

SZABÁLYOS SOKSZÖGALAPRAJZÚ FORGÁSPARABOLOIDHÉJAK KÖRALAKÚ FELÜLVILÁGÍTÓ NYÍLÁSSAL

CSONKA PÁL*

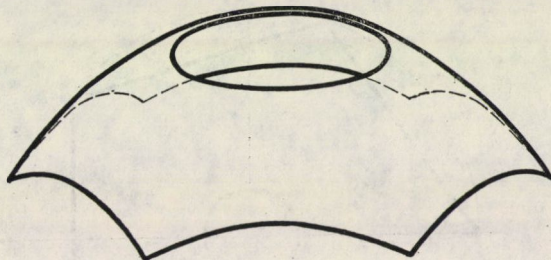
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett 1973. október 9-én]

A dolgozat eljárást ismertet a címben említett héjak erőjátékának meghatározására a membránelmélet szokásos feltevéseinek keretében. Felteszi, hogy a héj felülvilágító nyílását olyan peremgyűrű szegélyezi, amely vízszintes síkú hajlítónyomatékokkal szemben semmi ellenállást sem fejt ki, a héj külső szélét alátámasztó peremívek pedig oldalirányú erővel szemben nem ellenállók. A közölt megoldás közelítő jellegű: a felülvilágító nyílást szegélyező gyűrűre vonatkozó peremfeltételnek pontosan, a peremívekre vonatkozó peremfeltételnek azonban csak közelítőleg tesz eleget. Az eljárás alkalmazását számpélda világítja meg, és ez egyúttal az eljárás célszerű voltát is igazolja.

I. Bevezetés

A jelen tanulmány k -oldalú szabályos sokszögalaprajz fölé szerkesztett függőleges tengelyű olyan forgásparaboloidhéjak számításával foglalkozik, amelyeken központos elrendezésű köralakú felülvilágító nyílás van (1. ábra). A szóban forgó héjak külső szélét függőleges síkú peremtartók (peremívek)



1. ábra. Szabályos sokszögalaprajz fölé szerkesztett forgásparaboloidhéj központos elrendezésű köralakú felülvilágító nyílással

gyámolítják, a felülvilágító nyílás szélét pedig körbe futó peremtartó (peremgyűrű) szegélyezi. A figyelembe vett teher körszimmetrikus megoszlású függőleges erőrendszer.

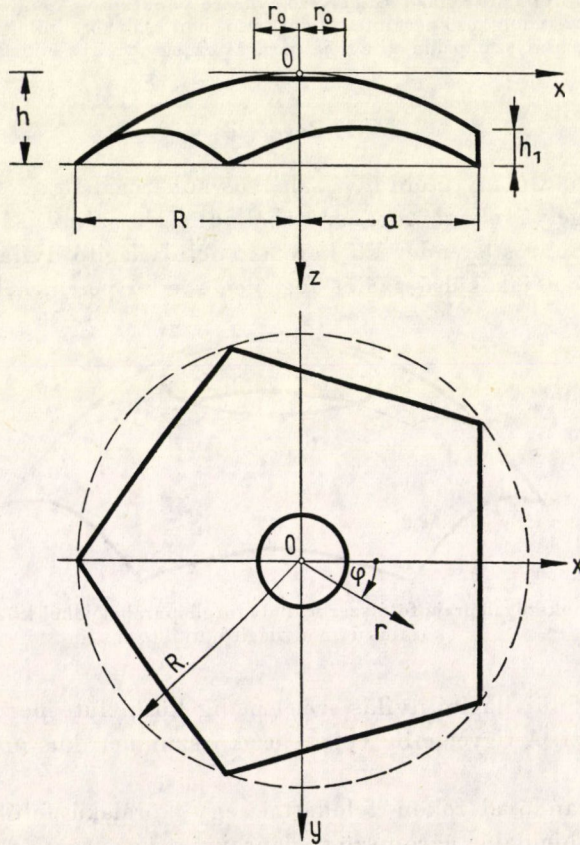
A tárgyalandóval rokon feladattal, egy köralakú felülvilágító nyílással bíró egyenlőoldalú háromszög alaprajzú függőleges tengelyű forgás-

* Prof. Dr. Csonka Pál, 1114 Budapest, Bartók Béla u. 31.

paraboloidháj számításával a szerző egyik előző dolgozata foglalkozott [1]. Az ott közölt megoldás olyan héjakra vonatkozott, amelyek felülvilágító nyílásának peremtartója mindennemű erőhatással szemben kellőképpen ellenálló volt. A jelen dolgozat ettől eltérően olyan héjakkal foglalkozik, amelyek felülvilágító nyílásának peremtartója vízszintes síkú hajlító erőpárokkal szemben semmi ellenállást sem fejt ki. A hég külső peremét gyámolító peremtartókról az [1] dolgozathoz hasonlóan ez a dolgozat is feltételezi, hogy oldalirányú erőkkel szemben nem ellenállók, de ez utóbbi feltételt az [1] dolgozathoz hasonlóan ez a dolgozat is csak közelítőleg teljesíti.

2. Alapösszefüggések

Tárgyalásainkat a 2. ábrán feltüntetett $O(x, y, z)$ derékszögű, illetve $O(r, \varphi, z)$ hengeres koordináta-rendszerre vonatkoztatjuk. Ezek O kezdőpontja a forgásparaboloid tengelypontjával, z tengelye e paraboloid tengelyével esik



2. ábra. Szabályos sokszögalaprajz fölé szerkesztett forgásparaboloidháj központos elrendezésű kör alakú felülvilágító nyílással

egybe; a $+z$ tengelyág lefelé irányul. A pozitív $y = 0$ félsík illetve a $\varphi = 0$ sík a héj alaprajzi sokszögének egyik oldalát felezi. Az alaprajzi sokszög köré írt kör sugarát R , az alaprajzi sokszögbe írt kör sugarát a , a köralakú felületvilágító nyílás sugarát pedig r_0 betű jelöli.

Az $O(x, y, z)$ tengelyrendszerben a héj középfelületének alakját a

$$z = \frac{h}{R^2} (x^2 + y^2) = \frac{ha^2}{R^2} (\xi^2 + \eta^2) \quad (1)$$

egyenlettel, az $O(r, \varphi, z)$ tengelyrendszerben pedig a

$$z = \frac{h}{R^2} r^2 = \frac{ha^2}{R^2} \varrho^2 \quad (2)$$

egyenlettel jellemezzük, ahol

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad \varrho = \frac{r}{a}.$$

A héjra ható tehernek az alaprajz területegységére jutó fajlagos értékét a

$$\bar{p} = \sum_{i=0}^j \bar{p}_i \varrho^i \quad (3)$$

teherfüggvénnyel fejezzük ki. Itt a \bar{p}_i együtthatók dimenziója erő/hosszúság². A héj peremgyűrűjére ható külső erők (önsúly + terhek) fajlagos értékét állandónak tekintjük és G_0 betűvel jelöljük. Ennek dimenziója: erő/hosszúság.

A héj feszültségállapotának leírására a vizsgálandó héj szimmetriaviszonyaival megegyező szimmetriatulajdonságokkal híró feszültségfüggvényt vezetünk be [2,3]. Az x, y irányú redukált feszítőerők e feszültségfüggvény második deriváltjai:

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2},$$

$$\bar{N}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} = -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \cdot \partial \eta}, \quad (4a, b, c)$$

$$\bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}.$$

A sugár és ív irányú feszítő erők a feszültségfüggvénnyel a következő kapcsolatban állanak:

$$\begin{aligned}\bar{N}_r &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right), \\ \bar{N}_{r\varphi} &= -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right), \\ \bar{N}_\varphi &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2}.\end{aligned}\tag{5a, b, c}$$

Az F feszültségfüggvény a Pucher-féle differenciálegyenletnek tartozik megfelelni [2,3]. Ez a differenciálegyenlet forgáspároloidhéjak esetében a következő egyszerű képlettel fejezhető ki:

$$\frac{2h}{R^2} \Delta F + \bar{p} = 0.\tag{6}$$

Itt

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \right).\tag{7}$$

3. A peremfeltételek

Az F függvény a feladat differenciálegyenletén felül megfelelni tartozik a héjperemek támasztásmódját, illetve a peremtartók merevségi viszonyait kifejező peremfeltételeknek is.

3.1. Az első peremfeltétel

A héj belső peremét szegélyező peremgyűrűre ható erőknek (a peremgyűrű saját súlyának, a reá ható terheknek és a héj által a peremgyűrűre gyakorolt erőknek) egyensúlyban levő rendszert kell alkotniuk. Minthogy ezek az erők a héjalaprajz szimmetriaadottságaival azonos szimmetria tulajdonságokkal rendelkeznek, az egyensúly nyomatéki feltételei, valamint a vízszintes erőalkotókra vonatkozó vetületi feltételek eleve teljesülnek. Így az egyensúly előfeltételeként mindössze a függőleges erőalkotókra vonatkozó vetületi tétel teljesítését, vagyis csupán a

$$\Sigma Z = 0\tag{8}$$

feltétel kielégítését kell előírniuk.

3.2. A második peremfeltétel

Kikötésünk szerint a héj belső peremét szegélyező peremgyűrű vízszintes síkú hajlító erőpárokkal szemben semmi ellenállást sem tud kifejteni. Ezért a peremgyűrű keresztmetszetein semmiféle vízszintes síkú hajlítónyomaték sem jöhet létre. Ezt a peremfeltételt az

$$M_z = 0 \quad (9)$$

képlettel fejezhetjük ki.

3.3. A harmadik peremfeltétel

A héj külső peremét alátámasztó peremívekről, mint függőleges síkú síkbeli tartókról feltettük, hogy oldalirányú erővel szemben nem ellenállók. A szóbanforgó feltételt közelítőleg teljesítettnek tekintjük, ha a héj által a peremívekre gyakorolt oldalirányú erők jelentéktelenek.* Ezt a körülményt a $\xi = 1$ peremív esetében az

$$[\bar{N}_x]_{\xi=1} \cong 0 \quad (10)$$

egyenlettel fejezhetjük ki. Ha ez a feltétel teljesítve van, akkor a fennforgó sokszögszimmetriára való tekintettel a többi peremívre vonatkozó hasonló feltétel is teljesül.

4. A feladat megoldása

A megoldandó feladat F feszültségfüggvényét három részből tesszük össze:

$$F = F^I + F^{II} + F^{III}, \quad (11)$$

és megállapodunk abban, hogy az F^I , F^{II} , F^{III} függvényeknek megfelelő feszítőerők betűjelét az F függvénynek megfelelő feszítőerők betűjelétől való megkülönböztetésül, I, II, III felső indexszel látjuk el. Ezek szerint pl. az F^I , F^{II} , F^{III} függvényeknek megfelelő sugárirányú feszítőerők betűjele: \bar{N}_r^I , \bar{N}_r^{II} , \bar{N}_r^{III} .

Természetesen

$$\bar{N}_r = \bar{N}_r^I + \bar{N}_r^{II} + \bar{N}_r^{III},$$

és hasonló képletek írhatók fel a többi feszítőerőre is.

* A $k = 4$ eset különleges tárgyalást igényel. Ebben az esetben a (10) követelmény a sarokpontok közvetlen környezetében az itt ismertetendő módon nem teljesíthető.

4.1. Az F^I függvény

F^I függvény gyanánt az inhomogén differenciálegyenleteket kielégítő

$$F^I = -\frac{R^2 a^2}{2h} \sum_{i=0}^j \frac{\bar{p}_i}{(i+2)^2} \varrho^{i+2} = -\frac{R^2 a^2}{2h} \sum_{i=0}^j \frac{\bar{p}_i}{(i+2)^2} (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{i+2}{2}} \quad (12)$$

függvényt választjuk.

A fenti F^I függvénynek megfelelő sugár- és ívirányú redukált feszítőerők az (5) képletek szerint számíthatók:

$$\begin{aligned} \bar{N}_r^I &= \frac{1}{a^2 \varrho} \cdot \frac{\partial F^I}{\partial \varrho} = -\frac{R^2}{2h} \sum_{i=0}^j \frac{\bar{p}_i}{i+2} \varrho^i, \\ \bar{N}_{r\varphi}^I &= 0, \\ \bar{N}_\varphi^I &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F^I}{\partial \varrho^2} = -\frac{R^2}{2h} \sum_{i=0}^j \frac{i+1}{i+2} \bar{p}_i \varrho^i, \end{aligned} \quad (13a, b, c)$$

az x, y irányú redukált feszítőerők pedig a (4) képletek szerint határozhatók meg:

$$\begin{aligned} \bar{N}_x^I &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F^I}{\partial \eta^2} = -\frac{R^2}{2h} \sum_{i=0}^j \frac{\bar{p}_i}{i+2} (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{i-2}{2}} (\xi^2 + \eta^2 + 2i\eta^2), \\ \bar{N}_{xy}^I &= -\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F^I}{\partial \xi \cdot \partial \eta} = +\frac{R^2}{2h} \xi \eta \sum_{i=0}^j \frac{i \bar{p}_i}{i+2} (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{i-2}{2}}, \\ \bar{N}_y^I &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F^I}{\partial \xi^2} = -\frac{R^2}{2h} \sum_{i=0}^j \frac{\bar{p}_i}{i+2} (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{i-2}{2}} (\xi^2 + \eta^2 + 2i\xi^2). \end{aligned} \quad (14a, b, c)$$

4.2. Az F^{II} függvény

F^{II} függvényül a homogén differenciálegyenletet kielégítő

$$F^{II} = C_0 \ln \varrho^2 = C_0 \ln (\xi^2 + \eta^2) \quad (15)$$

potenciálfüggvényt vezetjük be. Az ebben szereplő C_0 mennyiséget egyelőre határozatlan állandóként kezeljük; dimenziója: erő · hosszúság.

Az F^{II} függvénynek megfelelő sugár- és ívirányú redukált feszítőerők az (5) úpletek szerint számíthatók:

$$\begin{aligned} \bar{N}_r^{II} &= \frac{1}{a^2 \varrho} \cdot \frac{\partial F^{II}}{\partial \varrho} = \frac{2C_0}{a^2 \varrho^2}, \\ \bar{N}_{r\varphi}^{II} &= 0, \\ \bar{N}_\varphi^{II} &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F^{II}}{\partial \varrho^2} = -\frac{2C_0}{a^2 \varrho^2}, \end{aligned} \quad (16a, b, c)$$

az x, y irányú redukált feszítőerők pedig a (4) képletek szerint határozhatók meg:

$$\begin{aligned}\bar{N}_x^{\text{II}} &= + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F^{\text{II}}}{\partial \eta^2} = + \frac{2C_0}{a^2} \cdot \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \\ \bar{N}_{xy}^{\text{II}} &= - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F^{\text{II}}}{\partial \xi \cdot \partial \eta} = + \frac{4C_0}{a^2} \cdot \frac{\xi \eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \\ \bar{N}_y^{\text{II}} &= + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 F^{\text{II}}}{\partial \xi^2} = - \frac{2C_0}{a^2} \cdot \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}.\end{aligned}\quad (17a, b, c)$$

Az első peremfeltétel. A fenti képletekben szereplő, eddig határozatlan C_0 együtthatót alkalmasan véve fel, elérhetjük, hogy az $F^{\text{I}} + F^{\text{II}}$ függvény-együttes feleljen meg az első (8) jelű peremfeltételnek. Ez a követelmény az adott esetben az

$$(\bar{N}_r^{\text{I}} + \bar{N}_r^{\text{II}}) \frac{dz}{dr} + G_0 = 0$$

képlettel fejezhető ki. Minthogy a (13a), (16a) alattiak szerint a $\varrho = \varrho_0$ helyen

$$\begin{aligned}\bar{N}_r^{\text{I}} &= - \frac{R^2}{2h} \sum_{i=0}^j \frac{\bar{p}_i \varrho_0^i}{i+2}, \\ \bar{N}_r^{\text{II}} &= \frac{2C_0}{a^2 \varrho_0^2}, \\ \frac{dz}{dr} &= \frac{2ha\varrho_0}{R^2},\end{aligned}$$

a szóban forgó feltétel akkor teljesül, ha

$$\left(\frac{2C_0}{a^2 \varrho_0^2} - \frac{R^2}{2h} \sum_{i=0}^j \frac{\bar{p}_i \varrho_0^i}{i+2} \right) \frac{2ha\varrho_0}{R^2} + G_0 = 0.$$

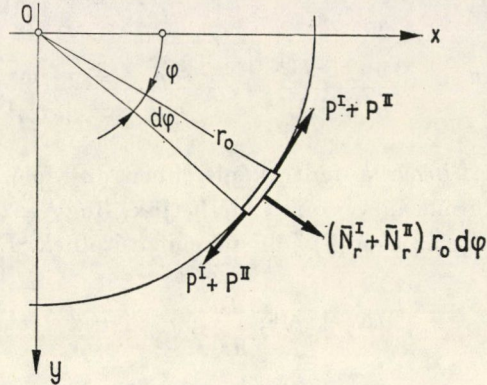
Innén az eddig határozatlan C_0 együtthatóra a

$$C_0 = \frac{R^2 a^2}{4h} \left(- \frac{G_0 \varrho_0}{a} + \sum_{i=0}^j \frac{\bar{p}_i \varrho_0^{i+2}}{i+2} \right) \quad (18)$$

érték adódik. Így

$$\begin{aligned}F^{\text{II}} &= \frac{R^2 a^2}{4h} \left(- \frac{G_0 \varrho_0}{a} + \sum_{i=0}^j \frac{\bar{p}_i \varrho_0^{i+2}}{i+2} \right) \ln \varrho^2 = \\ &= \frac{R^2 a^2}{4h} \left[- \frac{G_0}{a} (\xi^2 + \eta^2)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^j \frac{\bar{p}_i (\xi^2 + \eta^2)^i}{i+2} \ln (\xi^2 + \eta^2) \right].\end{aligned}\quad (19)$$

A második peremfeltétel. Az F^I és F^{II} függvényeknek megfelelő feszítőerők körszimmetrikus megoszlásúak. Ezért a felülvilágító nyílást szegélyező peremgyűrűre mint síkbeli tartóra ható \bar{N}_r^I és \bar{N}_r^{II} feszítőerők a peremgyűrű mentén egyenletesen oszlanak meg és a peremgyűrű keresztmetszetein ívi-



3. ábra. A gyűrűtartó egy elemi szakasza és a rá ható külső és belső erők

rányú erőket (gyűrűerőket) ébresztenek (3. ábra). A gyűrűerő értéke egyensúlyi okokból:

$$P^I + P^{II} = (\bar{N}_r^I + \bar{N}_r^{II}) a \varrho_0.$$

Mint hogy a gyűrűtartón mint vízszintes síkú tartón a külső és belső erők egyensúlya a tartó keresztmetszeteire működtetendő vízszintes síkú hajlító nyomatékok nélkül is biztosítható, az $F^I + F^{II}$ függvényegyüttes eleget tesz a második (9) jelű peremfeltételnek.

4.3. Az F^{III} függvény

F^{III} függvényként a homogén differenciálegyenletnek megfelelő

$$\begin{aligned} F^{III} &= \sum_{m=1}^n C_{mk} (\varrho^{mk} - \varrho_0^{2mk} \varrho^{-mk}) \cos mk \varphi = \\ &= \sum_{m=1}^n C_{mk} \left[1 - \frac{\varrho_0^{2mk}}{(\xi^2 + \eta^2)^{mk}} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[\xi^{mk} - \binom{mk}{2} \xi^{mk-2} \eta^2 + \binom{mk}{4} \xi^{mk-4} \eta^4 - + \dots \right] \end{aligned} \quad (20)$$

potenciálfüggvényt választjuk. Az ebben szereplő C_{mk} mennyiségek egyelőre határozatlan állandók; dimenziójuk: erő · hosszúság.

Az F^{III} függvénynek megfelelő sugar- és ívirányú redukált feszítőerők az (5) képlet szerint számíthatók:

$$\begin{aligned}\bar{N}_r^{\text{III}} &= -\frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^n C_{mk} [(m^2k^2 - mk) \varrho^{mk-2} - (m^2k^2 + mk) \varrho_0^{2mk} \varrho^{-mk-2}] \cos mk \varphi, \\ \bar{N}_{r\varphi}^{\text{III}} &= +\frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^n C_{mk} [(m^2k^2 - mk) \varrho^{mk-2} + (m^2k^2 + mk) \varrho_0^{2mk} \varrho^{-mk-2}] \sin mk \varphi, \\ \bar{N}_\varphi^{\text{III}} &= +\frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^n C_{mk} [(m^2k^2 - mk) \varrho^{mk-2} - (m^2k^2 + mk) \varrho_0^{2mk} \varrho^{-mk-2}] \cos mk \varphi.\end{aligned}\quad (21a, b, c)$$

Egyszerű képletekkel fejezhető ki az x, y irányú redukált feszítőerők is. Az \bar{N}_x^{III} redukált feszítőerő értéke a (4a) képlet szerint:

$$\begin{aligned}\bar{N}_x^{\text{III}} &= -\frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^n C_{mk} \left\{ (m^2k^2 - mk) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left[\xi^{mk-2} - \binom{mk-2}{2} \xi^{mk-4} \eta^2 + \binom{mk-2}{4} \xi^{mk-6} \eta^4 - + \dots \right] - \\ &\quad - (m^2k^2 + mk) \frac{\varrho_0^{2mk}}{(\xi^2 + \eta^2)^{mk}} \cdot \\ &\quad \cdot \left. \left[\xi^{mk+2} - \binom{mk+2}{2} \xi^{mk} \eta^2 + \binom{mk+2}{4} \xi^{mk-2} \eta^4 - + \dots \right] \right\}. \quad (22a)\end{aligned}$$

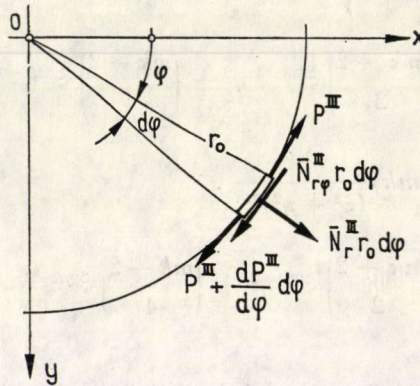
Az $\bar{N}_{xy}^{\text{III}}$ redukált feszítőerő a (4b) képlet szerint:

$$\begin{aligned}\bar{N}_{xy}^{\text{III}} &= +\frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^n C_{mk} \xi \eta \left\{ (m^2k^2 - mk) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left[\left[\binom{mk-2}{1} \xi^{mk-4} - \binom{mk-2}{3} \xi^{mk-6} \eta^2 + \binom{mk-2}{5} \xi^{mk-8} \eta^4 - + \dots \right] + \right. \\ &\quad \left. + (m^2k^2 + mk) \frac{\varrho_0^{2mk}}{(\xi^2 + \eta^2)^{mk}} \cdot \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \left[\left[\binom{mk+2}{1} \xi^{mk} - \binom{mk+2}{3} \xi^{mk-2} \eta^2 + \binom{mk+2}{5} \xi^{mk-4} \eta^4 - + \dots \right] \right] \right\}.\end{aligned}\quad (22b)$$

Az \bar{N}_y^{III} redukált feszítőerő értéke az \bar{N}_x^{III} ellentettje:

$$\begin{aligned} \bar{N}_y^{\text{III}} = & + \frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^n C_{mk} \left\{ (m^2 k^2 - mk) \cdot \right. \\ & \cdot \left[\xi^{mk-2} - \binom{mk-2}{2} \xi^{mk-4} \eta^2 + \binom{mk-2}{4} \xi^{mk-6} \eta^4 + \dots \right] - \\ & - (m^2 k^2 + mk) \frac{\varrho_0^{2mk}}{(\xi^2 + \eta^2)^{mk}} \cdot \\ & \cdot \left. \left[\xi^{mk+2} - \binom{mk+2}{2} \xi^{mk} \eta^2 + \binom{mk+2}{4} \xi^{mk-2} \eta^4 - + \dots \right] \right\}. \quad (22c) \end{aligned}$$

Az első peremfeltétel. Az F^{III} függvény trigonometrikus felépítése folytán eleve megfelel az első – (8) jelű – peremfeltételnek. Minthogy a 4.2 pontban ugyanezt állapítottuk meg az $F^{\text{I}} + F^{\text{II}}$ függvényegyüttesről is, nyilvánvaló, hogy az $F = F^{\text{I}} + F^{\text{II}} + F^{\text{III}}$ függvény is teljesíti az első peremfeltételt.



4. ábra. A gyűrűtartó egy elemi szakasza és a rá ható külső és belső erők

A második peremfeltétel. A 4.2 pontban bebizonyítottuk, hogy az $F^{\text{I}} + F^{\text{II}}$ függvényegyüttes megfelel a második, – (9) jelű – peremfeltételnek. Most ugyanezt be fogjuk igazolni az F^{III} függvényről is.

Evégett vegyük szemügyre a felülvilágító nyílást szegélyező peremgyűrűnek mint síkbeli tartónak a φ és $\varphi + d\varphi$ síkok által határolt elemi szakaszát. E tartóelemre a 4. ábrán feltüntetett külső és belső erők hatnak. Közülük az \bar{N}_r és $\bar{N}_{r\varphi}$ feszítőerők a $\varrho = \varrho_0$ helyettesítéssel a (21) képletek szerint számíthatók,

$$\bar{N}_r = \frac{2}{a^2} \sum_{m=1}^n C_{mk} mk \varrho_0^{mk-2} \cos mk\varphi, \quad (23)$$

$$\bar{N}_{r\varphi} = \frac{2}{a^2} \sum_{m=1}^n C_{mk} m^2 k^2 \varrho_0^{mk-2} \sin mk\varphi, \quad (24)$$

és mint ilyenek ismerteknek tekinthetők.

Végezzünk a kijelölt tartóelemen egyensúlyi vizsgálatot annak megállapítására, hogy a külső és belső erők egyensúlya a 4. ábrába bejelölt erőkkel, tehát a keresztmetszetekre működtetendő hajlítónyomatékok nélkül is biztosítható-e. Evégett írjuk fel a sugárirányú és az ívirányú erőalkotókra vonatkozólag az egyensúly vetületi feltételét:

$$\bar{N}_r^{\text{III}} r_0 d\varphi - P^{\text{III}} d\varphi = 0, \quad (25)$$

$$\bar{N}_r^{\text{III}} r_0 d\varphi + \frac{dP^{\text{III}}}{d\varphi} d\varphi = 0. \quad (26)$$

Ha a (23) alatti \bar{N}_r^{III} értéket a (25) egyenletbe behelyettesítjük, és az így nyert egyenletet P^{III} -ra megoldjuk, az $r_0 = a \varrho_0$ összefüggés figyelembevételével azt találjuk, hogy egyensúly esetében

$$P^{\text{III}} = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^n C_{mk} m k \varrho_0^{mk-1} \cos mk\varphi. \quad (27)$$

Ha ezek után a (24) és (27) alattiakat a (26) vetületi egyenletbe bevisszük és $r_0 = a \varrho_0$ helyettesítést végzünk, meggyőződhetünk arról, hogy a (25) feltétel kielégítése esetében egyúttal a (26) feltétel is teljesedik. Ez a körülmény, valamint az a tény, hogy az egyensúly nyomatéki feltétele is teljesítve van, azt igazolja, hogy a külső és belső erők egyensúlya a keresztmetszetekre működtetendő hajlító erőpárok nélkül is biztosított. Ezek szerint az F^{III} függvény megfelel a második, — (9) jelű — peremfeltételnek. Minthogy pedig ugyanezt igazoltuk a 4.2 pontban az $F^{\text{I}} + F^{\text{II}}$ függvényegyüttesről is, nyilvánvaló, hogy az $F = F^{\text{I}} + F^{\text{II}} + F^{\text{III}}$ feszültségfüggvény szintén eleget tesz a második peremfeltételnek.

A harmadik peremfeltétel. Ezek után már csak a harmadik, — (10) jelű — peremfeltételt, tehát azt a követelményt kell biztosítanunk, hogy az \bar{N}_x derékerő a $\xi = 1$ peremvonal mentén tegyen eleget az

$$\bar{N}_x^{\text{I}} + \bar{N}_x^{\text{II}} + \bar{N}_x^{\text{III}} \simeq 0 \quad (28)$$

kikötésnek. (Ez a követelmény a $k = 4$ esetben a peremvonalnak csak azokban a pontjaiban teljesíthető, amelyek nem fekszenek a sarokpontok közvetlen közelében). A (28) képletben szereplő \bar{N}_x^{I} , \bar{N}_x^{II} , \bar{N}_x^{III} értékek a (14a), (17a), (22a)

képletek szerint számíthatók:

$$\bar{N}_x^I = -\frac{R^2}{2h} \sum_{i=0}^j \frac{\bar{P}_i}{i+2} (1+\eta^2)^{\frac{i-2}{2}} (1+\eta^2+2i\eta^2),$$

$$\bar{N}_x^{II} = \frac{2C_0}{a^2} \cdot \frac{1-\eta^2}{(1+\eta^2)^2}, \quad (29 \text{ a, b, c})$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_x^{III} = & -\frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^n C_{mk} \left\{ (m^2k^2 - mk) \left[1 - \binom{mk-2}{2} \eta^2 + \binom{mk-2}{4} \eta^4 - + \dots \right] - \right. \\ & \left. - (m^2k^2 + mk) \frac{g_0^{2mk}}{(1+\eta^2)^{mk}} \left[1 - \binom{mk+2}{2} \eta^2 + \binom{mk+2}{4} \eta^4 - + \dots \right] \right\}. \end{aligned}$$

A (10)¹ feltétel teljesedését a (29c) képletben szereplő $C_{1k}, C_{2k}, \dots, C_{nk}$ együtthatók alkalmas felvételével érhetjük el. Ez különféle módon történhetik, többek közt pl. egyszerű kollokációval. Ehhez a $\xi = 1$ peremvonal alkalmasan felvett n számú pontjában fel kell írni az

$$\bar{N}_x^I + \bar{N}_x^{II} + \bar{N}_x^{III} = 0$$

feltételt. Ily módon eljárva, n lineáris egyenletről álló n ismeretlenes egyenletrendszert kapunk, amelyet aztán a $C_{1k}, C_{2k}, \dots, C_{nk}$ együtthatókra meg kell oldanunk. A $C_{1k}, C_{2k}, \dots, C_{nk}$ együtthatók meghatározásának egy másik módja lehet előírni, hogy a $\xi = 1$ peremvonal mentén az $|\bar{N}_x|$ vagy \bar{N}_x^2 értékek integrálja minimális legyen. Olyankor, amidőn a külső peremvonal alaprajzi vetülete egyenlőoldalú háromszög, azt célszerű megkövetelni, hogy a $\xi = 1$ peremvonal mentén az \bar{N}_x feszítő erő abszolút értéke legyen minimális.

Megjegyzés. A gyakorlati esetben a felülvilágító nyílás r_0 sugara az alaprajzi sokszögbe írt kör a sugarához viszonyítva kicsiny, annak legfeljebb 0,3 szorososa. Ilyen esetekben a felülvilágító nyílás peremétől kellő távolságban a héj feszültségi állapotára alig bír befolyással az a körülmény, hogy a nyílást szegélyező peremgyűrűnek van-e vagy sincs hajlító ellenállása. Más a helyzet azonban a peremgyűrű közvetlen környezetében. Itt a héj feszültségi állapotát lényegesen befolyásolja az a körülmény, hogy a peremgyűrű rendelkezik-e vagy sem hajlító ellenállással.

5. Ellenőrzés

Az előzőekben ismertetett számító eljárás — természetesen — csak közelítő jellegű. Ezért a számítás pontossági fokának ellenőrzésére célszerű a számítás eredményeként kapott $C_{1k}, C_{2k}, \dots, C_{nk}$ együtthatók felhasználásával

az \bar{N}_x derékerő értéket a $\xi = 1$ peremvonal különböző pontjaiban megállapítani, és az így nyert értékeket a $\xi = 1$ peremvonal mentén működő \bar{N}_y derékerő értékével egybevetni. Az alkalmazott közelítő eljárás akkor megfelelő, ha a

$$q = \left| \frac{\bar{N}_x}{\bar{N}_y} \right| \quad (30)$$

hibahányados az egységhez viszonyítva kicsiny.

A javasolt számító eljárás pontossági fokának megítéléséhez további adatokat kapunk, ha azokban a pontokban, amelyekben a redukált feszítő erők értéke pontosan számítható, e pontos értékeket a felvett feszültségfüggvénynek megfelelő közelítő értékekkel egybevetjük. Ilyen összehasonlítási lehetőség kínálkozik a $\xi = 1$ peremív mentén az \bar{N}_y feszítő erőre nézve, továbbá a héj sarokpontjaiban az \bar{N}_x , \bar{N}_{xy} , \bar{N}_y feszítő erőket illetően [4]. A $\xi = 1$ peremvonal mentén ui. az \bar{N}_y feszítő erő pontos értéke az

$$\bar{N}_y = -\frac{2a^2}{h} \bar{p} \quad (31)$$

képlet szerint számítható, a $\xi = 1$, $\eta = \sqrt{3}$ sarokpontban pedig \bar{N}_x , \bar{N}_{xy} és \bar{N}_y pontos értéke az alábbi képletek segítségével határozható meg:

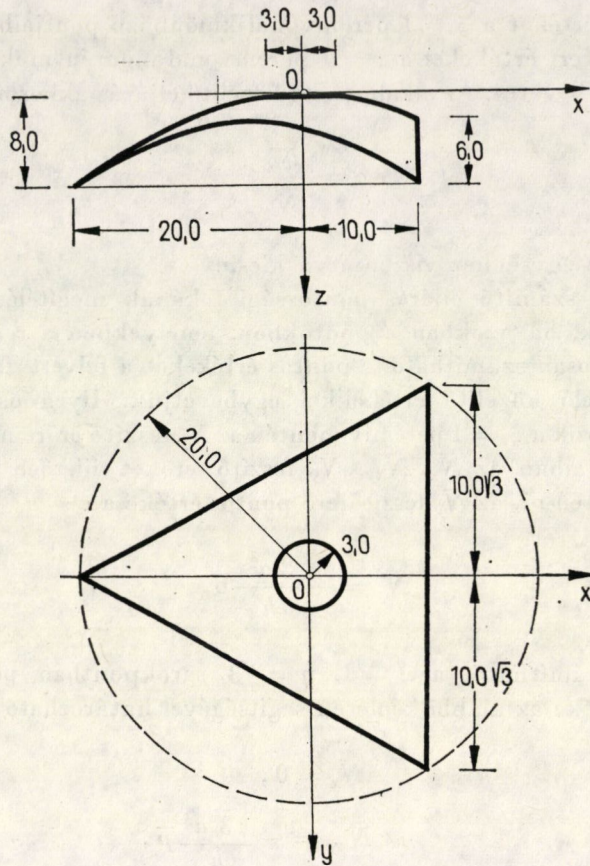
$$\begin{aligned} \bar{N}_x &= 0, \\ \bar{N}_{xy} &= -\frac{\sqrt{3} a^2}{h} \bar{p}, \\ \bar{N}_y &= -\frac{2a^2}{h} \bar{p}. \end{aligned} \quad (32)$$

A (31) és (32) képletekben a felülvilágító nyílás sugara nem szerepel. Ez a körülmény azt árulja el, hogy a (31), (32) képletben szereplő feszítő erők függetlenek a felülvilágító nyílás sugarától, tehát függetlenek attól is, hogy van-e, vagy sem a héjon felülvilágító nyílás, és ha van, akkor van-e a felülvilágító nyílás peremgyűrűjének hajlító ellenállása, vagy nincs.

6. Számpélda

Alkalmazzuk a fentiekben ismertetett számító eljárást, az 5. ábrán feltüntetett szabályos háromszögalaprajzú függőleges tengelyű forgásparaboloid-héjra. Terhelje e héjat az alaprajz területén egyenletesen megoszló

$$\bar{p}_0 = 300 \text{ kp/m}^2$$



5. ábra. Szabályos háromszögalaprajz fölé szerkesztett forgásparaboloidhéj központos elrendezésű kör alakú felülvilágító nyílással ($\varrho = 0,3$)

intenzitású függőleges erőrendszer, és legyen a felülvilágító nyílás peremgyűrűjének súlya + terhe

$$G_0 = 150 \text{ kp/m.}$$

A szóban forgó esetben — háromszögalaprajzú héjról lévén szó —

$$k = 3.$$

A héj méretadatai

$$a = 10,0 \text{ m, } R = 20,0 \text{ m, } r_0 = 0,3 \text{ m, } h = 8,0 \text{ m,}$$

tehát éppen a szélsőségesnek tekinthető

$$\varrho_0 = \frac{r_0}{a} = 0,3$$

eset forog fenn. Minthogy a héjra az alaprajz területén egyenletesen megoszló teher hat, így

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2 = \dots = \bar{p}_j = 0.$$

A számítás során először — a (18) képlet segítségével — a C_0 állandó értékét állapítjuk meg:

$$C_0 = \frac{20,0^2 \cdot 10,0^2}{4 \cdot 8,0} \left(-\frac{150 \cdot 0,3}{10,0} + \frac{300 \cdot 0,3^2}{2} \right) = 11\,250 \text{ kp/m}. \quad (33)$$

Ezután a $\xi = 1$ peremvonal mentén működő \bar{N}_x erő három komponensét ($\bar{N}_x^I, \bar{N}_x^{II}, \bar{N}_x^{III}$) határozzuk meg. A (29a) képlet szerint

$$\bar{N}_x^I = -\frac{20,0^2}{2 \cdot 8,0} \cdot \frac{300}{2} (1 + \eta^2)^{-1} (1 + \eta^2) = -3750 \text{ kp/m}, \quad (34a)$$

a (29b) képlet szerint pedig

$$\bar{N}_x^{II} = \frac{2 \cdot 11\,250}{10,0^2} \cdot \frac{1 - \eta^2}{(1 + \eta^2)^2} = 225 \frac{1 - \eta^2}{(1 + \eta^2)^2}. \quad (34b)$$

Viszont a (29c) képlet szerint, ha a szummáció során az egyszerűség érdekében csak a $m = 1$ és $m = 2$ tagokat vesszük figyelembe:

$$\begin{aligned} \bar{N}_x^{III} &= -\frac{1}{10,0^2} \left\{ C_3 \left[(3^2 - 3) \cdot 1 - (3^2 + 3) \frac{0,3^6}{(1 + \eta^2)^3} (1 - 10\eta^2 + 5\eta^4) \right] + \right. \\ &+ C_6 \left[(6^2 - 6) (1 - 6\eta^2 + \eta^4) - (6^2 + 6) \frac{0,3^{12}}{(1 + \eta^2)^6} (1 - 28\eta^2 + 70\eta^4 - 28\eta^6 + \eta^8) \right] \left. \right\} = \\ &= \left[-0,06 + 0,0000\,8748 \frac{1 - 10\eta^2 + 5\eta^4}{(1 + \eta^2)^3} \right] C_3 + \\ &+ \left[-0,3 (1 - 6\eta^2 + \eta^4) + 0,000\,000\,2232 \frac{1 - 28\eta^2 + 70\eta^4 - 28\eta^6 + \eta^8}{(1 + \eta^2)^6} \right] C_6. \quad (34c) \end{aligned}$$

A $\xi = 1$ peremvonal mentén működő \bar{N}_x feszítő erő e három komponens összege:

$$\begin{aligned} \bar{N}_x &= -3750 + 225 \frac{1 - \eta^2}{(1 + \eta^2)^2} - \left[0,06 - 0,0000\,8748 \frac{1 - 10\eta^2 + 5\eta^4}{(1 + \eta^2)^3} \right] C_3 - \\ &- \left[0,3 (1 - 6\eta^2 + \eta^4) - 0,000\,000\,2232 \frac{1 - 28\eta^2 + 70\eta^4 - 28\eta^6 + \eta^8}{(1 + \eta^2)^6} \right] C_6. \quad (35) \end{aligned}$$

A fenti képletben a szögletes zárójelbe foglalt kifejezések második tagja az elsőhöz viszonyítva jelentéktelen és mint ilyen, legalább is első közelítésben, elhanyagolható. Ezzel az elhanyagolással az előbbi képlet helyett ez írható:

$$\bar{N}_x = -3750 + 225 \frac{1 - \eta^2}{(1 + \eta^2)^2} - 0,06 C_3 - 0,3 (1 - 6\eta^2 + \eta^4) C_6. \quad (36)$$

Minthogy a (36) képletben két ismeretlen együttható — C_3 és C_6 — szerepel, két feltétel teljesítését áll módunkban biztosítani.

Első feltételként előírhatjuk, hogy \bar{N}_x értéke a $\xi = 1$ peremvonal $\eta = 0$ és $\eta = \sqrt{3}$ pontjaiban azonos értékű legyen, ami a (36) képlet alapján a következő egyenlettel fejezhető ki:

$$-3750 + 225 - 0,06 C_3 - 0,3 C_6 = -3750 - 225 \frac{2}{16} - 0,06 C_3 + 0,3 \cdot 8 C_6.$$

Innen

$$C_6 = 93,75. \quad (37)$$

Ezt az értéket felhasználva, a (36) egyenlet helyett az alábbi írhatjuk:

$$\bar{N}_x = -3750 + 225 \frac{1 - \eta^2}{(1 + \eta^2)^2} - 0,06 C_3 - 28,125(1 - 6\eta^2 + \eta^4). \quad (38)$$

A fenti kifejezésnek a $-\sqrt{3} \leq \eta \leq \sqrt{3}$ intervallumon ott vannak szélső értékei, ahol

$$\frac{\partial \bar{N}_x}{\partial \eta} = 0,$$

vagyis ahol

$$450 \eta \frac{(\eta^2 - 3)}{(1 + \eta^2)^2} - 112,5 \eta(\eta^2 - 3) = 0. \quad (39)$$

A szóban forgó helyek abszcisszái ennek az egyenletnek a gyökei. Az említett gyökök közül három azonnal felírható. Ezek a gyökök

$$\eta = 0, \eta = \pm\sqrt{3}.$$

A (39) egyenletet a fenti gyökökkel való egyszerűsítés után így írhatjuk:

$$\frac{450}{(1 + \eta^2)^2} - 112,5 = 0.$$

Innen

$$(1 + \eta^2)^2 = 4,$$

vagyis az egyenlet további gyökei:

$$\eta_1 = \pm \sqrt[3]{4 - 1} = \pm 0,766 421. \quad (40)$$

Második feltételként megkövetelhetjük, hogy az \bar{N}_x feszítőerő értéke a $\xi = 1, \eta = 0$ helyen ellentettje legyen a $\xi = 1, \eta = \pm\eta_1$ helyen vett értéknek. Ezt a követelményt a (38) képlet alapján a következő egyenlettel fejezhetjük ki:

$$\begin{aligned} -3750 + 225 - 0,06 C_3 - 28,125 &= \\ = 3750 - 225 \frac{1 - \eta_1^2}{(1 + \eta_1^2)^2} + 0,06 C_3 + 28,125 (1 - 6\eta_1^2 + \eta_1^4). \end{aligned}$$

Ebből az egyenlethől a (40) alatti η_1 érték felhasználásával az eddig határozatlan C_3 együtt-hatóra az alábbi érték adódik:

$$C_3 = -60 041,57. \quad (41)$$

A fentiekben a C_3 és C_6 együtthatók értékét a (36) egyenlet alapulvételével határoztuk meg. Ha az így nyert értékeket első közelítő értékeknek tekintjük, és a számítást most már a (35) egyenlet alapulvételével megismételjük, a C_3 és C_6 együtthatókra az alábbi pontosabb értékeket kapjuk:

$$\begin{aligned} C_3 &= -60 055,208, \\ C_6 &= 92,291 124. \end{aligned} \quad (42)$$

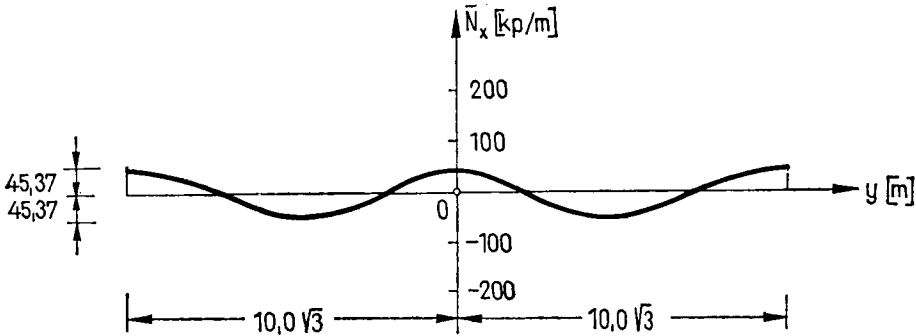
Ezeket az értékeket a (35) képletbe behelyettesítve, a $\xi = 1$ peremvonal különböző pontjaiban az \bar{N}_x feszítőerőre az I. táblázatba foglalt értékek adódnak. A \bar{N}_x erőknak a $\xi = 1$ peremvonal menti megoszlását a 6. ábra szemlélteti.

Mint az I. táblázatból, illetve a 6. ábrából látható, a $\xi = 1$ peremívre jutó \bar{N}_x feszítőerő abszolút értékének maximuma

$$|\bar{N}_x| = 45,37 \text{ kp/m}.$$

Ezzel szemben a $\xi = 1$ peremív mentén működő \bar{N}_y feszítőerő abszolút értéke

$$|\bar{N}_y| = \frac{2a^2}{h} \bar{p}_0 = \frac{2 \cdot 10,0^2}{8,0} 300 = 7500 \text{ kp/m},$$



6. ábra. A $\xi = 1$ peremívre jutó \bar{N}_x erők diagramja

I. táblázat

Az \bar{N}_x feszítőerő értéke a $\xi = 1$ peremvonal különböző pontjaiban

$\pm \eta$	\bar{N}_x kp/m
0	+ 45,37
0,2	+ 29,09
0,4	- 6,47
0,6	- 36,23
0,8	- 45,29
1,0	- 33,31
1,2	- 8,10
1,4	+ 20,09
1,6	+ 40,80
$\sqrt{3}$	+ 45,37
$\sqrt{3\sqrt{4-1}}$	- 45,37

úgyhogy a q hibahányados mindössze

$$q = \frac{45,37}{7500} = 0,006 .$$

Ez az érték az egységhez képest kicsiny, és ezért az ismerttetett számító eljárást kellő pontosságúnak tekinthetjük.

További ellenőrzésként az

$$\bar{N}_y = -3750 - 225 \frac{1 - \eta^2}{(1 + \eta^2)^2} + \left[0,06 - 0,0000 8748 \frac{1 - 10 \eta^2 + 5 \eta^4}{(1 + \eta^2)^3} \right] C_3 +$$

$$+ \left[0,3(1 - 6 \eta^2 + \eta^4) - 0,000 000 2232 \frac{1 - 28 \eta^2 + 70 \eta^4 - 28 \eta^6 + \eta^8}{(1 + \eta^2)^6} \right] C_6$$

képlet segítségével meghatároztuk a közelítő feszültségfüggvénynek megfelelő \bar{N}_y redukált feszítőerő értékét a $\xi = 1$ peremvonal egyes pontjaiban. A számítás eredményét a II. táblázatba foglaltuk. Mint látható, a közelítő eljárás szerinti \bar{N}_y értékek alig térnek el a (31) képlet szerinti pontos

$$\bar{N}_y = - \frac{2 \cdot 10,0^2 \cdot 300}{8,0} = - 7500 \text{ kp/m}$$

értéktől.

II. táblázat

Az \bar{N}_y feszítőerő értéke a $\xi = 1$ peremvonal különböző pontjaiban

$\pm \eta$	\bar{N}_y kp/m
0	-7545,37
0,2	-7529,09
0,4	-7493,53
0,6	-7463,77
0,8	-7454,71
1,0	-7466,69
1,2	-7491,90
1,4	-7520,09
1,6	-7540,80
$\sqrt{3}$	-7545,37
$\sqrt{3\sqrt{4}-1}$	-7545,73

Hasonló a helyzet a $\xi = 1, \eta = \pm\sqrt{3}$ sarokpontokban az $\bar{N}_x, \bar{N}_{xy}, \bar{N}_y$ feszítőerők tekintetében is. Ezekben a helyeken a javasolt számító eljárás szerinti feszítőerők:

$$\begin{aligned} \bar{N}_x = & -3750 + 225 \frac{(-2)}{4^2} - \left[0,06 - 0,0000\ 8748 \frac{16}{4^3} \right] C_3 - \\ & - \left[0,3(-8) - 0,000\ 000\ 2232 \frac{(-128)}{4^6} \right] C_6 = 45,37 \text{ kp/m,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{xy} = & \pm \left\{ 0 + 225 \frac{2}{4^2} + \left[0,06 - 0,0000\ 8748 \frac{16}{4^3} \right] C_3 + \right. \\ & \left. + \left[0,3(-8) + 0,000\ 000\ 2232 \frac{128}{4^6} \right] C_6 \right\} \sqrt{3} = \mp 3795,37 \sqrt{3} \text{ kp/m,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_y = & -3750 - 225 \frac{(-2)}{4^2} + \left[0,06 - 0,0000\ 8748 \frac{16}{4^3} \right] C_3 + \\ & + \left[0,3(-8) - 0,000\ 000\ 2232 \frac{(-128)}{4^6} \right] C_6 = -7545,37 \text{ kp/m,} \end{aligned}$$

míg a (32) képlet szerint számítható pontos értékek:

$$\begin{aligned} \bar{N}_x &= 0, \\ \bar{N}_{xy} &= \mp \frac{10,0^2 \cdot 300}{8,0} \sqrt{3} = \mp 3750 \sqrt{3} \text{ kp/m,} \\ \bar{N}_y &= -\frac{2 \cdot 10,0^2 \cdot 300}{8,0} = -7500 \text{ kp/m.} \end{aligned}$$

Mint látható, a pontos és a közelítő értékek közti eltérés jelentéktelen.

IRODALOM

1. CSONKA, P.: Paraboloid Shell of Revolution Triangular in Plan with a Circular Skylight Opening. *IASS Bulletin* 36 (1960), 77—84.
2. PUCHER, A.: Über den Spannungszustand in doppelt gekrümmten Flächen. *Beton und Eisen* 59 (1964), 327—331, 375—377.
3. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. 5. Aufl. Springer Verlag, Wien 1959.
4. CSONKA, P.: Formulae for Controlling Stress Calculation of Calotte Shells. *Acta Techn. Hung.* 29 (1960), 355—368.
5. CSONKA, P.: Membranschalen. *Bauingenieur Praxis*, Heft 16. Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin—München 1966.
6. FLÜGGE, W.: Das Relaxationsverfahren in der Schalenstatik. (Berechnung einer Paraboloidschale mit einer quadratischen Oberlichtöffnung). *Federhofer—Girkmann-Festschrift*. Beiträge zur angewandten Mechanik. Franz Deuticke Verlag, Wien 1950, pp. 17—35.
7. CSONKA, P.: Paraboloid Shell of Revolution with an Eccentric Skylight Opening. *World Conference on Shell Structures* October 1—4, 1962, San Francisco, California. National Academy of Sciences — National Research Council, Washington, D. C. 1964, 501—508.

Regular Polygonal Based Paraboloid Shells of Revolution, Having a Circular Skylight Opening. Paper presents on the bases of the usual assumptions of the membrane theory a method for the determination of the state of stresses in the shells mentioned in the title. It is assumed that the skylight opening of the shell is bordered by an edge ring which exerts no resistance on horizontally-planned bending moments, and the arches, supporting the the outer edge of the shell, do not resist lateral forces. The presented solution is of an approximate character: the conditions relating to the edge ring are exactly satisfied, but those, referring to the edge arches, are only approximately so. The application of the given formulae is explained by a numerical example, a circumstane which at the same time testifies the suitability of the expounded method.

Rotationsparaboloidschale über regelmäßigem Vieleckgrundriß mit kreisförmiger Oberlichtöffnung. Zur Bestimmung des Kräftespiels der im Titel erwähnten Schalen wird ein Verfahren im Rahmen der gewohnten Annahmen der Membrantheorie mitgeteilt. Es wird angenommen, daß die Oberlichtöffnung von einem Ringbalken umrandet ist, der keinerlei Widerstand gegen horizontale Biegemomente leistet, während die äußeren Randbögen Seitenkräften gegenüber keinen Widerstand ausüben. Die mitgeteilte Lösung ist von annäherndem Charakter: sie erfüllt die innere Randbedingungen genau, die äußeren aber nur annäherungsweise. Die Anwendung der Methode wird durch ein Zahlbeispiel illustriert, das gleichzeitig auch die Zweckmäßigkeit des Verfahrens beweist.