MENGENTHEORETISCHE BETRACHTUNG DER EUKLIDISCHEN UND HAUPTIDEALRINGE

von

G. POLLÁK

In dieser Arbeit verfolgen wir ein zweifaches Ziel. Einerseits wird durch eine mengentheoretische Verallgemeinerung des Begriffes des euklidischen bzw. des Hauptidealringes die Aufmerksamkeit des Lesers auf einige — mit den erwähnten verwandte — Begriffe hingelenkt, andererseits wird sich dabei geklärt, welche Eigenschaften der genannten Ringe von mengentheoretischer Herkunft sind, und welche im wesentlichen auf den in den Ringen definierten Operationen beruhen.

Bezüglich des ersten bemerken wir folgendes. Das gruppentheoretische Analogon des Hauptidealringes (bzw. euklidischen Ringes), das durch das übliche Ersetzen des Begriffes des Ideals durch den Begriff des Normalteilers entsteht, scheint vielzu gekünstelt und kompliziert zu sein. Beschränken wir uns dagegen auf abelsche Gruppen, so gelangen wir zu der wohlbekannten Tatsache, dass die Untergruppen einer zyklischen Gruppe selbst zyklisch sind, und zu der nicht weniger trivialen Ergänzung, dass die zyklischen Gruppen (die also in diesem Fall die Rolle der Hauptidealringe spielen) auch schon »euklidisch« im geeigneten Sinne sind. Die kommutativen Hauptidealringe (im weitesten Sinne) werden in [4] untersucht, die kommutativen Halbgruppen, deren sämtliche Ideale Hauptideale sind, werden vom Herrn L. Megyesi untersucht. Aus den unendlich vielen bisher nicht beschriebenen Spezialfällen der im folgenden eingeführten euklidischen und Hauptidealmengen möchten wir als die interessantesten die nichtkommutativen euklidischen (siehe [6]) und Hauptidealringe und ihre halbgruppentheoretischen Analoga erwähnen. Es wäre auch nicht ohne Interesse die Ringe, deren sämtliche Unterringe durch je ein Element erzeugt werden, zu beschreiben.

In Hinsicht des zweiten Ziels wird sich u.a. ergeben, dass der Satz, laut dessen alle euklidischen Ringe Hauptidealringe sind, ein Spezialfall eines mengentheoretischen Satzes, also unabhängig von den algebraischen Operationen ist. Die Eigenschaften des Idealverbands eines euklidischen Ringes sind dagegen durchaus den algebraischen Eigenschaften des Ringes zu verdanken, wie es aus Satz 4 klar wird.

§ 1. Euklidische Mengen

Die Menge H soll eine Klassenmenge heissen, wenn zu jedem Element a aus H gewisse Teilmengen H_a^α von H zugeordnet sind, wobei α eine von a abhängige Indexmenge Γ_a durchläuft.

Die Teilmengen H_a^a werden wir *Restklassen nach a* nennen. Sie werden die Rolle der Restklassen mod (a) in einem Ringe übernehmen. Bequemlichkeitshalber wollen wir noch die (in Ringen etwas ungewöhnliche, aber natürlich ganz unwesentliche) Voraussetzung machen, dass unter den Restklassen nach a immer auch die lehre Menge vorkommt.

Ein solches Element, welchem nur die leere Restklasse zugeordnet ist, nennen wir ein Zero[1]). Im allgemeinen ist es natürlich nich ausgeschlossen, dass in H mehrere Zeros existieren. Die Menge sämtlicher Zeros wird durch Z bezeichnet.

Endlich soll eine Menge $M(\subseteqq H)$ ein vollständiges Restsystem nach a genannt werden, falls $M \cap H_a^a$ für jedes nichtleeres H genau ein Element hat und ausserdem $M \subseteqq \bigcup\limits_a H_a^a$ besteht.

Es gilt nun

Satz 1. *Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:*

A) *es gibt eine Abbildung φ der Klassenmenge H in eine wohlgeordnete Menge, wobei in jeder nichtleeren Restklasse H_a^a ein Element b mit $\varphi(b) < \varphi(a)$ enthalten ist;*

B) *für jede Abbildung φ von H in eine wohlgeordnete Menge und jedes Element c aus H gibt es ein $a \in H$ mit $\varphi(c) \leqq \varphi(a)$, wofür in jeder nichtleeren Restklasse H_a^a ein Element b mit $\varphi(b) < \varphi(c)$ enthalten ist;*

C) *in jeder nichtleeren Teilmenge H' von H gibt es ein Element a derart, dass die Komplementärmenge $H - H'$ mit jeder nichtleeren Restklasse H einen nichtleeren Durchschnitt hat.*

Die Klassenmenge H werden wir *euklidisch* nennen, wenn für sie eine der Bedingungen A, B, C erfüllt ist. Eine Abbildung die die Bedingung A erfüllt, wird eine *euklidische Norm* genannt.

Beweis. Aus C folgt B. Besteht nämlich C und ist φ eine beliebige Abbildung von H in eine wohlgeordnete Menge, so bezeichne H_c $(c \in H)$ die Menge derjenigen a, für welche $\varphi(c) \leqq \varphi(a)$ gilt. Wegen der Bedingung C gibt es in H_c ein Element a so, dass $(H - H_c) \cap H_a^a$ für jedes nichtleeres H_a^a nicht leer ist, also jedes solches H_a^a ein Element b mit $\varphi(b) < \varphi(c)$ enthält. Somit ist auch B erfüllt.

Aus B folgt A. Um dies zu zeigen nehmen wir an, dass A nicht besteht und führen die folgende Konstruktion durch. Alle Zeros von H bilden wir auf die Ordnungszahl 0 ab. Wenn schon auf jede Ordnungszahl β, die kleiner als die Ordnungszahl α ist, ein $b \in H$ abgebildet ist, so bezeichnen wir die Menge aller dieser b durch H_α und auf α bilden wir alle diejenigen a aus $H - H_\alpha$ ab, für welche H_α ein volles Restsystem nach a enthält. Die Menge dieser Elemente bezeichnen wir durch M_α. Es sei γ die kleinste Ordnungszahl, für welche M_γ leer ist. Es kann nicht $H = H_\gamma$ $(= \bigcup\limits_{\beta<\gamma} M_\beta)$ gelten, da dann die erhaltene Abbildung eine euklidische Norm wäre. Bilden wir nun sämtliche Elemente von $H - H_\gamma$ auf γ ab, und bezeichnen wir die gewonnene Abbildung durch φ, d.h. es sei

$$\varphi(a) = \begin{cases} \beta, & \text{falls } a \in M_\beta, \\ \gamma, & \text{falls } a \in H - H_\gamma. \end{cases}$$

[1] Die Übliche Definition des Ausdrucks „Restklasse nach Zero" (in einem Ring) ist von der hier angegebenen verschieden, für unsere Zwecke ist aber diese bequemer.

Ist nun $c \in H - H_\gamma$, so wird die Ungleichung $\varphi(c) \leqq \varphi(x)$ genau durch sämtliche $x \in H - H_\gamma$ erfüllt, aber unter diesen x gibt es keines, wofür H_γ ein vollständiges Restsystem enthielte, die Abbildung genügt also nicht der Bedingung B. Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

Aus A folgt C. In der Tat, φ sei eine euklidische Norm in H, H' eine nicht leere Untermenge von H und a ein Element von H' mit minimalem $\varphi(a)$. Wegen der Definition der euklidischen Norm gibt es ein vollständiges Restsystem R_a nach a, dessen sämtliche Elemente eine kleinere Norm als a haben. Wegen der Wahl von a gilt dann aber $R_a \subseteqq H - H'$, also auch C. Somit ist Satz 1 bewiesen.

Ist H ein Ring, und haben die am Anfang des Paragraphs eingeführten Begriffe den üblichen ringtheoretischen Sinn, so ergibt die Behauptung unseren Satzes: »A ist äquivalent mit B« eine Verschärfung des Satzes von Ch. Lemmlein [3], die von A. Lascu [2] stammt (der aber seinen Satz in einer irrtümlichen Allgemeinheit formuliert).

Sind a_0, a_1 Elemente einer euklidischen Menge H und φ eine euklidische Norm in H, so können wir an den Elementen a_0, a_1 einen *euklidischen Algorithmus* folgendermassen durchführen. Gibt es eine Restklasse $H_{a_1}^{a_1}$, die a_0 enthält, so wählen wir ein $a_2 \in H_{a_1}^{a_1}$ mit $\varphi(a_2) < \varphi(a_1)$. Sind schon $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$ definiert und gibt es eine Restklasse $H_{a_\nu}^{a_\nu}$, die $a_{\nu-1}$ enthält, so definieren wir $a_{\nu+1}$ als ein Element von $H_{a_\nu}^{a_\nu}$, wofür $\varphi(a) < \varphi(a_\nu)$ gilt. Gibt es keine solche Restklasse, so sagen wir, dass der Algorithmus nach $\nu - 1$ Schritten endet, und nennen $a_{\nu-1}$ das *Resultat*, a_ν das *Ende* des Algorithmus. Ein euklidischer Algorithmus endet trivialerweise immer nach endlich vielen Schritten. Eine Bedeutung kann ein solcher Algorithmus natürlich nur dann erhalten, wenn er mit einer Verallgemeinerung des Idealbegriffes in Beziehung kommt. Deshalb wollen wir jetzt eine solche Verallgemeinerung vollziehen.

§ 2. Ideale

Eine nichtleere Untermenge G der Klassenmenge H wird ein *Ideal* von H genannt, wenn aus $a, b \in G$, $a \notin Z$ folgt, dass eine solche b enthaltende Restklasse H_a^a existiert, die eine Teilmenge von G ist.

Im allgemeinsten Fall gilt der folgende Satz, der als eine Verallgemeinerung der Tatsache, dass jeder euklidische Ring ein Hauptidealring ist, angesehen werden darf.

Satz 2. *Es sei H eine euklidische Menge, φ eine euklidische Norm in H, G ein Ideal von H und*

$$(1) \qquad a \in G - Z \text{ mit minimaler Norm } \varphi(a).$$

Dann ist G die Vereinigungsmenge solcher Restklassen H_a^a, deren jede wenigstens ein Zero enthält.

Beweis. In der Tat, ist $b \in G$, so gibt es ein $H_a^a \subseteqq G$, wofür $b \in H_a^a$ ist, und hiermit ein $c \in H_a^a$ (also auch $c \in G$) mit $\varphi(c) < \varphi(a)$. Wegen (1) muss dann aber $c \in Z$ sein. Wir haben also erhalten, dass ein beliebiges $b \in G$ in einer solchen Restklasse H_a^a enthalten ist, die auch ein Zero enthält, was zu beweisen war.

Bei einer weiteren Voraussetzung, die noch immer eine grosse Allgemeinheit zulässt, können wir diesen Satz dem entsprechenden ringtheoretischen Satz noch etwas näherbringen. Zu diesem Zweck werden wir sagen, dass die

Elemente einer Teilmenge M der Klassenmenge H das Ideal G erzeugen, falls $M \subseteqq G$ und für jedes Ideal G' aus $M \subseteqq G'$ auch $G \subseteqq G'$ folgt.

Im allgemeinen kann es natürlich vorkommen, dass die Elemente einer vorgegebenen Teilmenge M kein Ideal erzeugen, entweder weil es überhaupt kein M enthaltendes Ideal gibt, oder weil der Durchschnitt der M enthaltenden Ideale kein Ideal ist. Damit es zu beliebigen zwei Elementen einer Klassenmenge H ein solches Ideal G gibt, welches beide Elemente enthält, ist es notwendig und hinreichend, dass

$$\bigcup_{\alpha} H_a^\alpha = H \qquad (a \in H - Z) \tag{2}$$

besteht.

Das Hinreichen folgt einfach daraus, dass in diesem Falle H selbst ein Ideal ist. Gibt es ferner zu jedem Elementenpaar a, b ein Ideal $G_{a,b}$, das a und b enthält, so gibt es bei einem festgewählten $a(\in H—Z)$ zu jedem $b(\in H)$ eine Restklasse $H_a^\alpha(\subseteqq G_{a,b})$, die b enthält, d.h. (2) ist auch notwendig.

Damit die Menge der Ideale der Klassenmenge H einen Halbverband nach der Operation $\cap$ bildet, ist es hinreichend, dass die Restklassen H_a^α bei einem festen a einen Halbverband nach derselben Operation bilden, d.h.

$$H_a^\alpha \cap H_a^\beta = H_a^\delta \qquad (\delta \in \Gamma_a) \tag{3}$$

für jedes Paar α, β besteht. Damit der Halbverband der Ideale vollständig ist, ist es hinreichend, dass der Halbverband der Restklassen H für alle a vollständig sei, d. h.

$$\bigcap_{\alpha \in \Delta} H_a^\alpha = H_a^\delta \qquad (\delta \in \Gamma_a \text{ für } \Delta \subseteqq \Gamma_a) \tag{4}$$

bestehe[2]). Ist nämlich $\{G_\gamma\}$ eine Menge von Idealen (γ durchläuft eine Indexmenge Γ) und ist $a \in G_\gamma - Z$, $b \in G_\gamma$ für alle γ, so gibt es für jedes γ ein $H_a^{\alpha_\gamma} \subseteqq G_\gamma$, das b enthält. Besteht nun (4), oder, falls Γ endlich ist, sogar nur (3), so ist $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} H_a^{\alpha_\gamma}$ einer Restklasse H_a^δ gleich, also gilt

$$b \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} H_a^{\alpha_\gamma} = H_a^\delta \subseteqq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma,$$

womit sich $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$ als Ideal erwiesen Hat.

Es ist nun merkwürdig, dass die Annahme von (4) (sogar samt (2)) keine Möglichkeit liefert, über die Ideale mehr als in Satz 2 zu sagen. Dagegen gilt

Satz 3. *H sei eine euklidische Menge. Gibt es für jedes $a \in H$ höchstens eine Restklasse H_a^ξ, für welche $H_a^\xi \cap Z$ nicht leer ist, so ist in H jedes Ideal ($\subsetneqq Z$) durch ein einziges Element erzeugt. Ferner ist dann in H jedes aufsteigende Idealkette endlich.*

Beweis. Es sei φ eine euklidische Norm in H, G ein Ideal und $a \in G - Z$ mit minimaler Norm $\varphi(a)$. Dann ist G zufolge Satzes 2 die Vereinigungsmenge solcher Restklassen H_a^α, für welche $H_a^\alpha \cap Z$ nicht leer ist. Da aber jetzt die

---

[2] Es wäre keine grosse Einschränkung, statt (4)

$$H_a^\alpha \cap H_a^\beta = \varnothing \qquad (\alpha, \beta \in \Delta, \quad \alpha \neq \beta) \tag{4'}$$

zu erfordern, denn im Falle $H_a^\alpha \subset H_a^\gamma$ hat die letztere Restklasse in den hier betrachteten Fragen keine selbständige Bedeutung.

einzige solche Restklasse H_a^ζ ist, so gilt

$$G = H_a^\zeta .$$

Es sei jetzt G' ein beliebiges Ideal, das a enthält. $G' \cap Z$ kann (wieder nach Satz 2) nicht leer sein, also muss es ein $H_a^\alpha \subseteqq G$ geben, das ein Zero enthält. Somit gilt $G = H_a^\zeta \subseteqq G'$. Die erste Hälfte des Satzes ist also bewiesen.

Um die zweite Aussage zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass es im Falle $G \subset G'$ ein Element c in $G' - Z$ gibt, wofür $\varphi(c) < \varphi(a)$ gilt. Wäre aber dies nicht der Fall, so hätte a auch in $G' - Z$ minimale Norm, und, wie im ersten Teil des Beweises, liesse sich $G' = H_a^\zeta = G$ zeigen. Dieser Widerspruch vollendet den Beweis.

Wir sehen, dass einige wolhbekannten Eigenschaften der euklidishen Ringe sich bei sehr allgemeinen Voraussetzungen auf euklidische Mengen übertragen lassen. Bezüglich des Fundamentalsatzes der Zahlentheorie ist aber dies nicht der Fall; im Gegensatz, es gilt

Satz 4. *Es sei ein Verband V mit einem maximalen und mit einem minimalen Element gegeben, der die Maximalbedingung erfüllt. Dann gibt es eine euklidische Menge H für welche* (2) *und die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

I. $H_a^\alpha \cap H_a^\beta$ *ist leer* $(a \in H, \alpha \neq \beta)$;

II. *in H gibt es ein einziges Zero z und ein einziges Element e mit $H_e^\varepsilon = H$* $(\Gamma_e = \{\varepsilon\})$;

III. *jedes H_a^a mit $z \in H_a^a$ ist ein Ideal;*

IV. *der Idealverband von H ist isomorph zu V.*

Beweis. Wir setzen gleich $H = V$. Die Verbandsoperationen in V bezeichnen wir durch $\frown$ und $\smile$, die zugehörige Ordnungsrelation durch $<$, das maximale Element von V durch e, das minimale durch z. Wir konstruieren die nichtleeren Restklassen folgendermassen. Das einzige Zero von H wird z. Ist a ein von z verschiedenes Element, so ordnen wir jedem Element b des durch a erzeugten dualen Verbandsideals (d.h. zu den Elementen $b > a$) eine Restklasse H_a^b zu, die durch

$$H_a^b = \{x | x \smile a = b\} \tag{5}$$

definiert wird. Da $x \smile a \geqq a$ für alle Elementenpaare x, a aus V gilt, besteht (2) bei dieser Definition der Restklassen. Wegen der Eindeutigkeit dieser Operation ist auch I erfüllt. Die erste Hälfte von II ist trivial, die andere Hälfte folgt aus

$$x \smile e = e \qquad (x \in V).$$

Wegen $z \smile a = a$ ist $z \in H_a^a$ für jedes $a \neq z$. Es ist aber klar, dass H_a^a das durch a erzeugte Verbandsideal ist, weshalb aus $x, y \in H_a^a$ auch $x \smile y \in H_a^a$, also auch $u \in H_a^a$ für sämtliche $u < x \smile y$ folgt. Aus (5) ergibt sich dann aber

$$H_x^{x \smile y} \subseteqq H_a^a ,$$

d. h. III.

Die Klassenmenge H erfüllt die Bedingung C aus Satz 1 und ist somit euklidisch. Es sei nämlich $H' \subseteqq H$. Ist $z \in H'$, so ist C trivialerweise erfüllt für z statt a; ist dagegen $z \in H - H'$, so nehmen wir das maximale (im Sinne der Ordnungsrelation) Element a in H'; ein solches muss wegen der Maximalbedingung existieren. Für H_a^a gilt

$$z \in H_a^a \cap (H - H') ,$$

für H_a^b $(b \neq a)$ wegen $b > a$

$$b \in H_a^b \cap (H - H'),$$

womit das Bestehen von C bewiesen ist.

Aus dem bisher gezeigten folgt, dass für H die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllt sind, und somit ist in H jedes Ideal durch ein einziges Element erzeugt. Dies und III ergeben, dass in H die sämtlichen verschiedenen Ideale die H_a^a und die Menge $\{z\}$ sind. Wegen der Regel

$$H_a^a \cap H_b^b = H_{a\cap b}^{a\cap b},$$

die leicht einzusehen ist, besteht auch IV. Dies vollendet den Beweis.

Über den euklidischen Algorithmus können wir im allgemeinsten Falle nur folgendes sagen: *ist H eine euklidische Menge, G ein Ideal in H und a_0, $a_1 \in G$, so gibt es einen euklidischen Algorithmus für diese Elemente so, dass*

$$a_\mu \in G \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, \nu) \tag{6}$$

und a_ν ein Zero ist. In der Tat, (6) besteht für $\mu = 0, 1$, und wenn sie für $\mu = \lambda - 1, \lambda$ besteht, so können wir für $H_{a_\lambda}^{a_\lambda}$ eine in G liegende Restklasse wählen, also wird auch $a_{\lambda+1} \in G$. Wäre ferner a_ν kein Zero, so müsste ein $H_{a_\nu}^{a_\nu}$ $(\subseteq G)$ existieren, das $a_{\nu-1}$ enthält, und a_ν könnte nicht das Ende des Algorithmus sein.

Nehmen wir jetzt für H auch (4') an. Wir bezeichnen durch H_a^b diejenige H_a^a, die b enthält. Es ist klar, dass H_a^b und H_a^c entweder gleich, oder fremd sind. *Gibt es nun in einem Algorithmus ein Paar $a_{\lambda-1}$, a_λ $(\lambda = 1, \ldots, \nu)$, das in einem Ideal G enthalten ist, so erzeugt jedes Paar $a_{\mu-1}$, a_μ (in demselben Algorithmus) ein und dasselbe Ideal.* In der Tat, $a_{\lambda-1}$ und a_λ erzeugen ein Ideal G_λ. Dieses Ideal enthält die beiden Restklassen $H_{a_{\lambda-1}}^{a_\lambda} = H_{a_{\lambda-1}}^{a_{\lambda-2}}$ (falls $\lambda \geqq 2$ ist) und $H_{a_\lambda}^{a_{\lambda-1}} = H_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}}$ (falls $\lambda \leqq \nu - 1$ ist). Hiernach gelten $a_{\lambda-2} \in G_\lambda$, $a_{\lambda+1} \in G_\lambda$. Hieraus folgt die Behauptung durch Induktion.

Endlich sei auch die Voraussetzung von Satz 3 erfüllt. Für einen Beliebigen engen Algorithmus gilt dann

$$G_1 = G_2 = \ldots = G_\nu = G(a_{\nu-1}), \tag{7}$$

wo $G(x)$ das durch x erzeugte Ideal ist und (7) in dem Sinne zu verstehen ist, dass alle dort gebildeten Ideale existieren und gleich sind, wenn nur eins von ihnen existiert. Dies brauchen wir nur noch bezüglich der letzten Gleichung zu beweisen. Existiert G_ν, so gilt $a_{\nu-1} \in G_\nu$ und dann existiert wegen (4') auch $G(a_{\nu-1})$. Einerseits ist offenbar $G(a_{\nu-1}) \subseteq G_\nu$. Andererseits muss $a_\nu \in G(a_{\nu-1})$ sein. In der Tat, a_ν ist ein Zero, wie es wir schon gesehen haben. Wegen $a_\nu \in G_\nu$ existiert $H_{a_{\nu-1}}^{a_\nu}$ $(\subseteq G_\nu)$ und sie ist dann die einzige Restklasse nach $a_{\nu-1}$, die ein Zero enthält, also muss auch $H_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} \subseteq G(a_{\nu-1})$ gelten. Dann ist aber $a_{\nu-1}$, $a_\nu \in G\,(a_{\nu-1})$, also auch $G_\nu \subseteq G\,(a_{\nu-1})$

Umgekehrt, nehmen wir jetzt an, dass $G(a_{\nu-1})$ existiert. Es enthält dann ein Zero und somit auch $H_{a_{\nu-1}}^{a_\nu}$, als die einzige Zero enthaltende Restklasse nach $a_{\nu-1}$. Somit gibt es ein Ideal (nämlich $G(a_{\nu-1})$), das $a_{\nu-1}$ und a_ν enthält. Dann existiert aber G_ν, und nach den vorigen gilt (7).

§ 3. Normenverband

In [5] war die Frage über sämtliche euklidischen Normen eines euklidischen Ringes gestellt. In diesem § wollen wir einige elementare Tatsachen über diese Frage in unserem allgemeineren Falle feststellen. Deshalb werden wir in diesem § unter einer euklidischen Norm immer eine Abbildung auf eine Ordnungszahlenmenge verstehen.

Es seien φ und ψ zwei verschiedene euklidische Normen einer euklidischen Menge H (im eben erwähnten Sinne). Wir sagen, dass φ kleiner als ψ ist ($\varphi < \psi$), falls $\varphi(a) \leqq \psi(a)$ für jedes $a \in H$ gilt. Damit ist eine teilweise Ordnungsrelation in der Klasse sämtlicher euklidischen Normen von H angegeben.

Nach dieser Relation bildet die genannte Klasse einen vollständigen Verband in dem Sinne, dass jede Menge von Normen ein Infimum und ein Supremum hat[3]. Es genügt zu zeigen, dass jede Menge von Normen ein Infimum hat; die Existenz des Supremum wird hieraus schon folgen, denn jede Menge von Normen hat offenbar eine obere Schranke. Es sei also $\{\varphi_\alpha\}$ eine Menge euklidischer Normen der euklidischen Menge H. Für jedes $a \in H$ hat die Ordnungszahlenmenge $\{\varphi_\alpha(a)\}$ ein minimales Element $\varphi_a(a)$. Die Abbildung

$$\varphi(a) = \varphi_a(a) \qquad (a \in H)$$

ist eine euklidische Norm. In der Tat, da φ_a eine euklidische Norm ist, gibt es in jeder Restklasse nach a ein Element b mit $\varphi_a(b) < \varphi_a(a)$, also

$$\varphi(b) \leqq \varphi_a(b) < \varphi_a(a) = \varphi(a)\,.$$

Offenbar ist $\varphi \leqq \varphi_\alpha$ für jedes α. Gilt dies auch für die Norm ψ, so gilt $\psi(a) \leqq$ $\leqq \varphi_\alpha(a)$ für jedes $a \in H$ und jedes α, also u.a.

$$\psi(a) \leqq \varphi_a(a) = \varphi(a)\,.$$

Somit haben wir in der Tat

$$\varphi = \inf \varphi_\alpha\,,$$

also auch die behauptete Existenz des von hieran *Normenverband* zu nennenden Verbandes gezeigt.

Aus dem gezeigten folgt:

Satz 5. *Der Normenverband einer beliebigen euklidischen Menge H hat immer ein einziges minimales Element.*

Beweis. Bezeichne $\mathfrak{f}$ die Mächtigkeit der Menge H und sei $\mathfrak{m}$ eine grössere Mächtigkeit, $\omega_\mathfrak{m}$ die zu $\mathfrak{m}$ gehörende Anfangszahl. Es ist klar, dass die Gesamtheit derjenigen euklidischen Normen von H, deren sämtliche Werte kleiner als $\omega_\mathfrak{m}$ sind, eine Menge $\mathfrak{M}$ bilden, folglich existiert ihr Infimum φ_0. Um zu zeigen, dass φ_0 die minimale Norm von H (d.h. das einzige minimale Element des Normenverbandes von H) ist, genügt es einzusehen, dass es zu jeder euklidischen Norm φ ein Element φ' von $\mathfrak{M}$ mit $\varphi' \leqq \varphi$ gibt. Für φ' können wir aber z.B. die mit φ äquivalente lückenlose Norm (siehe [5]) wählen, die wegen $\mathfrak{f} < \mathfrak{M}$ wirklich ein Element von $\mathfrak{M}$ ist. Damit ist unser Satz bewiesen.

Satz 5 lässt sich auch unmittelbar — analog zur Existenz des Normenverbandes — beweisen.

[3] Die Normen bilden keinen Verband im üblichen Sinne, da ihre Gesamtheit keine Menge bildet.

Die minimale Norm φ_0 kann folgendermassen konstruiert werden. Für jedes Zero z setzen wir

$$\varphi_0(z) = 0\,. \tag{8}$$

Ist schon für jede Ordnungszahl $\beta < \alpha$ die Menge derjenigen $b \in H$, für welche $\varphi_0(b) = \beta$ gesetzt wird, angegeben, so bezeichne man die Menge aller solchen Elemente durch H_α und setze

$$\varphi_0(a) = \alpha$$

für genau diejenigen Elemente a von $H - H_\alpha$, für welche H_α ein volles Restsystem nach a enthält. Ist $H - H_\alpha$ nicht leer, so gibt es wegen der Bedingung C aus Satz 1 immer solche Elemente a und deshalb können wir dieses Verfahren immer solange fortsetzen, bis die Menge H erschöpft wird. Die so erhaltene Abbildung ist eine euklidische Norm, da sie die Eigenschaft A aus Satz 1 besitzt, wie es aus der Konstruktion leicht zu ersehen ist. Ferner ist φ_0 minimal. In der Tat, φ sei eine beliebige euklidische Norm in H. Wir haben zu zeigen, dass

$$\varphi_0(a) \leqq \varphi(a) \qquad (a \in H)\,. \tag{9}$$

Wäre (9) falsch, so soll a_0 unter denjenigen Elementen für welche (9) falsch ist den minimalen Wert $\varphi(a_0)$ haben; also gälte

$$\varphi(a_0) < \varphi_0(a_0)\,. \tag{10}$$

Aus $\varphi(b) < \varphi(a_0)$ folgt $\varphi_0(b) < \varphi(b)$. a_0 kann wegen (9) kein Zero sein. Deshalb muss es ein volles Restsystem $\{a_\sigma\}$ nach a_0 geben, für welches

$$\varphi(a_\sigma) < \varphi(a_0)$$

und somit auch

$$\varphi_0(a_\sigma) < \varphi(a_0)\,.$$

Dies bedeutet aber, dass bei der Konstruktion von φ_0 die Menge $H_{\varphi(a_0)}$ ein vollständiges Restsystem nach a enthält, also muss

$$\varphi_0(a_0) = \varphi(a_0)$$

gesetzt werden, im Gegensatz zu (10). Die Abbildung ist also in der Tat die minimale Norm.

Führen wir diese Konstruktion in den Fällen durch, wo H dem Ring der ganzen rationalen Zahlen bzw. einem Polynomring über einem Körper gleich ist, so erhalten wir im ersten Falle

$$\varphi_0(n) = \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] + 1 \qquad (n \neq 0)$$

und im zweiten

$$\varphi_0(f) = \mathrm{Grad}\, f + 1 \qquad (f \neq 0)\,,$$

nebst der allgemeingültigen Gleichung $\varphi_0(0) = 0$. Endlich, es gilt

Satz 6. *Sind die vollständigen Restsysteme nach a für jedes Element a der euklidischen Menge H endlich, so bildet die minimale Norm φ_0 die Menge H auf ein Segment der Menge der natürlichen Zahlen ab.*

Beweis. Es ist klar, dass φ_0 die Menge H auf eine lückenlose Ordnungszahlenmenge abbildet, folglich genügt es zu zeigen, dass unter den $\varphi_0(a)$ $(a \in H)$ die Ordnungszahl ω nicht vorkommt. Wäre aber $\varphi_0(a) = \omega$, so müsste ein vollständiges Restsystem $\{b_a\}$ nach a existieren, dessen Elemente die Bedingung

$$\varphi_0(b_a) < \varphi_0(a) = \omega$$

erfüllten. Nach der Annahme ist $\{b_a\}$ endlich, also gibt es unter den $\varphi_0(b_a)$ eine maximale. Es sei

$$\max \varphi_0(b_a) = m\,.$$

Dann ist die Abbildung

$$\varphi_0'(x) = \begin{cases} \varphi_0(x)\,, & \text{falls } x \neq a\,,\ x \in H \\ m+1\,, & \text{falls } x = a \end{cases}$$

trivialerweise eine euklidische Norm, ferner gilt $\varphi_0' < \varphi_0$, im Widerspruch mit der Minimalität von φ_0. Somit ist Satz 6 bewiesen.

§ 4. Hauptidealmenge

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das Kriterium von H. HASSE für Hauptidealringe (siehe [1]) ähnlicherweise wie die Definition der euklidischen Ringe in § 1 zu verallgemeinern. Bei diesen Verallgemeinerungen kann aber vorkommen, dass die Hasse'sche Bedingung den Kriteriumscharakter verliert und in eine hinreichende Bedingung übergeht. Hier wollen wir eine Verallgemeinerung angeben, die den Kriteriumscharakter bewart, und zwar in einem noch allgemeineren Falle als in den bisherigen Paragraphen.

H sei eine beliebige Menge und Γ eine Menge nichtleerer Untermengen von H. Die Menge $G \in \Gamma$ werden wir auch in diesem allgemeinsten Falle *Ideale von H* nennen. H wird eine *Hauptidealmenge* genannt, wenn für jede nichtleere Untermenge Δ von Γ

$$\bigcup_{\bar G \subset G \in \Delta} \bar G \subset \bigcup_{G \in \Delta} G \tag{11}$$

gilt.

Aus (11) folgt die Maximalbedingung für Ideale. Wäre nämlich

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \qquad (G_i \in \Gamma)\,,$$

so wäre $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{G \subset G_i} G$, in Widerspruch mit (11).

Ist der Durchschnitt einer endlichen Menge von Idealen wieder ein Ideal, so bedeutet der Spezialfall von (11)

$$\bigcup_{\bar G \subset G} \bar G \subset G \tag{11'}$$

einfach, dass G durch ein einziges Element a erzeugt ist (im üblichen Sinne, dass nämlich $a \in G$ und $G = \bigcap_{a \in G'} G'$ ist. Für a darf man ein beliebiges Element aus $G - \bigcup_{\bar G \subset G} G$ wählen). Ein Ideal G mit der Eigenschaft (11') nennen wir ein Hauptideal; die Hauptideale können natürlich auch in allen Spezialfällen durch (11') definiert werden. Die euklidische Mengen im allgemeinsten Falle werden keine Hauptidealmengen; wird aber für eine euklidische Menge die Voraussetzung von Satz 3 erfüllt, so gilt für diese natürlich auch (11).

Aus Satz 1 folgt, dass die folgenden drei Bedingungen miteinander äquivalent sind:

A*) es gibt eine Abbildung φ von H in eine wohlgeordnete Menge so, dass für beliebige zwei Ideale G, G' von H mit $G \subset G'$ und für jedes $a \in G$ ein $b \in G'$ mit $\varphi(b) < \varphi(a)$ existiert;

B*) für jede Abbildung φ von H in eine wohlgeordnete Menge und jedes Element c aus H gibt es ein $a \in H$ mit $\varphi(c) \leq \varphi(a)$, wofür aus $a \in G \subset G'$ (G, G' Ideale) die Existenz eines $b \in G'$ mit $\varphi(b) < \varphi(c)$ folgt;

C*) in jeder nichtleeren Untermenge H' von H gibt es ein Element a, für welches aus $a \in G \subset G'$ (G, G' Ideale) folgt, dass $G' \cap (H - H')$ nicht leer ist.

Um dies einzusehen, genügt es, jedem $a \in H$ diejenige $G' \in \Gamma$ als Restklassen zuzuordnen, für welche es ein $G \in \Gamma$ mit $a \in G \subset G'$ gibt[4]. Es gilt ferner

Satz 7. *Eine jede der Bedingungen* A*, B*, C* *ist mit* (11) *äquivalent.*

Beweis. Es genügt A* $\Longleftrightarrow$ (11) zu zeigen.

Nehmen wir A* an und $\triangle$ sei eine beliebige nichtleere Teilmenge von Γ. Betrachten wir ein Element a aus $\bigcup_{G \in \triangle} G$ mit minimalem $\varphi(a)$. Wäre $a \in \bigcup_{\bar{G} \subset G \in \triangle} \bar{G}$, d.h. $a \in \bar{G}_0 \subset G_0 \in \triangle$ für ein geeignetes $\bar{G}_0$, so müsste ein $b \in G_0$, also auch $b \in \bigcup_{G \in \triangle} G$ mit $\varphi(b) < \varphi(a)$ geben, in Widerspruch zur Minimaleigenschaft von a. Somit gilt (11).

Umgekehrt, sei (11) erfüllt. Definieren wir die Mengen $H_\alpha (\alpha = 0, 1, \ldots, \omega, \ldots)$ folgenderweise:

$$(12_1) \qquad H_0 = \bigcup_{G \in \Gamma} G,$$

$$(12_2) \qquad H_{\alpha+1} = \bigcup_{G \subset G' \subseteq H_\alpha} G.$$

$$(12_3) \qquad H_\beta = \bigcup_{\substack{G \subseteq \cap H_\xi \\ \xi < \beta}} G \text{ für Limeszahlen } \beta.$$

Aus dieser Definition ist klar, dass

$$(13) \qquad H_\alpha = \bigcup_{G' \subseteq H_\alpha} G'$$

für jedes α ist. Hieraus und aus (12_2) folgt wegen (11)

$$(14) \qquad H_{\alpha+1} \subset H_\alpha,$$

wenn es nur überhaupt ein $G' \subseteq H_\alpha$ gibt, d. h. wegen (13), wenn H_α nicht leer ist. Hiermit muss es ein τ geben, wofür H_τ schon leer ist; τ sei die kleinste Ordnungszahl mit dieser Eigenschaft. Im folgenden werden wir nur die H_α mit $\alpha < \tau$ in Betracht nehmen; für diese gilt (14) unbedingt.

Setzen wir

$$(15) \qquad \varphi(a) = \alpha \qquad (a \in H_\alpha - H_{\alpha+1}).$$

Für die übrigen a sei $\varphi(a) = \tau$. Wir behaupten, dass die Abbildung φ die in A* erforderte Eigenschaft besitzt. Es sei nämlich G_0 ein beliebiges Ideal. Es gibt eine grösste Ordnungszahl γ, für welche noch $G_0 \subseteq H_\gamma$ gilt, denn wegen (12_1) ist $G_0 \subseteq H_0$ und für eine Limeszahl β aus $G_0 \subseteq H_\xi$ bei sämtlichen $\xi < \beta$

[4] Die Ideale der so entstehenden Klassenmenge werden natürlich im allgemeinen mit den Idealen aus Γ nicht übereinstimmen.

folgt $G_0 \subseteqq \bigcap_{\xi<\beta} H_\xi$, also wegen (12_3) auch $G_0 \subseteqq H_\beta$. Wegen der Definition von φ bedeutet dies einerseits, dass

$$\varphi(a) \geqq \gamma \text{ für alle } a \in G_0 \tag{16}$$

gilt. Andererseits sei $G_0 \subset G'_0$ und γ' die grösste Ordnungszahl mit $G'_0 \subseteqq H_{\gamma'}$. Offenbar gilt $\gamma' < \gamma$, da sonst $G'_0 \subseteqq H_\gamma$ und

$$G_0 \subseteqq \bigcup_{G \subset G' \subseteqq H_\gamma} G = H_{\gamma+1}$$

in Widerspruch mit der Definition von γ wäre. Ferner ist wegen $G'_0 \subseteqq H_{\gamma'+1}$ der Durchschnitt $G'_0 \cap (H_{\gamma'} - H_{\gamma'+1})$ nicht leer, es gibt also nach (15) ein Element a_0 in G_0, wofür $\varphi(a_0) = \gamma'$, folglich wegen (16) $\varphi(a_0) < \varphi(a)$ für alle $a \in G_0$ gilt. Dies vollendet den Beweis.

Die Bedeutung des Satzes 7 besteht darin, dass A* eine Verallgemeinerung des erwähnten Hasse'schen Kriteriums, und B* eine Verallgemeinerung einer von Lascu [2] bemerkten ringtheoretischen Tatsache ist, somit weist dieser Satz auf die mengentheoretische Deutung ringtheoretischer Sätze hin.

Den Herren E. Fried, L. Fuchs und A. Kertész bin ich für ihre wertvollen Bemerkungen und Ratschläge zu grossem Dank verpflichtet.

(Eingegangen: 9. April, 1962.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Hasse, H.: „Über eindeutige Zerlegung in Primelemente oder in Primhauptideale in Integritätsbereichen." *Journal f. d. reine u. angewandte Math.* **29** (1928) 3—12.
[2] Lascu, A.: „Asupra imparţirii intregi." *Buletin Ştiinţific* **7** (1955) 507—515.
[3] Леммлейн, X.: "О евклидовых кольцах главных идеалов." *ДАН СССР* **97** (1954) 585—587
[4] Pollák, G.: „Über die Struktur kommutativer Hauptidealringe." *Acta Sci. Math.* **22** (1961) 62—74.
[5] Поллак, Г.: "О типах евклидовых норм." *Acta Sci. Math.* **20** (1959) 252—268.
[6] Rédei, L.: *Algebra* I., Leipzig, 1959.

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННАЯ ТРАКТОВКА ЕВКЛИДОВЫХ КОЛЕЦ И КОЛЕЦ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

G. POLLÁK

Резюме

В настоящей работе дается теоретико-множественное обобщение понятий евклидова кольца и кольца главных идеалов. При этом выясняется, что целый ряд теорем касающихся таких колец переносится на соответствующие теоретико-множественные понятия. Это имеет место например для теоремы о том, что евклидово кольцо есть кольцо главных идеалов (теоремы 2 и 3), для теоремы о существовании алгоритма Евклида, или для критерия Хассе для колец главных идеалов (теорема 7). С другой стороны, дистрибутивность структуры идеалов евклидова кольца не обобщается даже при очень сильных предположениях относительно рассматриваемого множества; ее выполнение в евклидовых кольцах повидимому является следствием наличия алгебраической операции (теорема 4).