{-1}$$

où σ n'a que des cycles de longueur infinie, η et η^{-1} sont des chapelets.

Remarque 1. Dans la décomposition en cycle de η il n'y a que des cycles de longueur finie car dans le cas contraire dans la substitution α les plus petits éléments des cycles consécutifs seraient $k, k+1, k+2, \ldots$ C'est à dire que α serait déjà un chapelet.

Remarque 2. Si α n'a que des cycles de longueur finie, σ n'a qu'un seul cycle de longueur infinie.

Théorème 1. *Une substitution σ_1 n'ayant qu'un seul cycle de longuer infinie peut être le produit de deux chapelets*[2].

Démonstration. Nous montrerons tout d'abord quelques décompositions de σ_1 en produit de deux substitutions d'ordre fini dont nous aurons besoin plus tard.

a) Soit

$$\sigma_1 = (\ldots a_{-1}\, a_0\, a_1 \ldots)\,.$$

Plaçons d'une manière quelconque des lignes séparatives de nombre infini entre les éléments de σ_1, mais de façon qu'il y ait au moins un élément de σ_1 entre deux lignes consécutives. Donnons comme nombre d'ordre le chiffre 1 à une partie finie située entre deux lignes consécutives quelconques. Soient les nombres impairs (les nombres pairs) dans l'ordre de succession à droite (à gauche) du point initial, chaques chiffres constituant le numéro d'ordre de chaque partie. Désignons les éléments de l'i-ième partie par $a_{i,k}$:

$$\sigma_1 = (\ldots \underset{\ldots 2n \ldots}{|\, a_{2n,1} \ldots a_{2n,n(2n)} \,|} \ldots \underset{\ldots 2 \ldots}{|\, a_{2,1} \ldots a_{2,n(2)} \,|} \times$$

$$\times \underset{\ldots 1 \ldots}{a_{1,1} \ldots a_{1,n(1)}} \,|\, \underset{\ldots 3 \ldots}{a_{3,1} \ldots a_{3,n(3)}} \,|\, \ldots \,|\, \ldots) \tag{1}$$

Soit l'i-ième cycle ($i = 1, 2, \ldots$) de la substitution π la réunion des $2(i-1)$-ième et $2(i-1)+1$-ième parties de σ_1 où l'ordre des éléments est le même que dans σ_1. Cherchons les substitutions τ et τ' qui sont les résolutions des équations

$$\sigma_1 = \tau\pi \quad \text{et} \quad \sigma_1 = \pi\tau' \tag{2}$$

[2] σ_1 est décomposable en produit de deux substitutions d'ordre 2. (Voir [5] page 8). Décomposition:

$$(\ldots \bar{a}_2\, \bar{a}_1\, a_1\, a_2 \ldots) = \prod_{i=1}^{\infty} (a_i\, \bar{a}_i) \prod_{i=1}^{\infty} (a_{i+1}\, \bar{a}_i)\,.$$

Cela est aussi vrai dans le cas d'une substituion α sur les éléments d'un ensemble fini. (Voir [1] page 15, [5] page 8.)

où π contient les cycles de longueur finie de forme suivant

$$\pi = (a_{1,1} \dots a_{1,n(1)})\,(a_{2,1} \dots a_{2,n(2)}\, a_{3,1} \dots a_{3,n(3)}) \dots$$

Nous recevons facilement que

$$\tau = \prod_{i=1}^{\infty} (a_{2i,n(2i)}\, a_{2i-1,n(2i-1)})$$

et que

$$\tau' = (a_{1,1}\, a_{3,1}) \prod_{i=1}^{\infty} (a_{2i,1}\, a_{2i+3,1})$$

où $a_{k,1}$ est le premier élément (pas le plus petit) et $a_{k,n(k)}$ le dernier élément de la k-ième partie de σ_1.

b) Obtenons $\pi^{(1)}$ de π en eliminant quelques de ses éléments $a_{i,j(i)}$ où $1 < j(i) < n(i)$ et cherchons une telle substitution $\tau^{(1)}$ que

$$\sigma_1 = \tau^{(1)} \pi^{(1)} \tag{3}$$

Soit par exemple

$$\pi^{(1)} = (a_{1,1}\, a_{1,2}\, a_{1,4}\, a_{1,6} \dots a_{1,n(1)})\,(a_{2,1}\, a_{2,4} \dots a_{2,n(2)}\, a_{3,1}\, a_{3,2}\, a_{3,5} \dots a_{3,n(3)}) \dots$$

où les éléments $a_{1,3}, a_{1,5}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{3,3}, a_{3,4} \dots$ de σ_1 ne figurent pas dans $\pi^{(1)}$. Désignons ces éléments ne figurant pas avec $\bar{a}_{i,k}$.

$$\tau^{(1)} = \underbrace{(a_{1,2}\, \bar{a}_{1,3})\,(a_{1,4}\, \bar{a}_{1,5})\,(a_{1,n(1)}\, a_{2,n(2)})}_{\tau_1^{(1)}}\, \underbrace{(a_{2,1}\, \bar{a}_{2,2}\, \bar{a}_{2,3})\,(a_{3,2}\, \bar{a}_{3,3}\, \bar{a}_{3,4})\,(a_{3,n(3)}\, a_{4,n(4)})}_{\tau_2^{(1)}} \dots \tag{4}$$

C'est à dire

$$\tau^{(1)} = \tau(a_{1,2}\, \bar{a}_{1,3})\,(a_{1,4}\, \bar{a}_{1,5})\,(a_{2,1}\, \bar{a}_{2,2}\, \bar{a}_{2,3}) \dots .$$

On voit que $\tau^{(1)}$ permute encore les éléments $\bar{a}_{i,j}$ de sorte que des cycles de $\tau^{(1)}$ se composent des éléments $\bar{a}_{i,j+k}$ $(k = 1, 2, \dots l)$ et de l'élément $a_{i,j}$.

Après tout cela il est facile de démontrer une décomposition de σ_1 que $\sigma_1 = \tau^{(1)}\pi^{(1)}$ où $\tau^{(1)}$ et $\pi^{(1)}$ sont aussi des chapelets. Construction de $\pi^{(1)}$:

Considérons le plus grand élément i_0 d'une partie finie de σ_1. Faisons une marque à $a_i \in \sigma_1$ si $a_i \leqq i_0$. Désignons par $a_{1,1}$ $a_1(_{n(1)})$ le premier (dernier) élément marqué. La partie d'ordre 1 de σ_1 se compose des éléments $a_{1,i}$ qui se situent entre $a_{1,1}$ et $a_{1,n(1)}$ (désigné par $\{a_{1,1}\, a_{1,n(1)}\}$). Le premier cycle de $\pi^{(1)}$ se compose des élément marqués de σ_1 où $i_0 \geqq a_{1,i} \geqq 1$ en conservant leur ordre de σ_1.

Vu (1) l'élément qui est le voisin de gauche (de droite) de $a_{1,1}$ $(a_{1,n(1)})$ est $a_{2,n(2)}$ $(a_{3,1})$. Considérons le plus grand élément i_1 de $\{a_{2,n(2)}, a_{3,1}\}$ Il est clair que $i_1 > i_0$. Désignons par a_i^1 les $a_i \in \sigma_1$ si $i_0 < a_i \leqq i_1$. Soit $a_{2,j}^1$ $(a_{3,s}^1)$ le premier (dernier) élément ainsi marqué. (Il est possible que $a_{2,j}^1 = a_{2,n(2)}^1$ ou $a_{3,1}^1 = a_{3,s}^1$) Vu (1) l'élément qui est le voisin de gauche (de droite) de $a_{2,j}^1$ $(a_{3,s}^1)$ est $a_{2,j-1}$ $(a_{3,s+1})$. Considérons le plus grand élément i_2 de $\{a_{2,j-1}, a_{3,s+1}\}$. Désignons par a_i^2 les $a_i \in \sigma_1$ si $i_1 < a_i \leqq i_2$. Soit $a_{2,1}^2$ $(a_{3,n(3)}^2)$ le premier (dernier) élément marqué. (Il est possible que $a_{2,1}^2 = a_{2,j-1}^2$ ou $a_{3,n(3)}^2 = a_{3,s+1}^2$)

Les parties d'ordre 2 et 3 de σ_1 seront $\{a_{2,1}^2, a_{2,n(2)}^1\}$ et $\{a_{3,1}^1\, a_{3,n(3)}^2\}$. Le deuxième cycle de $\pi^{(1)}$ se compose des éléments marqués de $\{a_{2,1}^2, a_{2,n(2)}^1\}$ et de $\{a_{3,1}^1, a_{3,n(3)}^2\}$ $i_0 < a_{2,j}^m, a_{3,k}^m \leqq i_2$ $(m = 1, 2)$ en conservant l'ordre des éléments de σ_1. En continuant cette procédure les cycles suivants de $\pi^{(1)}$ permutent des éléments $i_2 < a_{4,j}, a_{5,k} \leqq i_4 \ldots$ donc $\pi^{(1)}$ est un chapelet.

Puisque la structure de $\tau^{(1)}$ est comme (4), nous pouvons voir que $\tau_1^{(1)}$ ne permute que les éléments $i_1 < a_i \leqq i_3$ entre eux, $\tau_2^{(1)}$ les éléments $i_3 < a_i \leqq i_5$ donc $\tau^{(1)}$ est aussi un chapelet.

Théorème 2. *La substitution* $\alpha = \sigma_1 \eta$ *(*η *est un chapelet) peut être le produit de deux chapelets.*

Démonstration. Nous avons montré que $\sigma_1 = \tau^{(1)}\pi^{(1)}$. Ici nous exprimerons σ_1 en un autre forme $\sigma_1 = \tau^{(2)}\pi^{(2)}$ où $\tau^{(2)}$ et $\pi^{(2)}\eta$ seront des chapelets. Le plus grand élément du premier cycle de $\pi^{(1)}$ est i_0. Examinons quel est l'ensemble dont les éléments sont permutés seulement entre eux par η et dont le plus grand élément $i_0' \geqq i_0$. Naturellement le premier cycle de $\pi^{(2)}$ se compose des éléments $i_0' \geqq i_0 \geqq a_i$. La construction ultérieure de $\pi^{(2)}$ reste la même que celle de $\pi^{(1)}$ mais nous choisissons comme ci-dessus l'élément i_2' au lieu de i_2. Ainsi $\pi^{(2)}\eta = \pi^{(3)}$ sera un chapelet. Car la construction de $\tau^{(2)}$ n'a pas changé donc $\tau^{(2)}$ est aussi un chapelet. Et ainsi $\sigma_1\eta = \tau^{(2)}\pi^{(3)}$.

Théorème 3. *Une substitution quelconque* $\alpha_n = \sigma_n\eta$ *peut être le produit de deux chapelets. Ici* η *est un chapelet,* σ_n *est une substitution constituée de* n *cycles de longueur infinie* $(1 \leqq n \leqq \infty)$ (vue lemme 1).

Démonstration. a) Tout d'abord nous montrerons que la décomposition $\sigma_n = \varrho\tau$ d'une substitution σ_n $(1 \leqq n \leqq \infty)$ est toujours possible, où τ est un chapelet et ϱ est une substitution de cycle de longueur finie.

Nous exprimerons σ_1 comme dans (2) en forme $\sigma_1 = \pi\tau'$ où τ' est une substitution d'ordre 2. Pour que τ' soit un chapelet au cours de la construction on doit simplement obtenir l'inégalité toujours réalisable

$$\max(a_{2i,1}, a_{2i+3,1}) < \min(a_{2(i+1),1}, a_{2(i+1)+3,1}) \tag{5}$$

car en cas $i > j$ σ_i et σ_j n'ont pas l'élément commun, le produit $\tau_i'\pi_j$ est commutable et ainsi

$$\sigma_n = \prod_{i=1}^{n} \pi_i \tau_i' = \prod_{i=1}^{n} \pi_i \prod_{i=1}^{n} \tau_i' = \pi_{(n)}\tau_{(n)}\,.$$

$\tau_{(n)}$ est un chapelet si tous les éléments d'une transposition quelconque de $\tau_{(n)}$ sont plus petits ou plus grands que les deux éléments d'une autre transposition quelconque de $\tau_{(n)}$.

Pour l'obtenir il suffit que (5) soit vrai pour tous les τ_i' et qu'après le rangement dans l'ordre de grandeur des transpositions de $\tau_{(n)}$ l'ordre des transpositions soit le suivant:

L'ordre des transpositions	l'ordre des cycles de longueur infinie						
	1	2	3		...	n	...
1	1	2	5	9			
2	3	4	8				
3	6	7					
4	10						

Si le j-ième élément de l'i-ième ligne est k, alors la k-ième transposition de $\tau_{(n)}$ est l'i-ième transposition du j-ième cycle. Cela est toujours réalisable. Ainsi $\tau_{(n)}$ est un chapelet et $\pi_{(n)}$ est une substitution de longueur finie dans $\sigma_n = \pi_{(n)}\tau_{(n)}$.

b) Nous montrerons maintenant que dans la décomposition $\alpha = \sigma_n \eta = \pi_{(n)}\tau_{(n)}\eta$ le produit $\tau_{(n)}\eta$ peut être un chapelet, parce qu'on peut toujours obtenir que les éléments d'une transposition soient plus grands que le plus grand élément de l'ensemble — contenant les éléments de la transposition précédente — dont les éléments sont permutés entre eux par η. Ainsi $\alpha = \pi_{(n)}\tau_{(n)}^{(1)}$.

c) En appliquant le résultat du lemme 1 nous pouvons construire le cycle σ_1 de longueur infinie et le chapelet η que $\pi_{(n)} = \sigma_1\eta$ et $\eta\tau_{(n)}^{(1)}$ soit un chapelet. En désignant par $(a_1 a_1')$, $(a_2 a_2')$ ... les transpositions consécutives de $\tau_{(n)}^{(1)}$ et en considérant que

$$\pi_{(n)} = (a_1 \ldots)(a_2 \ldots)(a_3 \ldots a_1' \ldots)(a_4 \ldots a_2' \ldots)(a_5 \ldots)(a_6 \ldots a_3' \ldots) \ldots$$

on obtiens que:

$$\eta = (a_1 a_1' a_2)(a_3 a_3' a_4 a_5) \ldots$$

est un tel chapelet. Car $\eta\tau_{(n)}^{(1)} = \eta^{(1)}$ est un chapelet et ainsi $\alpha = \sigma_1\eta^{(1)}$. Selon le théorème 2 $\alpha = \sigma_1\eta^{(1)}$ peut être le produit de deux chapelets.

Théorème 4. *Tous les chapelets peuvent être le produit de deux chapelets speciaux*[3] *au plus.*

Démonstration. Car tous les chapelets η sont le produit des substitutions η_i sur les éléments des ensembles $M_i = \{a_{i_1} \ldots a_{i_n}\}$ où $M_i \cap M_j = 0$ si $i \neq j$ il est suffisant de montrer qu'une substitution β sur les éléments de l'ensemble fini M peut être le produit de deux chapelets spéciaux au plus.

Considérons les cycles de β écrits dans l'ordre comme dans la démonstration du lemme 1. Le premier élément d'un cycle soit son plus petit élément. Tout comme dans le lemme 1

$$\beta(b_{2,1}\, b_{2,1} - 1)(b_{3,1}\, b_{3,1} - 1) \ldots (b_{n,1}\, b_{n,1} - 1) = \beta\eta = \gamma$$

γ et η sont des chapelets spéciaux et

$$\beta = \gamma\eta^{-1}$$

Théorème 5. *Une substitution $\alpha \in S_E$ est le produit de quatre chapelets spéciaux au plus.*

Démonstration. Ce théorème découle des théorèmes 3 et 4.

(Reçu le 12 Avril 1962.)

---

[3] Un chapelet $\alpha = \prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ est un chapelet spécial si chacun des grains α_i constitue d'un seul cycle, (y compris les cycles de longueur un aussi.) Par ex: $\eta = (1,2)\,(4,5)$ est un chapelet spécial dont les grains sont (1,2), (3), (4,5), (6), (7), ... $\eta = (1,3)\,(5,7)\,(9,11), \ldots$ est un chapelet dont les grains sont [(1,3) (2)], [(4)], [(5,7) (6)], [(8)], ..., ainsi η n'est pas un chapelet special.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Carmichael, R. D.: *Introduction to the theory of groups of finite order.* New-York Dover Publ. 1956.
[2] Serret, J. A.: *Handbuch der höheren Algebra.* Taubner, Leipzig, 1879.
[3] Vermes, P.: „Matrix structure of basic sets of polynomials." *Annales Univ. Sci. Budapestinensis de R. Eötvös Nom. Sectio Mat.* 1960/61, 383—388.
[4] Vermes, P.: „Multiplicative groups of row-and column finite infinite matrices." *Annales Univ. Sci. Budapestinensis de R. Eötvös Nom. Sectio Mat.* 1962 (sous presse).
[5] Wielandt, H.: *Unendliche Permutationsgruppen.* Tübingen Universität, 1959.

ОБ ОДНОЙ ПОДСТАНОВОЧНОЙ ПРОБЛЕМЕ VERMES-A

J. DÉNES и C. PÁSZTOR

Резюме

Мы исследуем разложение на множители произвольных подстановок α определенные на множество $E=\{1, 2, \ldots\}$, где множители умножения являются цепи, (подстановка $\alpha=\prod_{i=1}^{\infty} c_i$ определенная на множество E называется цепи — st ing, chapelet — если числовая прямая разложена на конечные дизъюнктные части таким образом, что c_i пермутирует только элементы, входящие в $i^{-\text{ой}}$ части) или специальные цепи. (Цепь $\alpha=\prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ тогда называется специальной, если каждый α_i является подстановкой из одного цикла).

Полученные результаты:

1) Произвольную подстановку c, определенную на множестве E (α не является цепью), можно написать как произведение двух цепей.

2) Произвольную подстановку α, определенную на множестве E (α не является специальной цепью), можно написать как произведение четырех специальных цепей.