A HORDALÉKMOZGÁS KORSZERŰ ELMÉLETI ÉS GYAKORLATI KÉRDÉSEI*

BOGÁRDI JÁNOS**
AKADÉMIKUS

[Beérkezett: 1974. január 21-én]

A tanulmány a hordalékmozgás elméleti kérdéseit mérlegegyenletek segítségével vizsgálja. Bevezeti a tömeg-, a kinetikai energia, a belső energia és az impulzus megmaradását kifejező differenciálegyenleteket. Azokat értékeli és összehasonlítva jellemző törvényszerűségeket állapít meg. A mérlegegyenletek elvileg egyaránt érvényesek a lebegtetett és a görgetett hordalék mozgására is, természetesen mindkettőnél külön-külön tekintve a rájuk vonatkozó és egymástól nagyon nagy mértékben eltérő egyértelműségi feltételeket. Kitér a vízfolyások, hordalékszállító képességére mind elméleti mind gyakorlati vonatkozásban. A *Dráva* kísérleti szakaszán végzett mérések és észlelések alapján számszerűen bemutatja a lebegtetett és a görgetett hordalék mozgatására, valamint a meder kimélyülésével, ill. feltöltődésével kapcsolatos anyagátrendeződésre fordított energiahányadokat is.

Jelölések

L	hosszúság
T	idő
M	tömeg
Θ	hőmérséklet
E	energia, munka, hő [$ML^2T^{-2} = FL$]
F	erő, súlyerő [MLT^{-2}]
B	a meder átlagos szélessége [L]
c	fajhő [$EM^{-1}\Theta^{-1}$]
C	hordaléktöménység [FL^{-3}]
C_k	átlagos hordaléktöménység [FL^{-3}]
d	szemátmérő [L]
d_g	átlagos szemátmérő [L]
D	átlagos vízmélység [L]
D_s	ülepedési úthossz [L]
$D_{s\,\text{tényleges}}$	tényleges ülepedési úthossz [L]
e_z	a belső energia sűrűsége [EL^{-3}]
E	energiaveszteség az L szakaszon az egyes időszakokban [FL]
E_1	a lebegtetett hordalékszállítás energiaszükséglete az egyes időszakokban [FL]
E_2	a görgetett hordalékszállítás energiaszükséglete az egyes időszakokban [FL]
E_3	a meder-átrendeződés energiaszükséglete az egyes időszakokban [FL]

* Az MTA Műszaki Tudományok Osztályán 1973. december 13-án tartott székfoglaló előadás.

** Prof. Dr. Bogárdi János, 1024 Budapest, Mártírok útja 31—33.

E_t	a különböző ellenállások energiaszükséglete az egyes időszakokban [FL]
f	súrlódási tényező
F	a szakaszon levonult hordalékos víz súlya [F]
F_1	a szakaszon levonult lebegtetett hordalék vízben mért súlya [F]
F_2	a szakaszon levonult görgetett hordalék vízben mért súlya [F]
F_3	az átrendeződött anyag vízben mért súlya [F]
F_i	az i-edik hordalékfrakció összes súrlódási felülete [L^2]
g	nehézségi gyorsulás [LT^{-2}]
G_B	görgetett hordalékhozam [FT^{-1}]
G_s	lebegtetett hordalékhozam [FT^{-1}]
h_v	vízszintkülönbség, egységsúlyú folyadék mozgási energiája [L]
i, j, k, l	indexek
L	a kísérleti szakasz hossza [L]
L_{ik}	a kinetikai energiaátadás vezetési tényezője [ETL^{-5}]
L_{il}	konduktív áramsűrűség vezetési tényezője (Tömeg: L^2T^{-1}; impulzus: $FL^{-2}T, \ldots$)
M	a víz össztömege [M]
M_1	a hordalék össztömege [M]
$M_{1,i}$	az i-edik frakció tömege [M]
N	az összes frakció összes szemcseszáma [1]
N_i	az i-edik frakció összes szemcseszáma [1]
q_i	forrássűrűség [tömeg: $ML^{-3}T^{-1}$; impulzus: FL^{-3}]
$q_{h,i}$	az i-edik frakció forrássűrűsége [tömeg: $ML^{-3}T^{-1}$; impulzus: FL^{-3}]
q_B	görgetett hordaléksúly egységnyi szélességben [$FL^{-1}T^{-1}$]
$Q_{\min}$	legkisebb vízhozam [L^3T^{-1}]
$Q_{\text{közép}}$	közepes vízhozam [L^3T^{-1}]
$Q_{\max}$	legnagyobb vízhozam [L^3T^{-1}]
Q_s	lebegtetett hordalékhozam térfogata [L^3T^{-1}]
Q_z	a hordalékos víz hozama [L^3T^{-1}]
S	a vízfelszín esése, az energiavonal esése
t, t_1, t_2	idő [T]
Δt	az egyes időszakok időtartama [T]
$\mathbf{v}$	konvektív áramlási sebesség, vízsebesség [LT^{-1}]
$\mathbf{v}'$	pulzációs sebesség [LT^{-1}]
$\mathbf{v}_h$	a hordalék átlagos sebessége [LT^{-1}]
$\mathbf{v}'_h$	a hordalék pulzációs sebessége [LT^{-1}]
$\mathbf{v}_{h,i}$	az i-edik hordalékfrakció közepes sebessége [LT^{-1}]
$\mathbf{v}'_{h,i}$	az i-edik hordalékfrakció pulzációs sebessége [LT^{-1}]
V	a víz össztérfogata [L^3]
V_1	a hordalék össztérfogata [L^3]
$V_{1,i}$	az i-edik frakció össztérfogata [L^3]
v_k	közepes vízsebesség [LT^{-1}]
x	koordináta [L]
x_i	extenzív mennyiség
y_i	intenzív mennyiség
γ	a víz fajsúlya [FL^{-3}]
γ_1	a hordalék fajsúlya [FL^{-3}]
γ_z	a hordalékos víz térfogatsúlya [FL^{-3}]
$\varepsilon_{h,i}$	az i-edik hordalékfrakció vezetési tényezője [L^2T^{-1}]
ε_h	a hordalék átlagos vezetési tényezője [L^2T^{-1}]
η	a hordalékszállító-képesség mértéke
λ	hővezetési tényező [$ET^{-1}L^{-1}\Theta^{-1}$]
μ	az abszolút viszkozitás együtthatója [$FL^{-2}T$]
ν	a kinetikai viszkozitás együtthatója [L^2T^{-1}]
ν_i	az i-edik extenzív sűrűsége
ϱ	a folyadék sűrűsége [ML^{-3}; ill. FT^2L^{-4}]
ϱ_1	a hordalék sűrűsége [ML^{-3}; ill. FT^2L^{-4}]
$\varrho_{1,i}$	az i-edik hordalék frakció sűrűsége [ML^{-3}; ill. FT^2L^{-4}]
ϱ_z	a hordalékos víz sűrűsége [ML^{-3}; ill. FT^2L^{-4}]
τ_h	a hordalékszemeken fellépő átlagos csúsztató feszültség [FL^{-2}]
$\tau_{h,i}$	az i-edik frakción fellépő csúsztató feszültség [FL^{-2}]
φ_i	az i-edik frakció fajlagos felülete [L^2M^{-1}]
φ_1	a hordalékszemcse közepes fajlagos felülete [L^2M^{-1}]
$\overline{\omega}$	a hordalék átlagos ülepedési sebessége [LT^{-1}]

Bevezetés

A természetes vízfolyások hordalékszállításának meghatározása rendkívül fontos feladat a vízgazdálkodásban. A hordalékszállítás törvényszerűségeit számos értékes elméleti és tapasztalati összefüggés alapján vesszük figyelembe. Ezek általában egy-egy részjelenségre vonatkoznak, és a legújabb kutatások kivételével legtöbbnek szabatos fizikai megalapozottsága is hiányzik. További hiányosság, hogy az összefüggések érvényességi körének (értelmezési tartományának) körülhatárolása sem szabatos. Hiányzik a levezetésüknél bevezetett feltevésekből és közelítésekből származó hibahatár értékének, sőt legtöbbször a várható eltéréseknek becslésszerű megadása is. A fentiekből következik, hogy az elméleti, valamint az ún. félempirikus és empirikus kapcsolatok egymáshoz való viszonyát sem lehetett még ez ideig kellőképpen tisztázni. Mindez persze nem a hordalékmozgással kapcsolatos kutatások és tapasztalati eredmények valamilyen különleges sajátsága. Nyilván más természeti jelenségek vizsgálatánál is hasonló a helyzet. Az is nyilvánvaló, hogy az említett hiányosságok nem valami „mulasztásnak", hanem a hosszú időn át folytatott szerteágazó kutatások szükségszerű következménye.

Ismereteink gyarapodásával fokozatosan és mind sürgetőbben jelentkezett az eddigi eredmények rendszerezésének és kritikai összehasonlításának a szükségessége. Ehhez a szintetizáláshoz természetesen a hordalékmozgásnak mint fizikai jelenségnek az általános leírása, jellemzése is elengedhetetlen. Az ilyen irányú vizsgálatokkal már mintegy 10÷15 év óta szórványosan találkozunk a nemzetközi szakirodalomban.

Az elméleti kutatásokkal egyidejűleg a félempirikus és empirikus kapcsolatokat eredményező és a természetes vízfolyásokon végzett észlelések és mérések is átalakultak. Az egész feladat egyes részleteinek tisztázására irányulnak, és napjaink fejlett mérő és észlelő berendezéseinek segítségével már eddig is értékes eredményekre vezettek.

A fentiekben vázolt korszerű elméleti kutatások és gyakorlati tapasztalatok széles körű és általános tárgyalásának nemcsak az idő és terjedelem, hanem viszonylag szűk ismereteink is korlátokat szabnak. Ezért mindkettőre, saját kutatásaink alapján, egy-egy példát szeretnénk bemutatni. A „példa" elnevezés talán helytelen is, hiszen tényleges eredményekről van szó. Ezt megelőzően azonban célszerű az elméleti kutatások, valamint a félempirikus és empirikus összefüggések legjellemzőbb sajátosságait összefoglalni.

Az elméletnek a hordalékmozgás tárgykörére vonatkozó leíró szerepénél figyelembe kell vennünk, hogy rendkívül bonyolult fizikai jelenséggel állunk szemben. Többfázisú közeg bonyolult áramlásáról van szó, amelynek leírását az a tény is nehezíti, hogy a szilárd fázis nem homogén összetételű, hanem különböző anyagi tulajdonságú és méretű részecskék keveréke. Ennek a polidiszperz halmaznak a mozgásánál ütközések lépnek fel, amelyek nyilván impulzuscserével és energiaveszteséggel járnak. A folyékony és a szilárd fázis közötti kölcsönhatás látszólag szinte áttekinthetetlen szerkezetű jelenséget tár elénk. Ennek szabatos leírása — mai ismereteink szerint — nem lehetséges. Ezért ennek az összetett fizikai jelenségnek a leírására a kutatók különböző módszereket vezettek be.

A legelterjedtebb *a tiszta empirikus leírás*, amely nem is nevezhető elméletnek, hiszen általában nagyszámú mérési és kísérleti adat összegyűjtésével és annak alapján közelítő (korlátozott érvényességi körű) összefüggések, az ún. empirikus függvénykapcsolatok meghatározására korlátozódik. Látni fogjuk majd, hogy milyen rendkívül értékesek ezek az összefüggések, de azzal is tisztában kell lennünk, hogy ezek általában nem általánosíthatók.

A hordalékmozgás jelenségének fejlettebb leírását adják az ún. *félempirikus összefüggések*. Ezek több előzetes feltevés és közelítés bevezetésével, bár jelentős elhanyagolással, bizonyos részjelenségeket igen hatásosan határoznak meg.

A félempirikus összefüggések szinte áttekinthetetlen mennyiségben találhatók az irodalomban. Sajnos ez ideig — mint már említettük — alig történt erőfeszítés arra vonatkozóan, hogy ezeket rendszerbe foglalják, érvényességi körüket meghatározzák és megadják a közelítés következtében fellépő eltérések, ill. hibák nagyságát.

A korszerű hordalékkutatások egyik fő célkitűzése olyan alaptörvények felállítása, amelyek a hordalékmozgás jelenségére egyetemlegesen érvényesek.

Jelen tanulmányban először röviden azokkal a vizsgálatokkal szeretnénk foglalkozni, amelyek a termodinamikában, sőt a műszaki tudományok egyéb területein is már korábban sikeresen alkalmazott *transzport-elméleten* alapszanak. Ezt követően pedig a természetben végzett mérések alapján a vízfolyások hordalékszállító képességét tárgyaljuk.

1. A transzport-elmélet és alkalmazása a hordalékszállításnál

1.1. Az általános mérlegegyenletek

Általánosságban minden műszaki jelenség olyan, az időben változó fizikai folyamatnak tekinthető, amely valamilyen, az anyag kiterjedésével arányos mennyiség (anyagi tulajdonság) áramlásának törvényeivel leírható. Az anyag kiterjedésével arányos anyagi tulajdonságokat (pl. térfogat, tömeg, energia, impulzus) *extenzív mennyiségeknek* nevezik. Röviden tehát minden műszaki jelenség *transzport folyamat*, amely a kérdéses extenzív mennyiség mérlegegyenletével írható le. Az extenzív mennyiségekre felírt *mérlegegyenletek* (ún. transzport-egyenletek) képezik minden műszaki jelenség matematikai alaptörvényét.

Az extenzív mennyiségek időbeli változását az extenzívek áramai, valamint az extenzívek forrása (vagy nyelője) idézik elő. A forrás vagy nyelő az extenzív mennyiségének koncentrált vagy megoszló keletkezését (hozzáadását), ill. eltűnését (elvonását) fejezi ki.

Az extenzív áramok részben *a konvektív* (helyváltoztató), részben pedig *konduktív* (vezetéses) áramok összegezéséből adódnak ki.

A konvektív áram a $\mathbf{v}$ áramlási sebesség és az extenzív mennyiség szorzataként könnyen számítható.

A konduktív áramot – mint ismeretes – Onsager szerint – a kiegyenlítődésre törekvő y_l ún. *intenzív mennyiségek* (pl. hőmérséklet, feszültség, sűrűség) idézik elő. Mivel az inhomogenitás mértékét az ún. nabla operátor jelzi, valamilyen y_l intenzív által előidézett konduktív áramot úgy kapjuk meg, ha az intenzív mennyiség gradiensét a kérdéses i-ik extenzívre vonatkozó vezetési tényezővel L_{il} megszorozzuk (pl. folyadéknál: a molekuláris impulzusdiffúzió vezetési tényezője a folyadék μ dinamikai viszkozitásával azonos). ONSAGER nevéhez fűződik annak felismerése is, hogy az egyes extenzívek áramát több jellemző intenzív gradiense együttesen is előidézheti. Ez lényegileg a kereszteffektusok figyelembevételét jelenti.

A mérlegegyenletet adott térfogatban foglalt extenzív mennyiség változására vonatkozóan is felírhatjuk. Mivel azonban a hidromechanikában és így a hordalékmozgásnál is az egyes helyi (lokális) változások ismeretére van szükségünk, a mérlegegyenletet célszerűbb az *extenzív mennyiség sűrűségének* változására felírni. Ebben az esetben természetesen az áram és forrás, ill. nyelő helyett az áramsűrűség és forrássűrűség (vagy nyelősűrűség) veendő figyelembe.

Ily módon az általános mérlegegyenlet integrális alakja, ha a konvektív és konduktív áramsűrűségek felületi integrálját ezek divergenciájának térfogati integráljával helyettesítjük:

$$\int_V \left[\frac{\partial \nu_i}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\nu_i \mathbf{v} + \sum_{l=1}^{n} - L_{il} \operatorname{grad} y_l\right) - q_i\right] \mathrm{d}V = 0 \tag{1}$$

Mivel pedig a fenti egyenlet csak akkor áll fenn, ha maga az integrandus zérus:

$$\frac{\partial \nu_i}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\nu_i \mathbf{v} + \sum_{l=1}^{n} L_{il} \operatorname{grad} y_l\right) = q_i \tag{2}$$

Az így nyert differenciális mérlegegyenlet lényegében azt fejezi ki, hogy valamely i-edik extenzív mennyiség ν_i sűrűségének lokális változása a felületi konvektív és konduktív áramsűrűségek, valamint a térfogati forrássűrűségek következménye.

Az egyes műszaki jelenségek leírásánál most már az a feladatunk, hogy megállapítsuk, *melyek a jellemző extenzív és melyek a jellemző intenzív mennyiségek, milyen a vezetési tényezők számértéke és milyen a forrássűrűségek tényleges alakja.*

A mérlegegyenletek mellett végül még az ún. *egyértelműségi feltételeket* is meg kell adni. Ezek — mint ismeretes — négy csoportba sorolhatók.

a) *Az értelmezési tartomány*, amellyel az egyenletekben szereplő változók érték-intervallumát, valamint a vizsgált rendszer geometrikai körülhatárolását adjuk meg.

b) *A peremfeltételek*, amelyek a rendszer és a környezet közötti kölcsönhatást jellemzik.

c) *A kezdeti feltételek*, amelyek a vizsgálat kezdeteként választott időpontban a rendszer állapotát határozzák meg. Megemlítjük, hogy a hordalékvizsgálatoknál általában permanens viszonyokat vizsgálunk, és ilyenkor természetesen a kezdeti feltételek elmaradnak.

d) *Az állapotegyenletek*, amelyek a rendszer „munkaközegének" fizikai tulajdonságait jellemzik.

1.2. Mérlegegyenletek a hordalékszállításnál

A hordalékszállítást kétfázisú áramlásnak kell tekintenünk. Ily módon külön mérlegegyenletek jellemzik a víz mozgásával és külön egyenletek a hordalék mozgásával kapcsolatos extenzív mennyiségek áramlását.

Szabatosan megfogalmazva, az elektromos, kémiai, optikai, akusztikai és biológiai hatásokat eleve elhanyagolva, mind a vízre, mind a hordalékra az alábbi négy extenzív mennyiség mérlegegyenletét kell felírnunk: tömeg, kinetikai energia, belső energia és impulzus. Ily módon mindkét fázisra négy-négy mérlegegyenlet adódik, amelyek közül három skaláris, egy pedig vektoriális egyenlet.

A kinetikai és a belső energia egyenletét, a kinetikai energia disszipációját figyelembe véve, összevontan is felírhatjuk.

A kinetikai energia és az impulzus egyenlete, ha azonos feltevések alapján vezetjük be, nyilván nem függetlenek, vagyis egyik a másikból leszármaztatható.

A hordalékszállítás mérlegegyenleteinél — mint már említettük — permanens folyamatot feltételezve — a c) alatti kezdeti feltételek elmaradnak. A másik három egyértelműségi feltétel meghatározására azonban mindenképpen szükség van.

Mindenekelőtt le kell írnunk az értelmezési tartományt. Az értelmezési tartomány — geometriailag — a vízfolyás határoló felülete, beleértve a szabad felszínt is. Fizikailag az értelmezési tartományt az egyes fizikai változók megengedett értékhatárai szabják meg.

A peremfeltételeknél tisztáznunk kell, hogy a vizsgált rendszer és környezete között milyen kölcsönhatások lehetségesek. Így pl. esetünkben a hordalék egy része a peremen (a meder felületén) lerakódhatik, ill. a perem egy részét az áramló víz kimoshatja. A szabad felszínen a feltétel csak annyit jelent, hogy sem folyadék, sem hordalékszemcse a felületen keresztül ki-, illetőleg be nem lép.

Az állapotegyenletek meghatározásánál egyértelműen meg kell adni, hogy milyen összetételű és milyen anyagi tulajdonságú hordalék mozog, továbbá magának a folyadéknak (víznek) melyek a legfontosabb fizikai jellemzői.

A hordalékszállítás mérlegegyenleteit így felírva a lebegtetett hordalékszállítás és a görgetett hordalékszállítás tulajdonképpen csak az egyértelműségi feltételek, ezek közül is csupán a peremfeltételek különbözőségében tér el egymástól. Pl. a lebegtetett hordalékszállításnál a szilárd és a folyékony fázis közötti kölcsönhatás, míg a görgetett hordalékszállításnál a szilárd részecskéknek a hordalékos mederfenéken való elmozdulása, ill. határesetben a szilárd részecskéknek a mederfenéktől való elválása a legjellemzőbb.

Az I. táblázatban feltüntettük mindkét fázis (I. víz, II. hordalék) extenzív mennyiségeit *(a)*, ezek áramait *(b)* és forrásait, illetőleg nyelőit *(c)*. A két fázis mérlegegyenleteinek (1 tömegmérleg, 2 kinetikai energiamérleg, 3 belső energiamérleg és 4 impulzusmérleg) a (2) képlet szerinti meghatározásához az extenzívek *(a)*, az extenzív-áramok *(b)* és az extenzív források, illetőleg nyelők *(c)* sűrűségét kell majd figyelembe vennünk.

Az I. táblázat vázlatos felsorolása is jól mutatja a két fázis, valamint az egyes mérlegegyenletek bonyolult kölcsönös összefüggéseit.

A kétfázisú rendszer energia- és impulzusforrása (a rendszer „inputja)" csak a tömegnek a nehézségi erőtérben végzett munkavégzése által közölt energia (ha a napsugárzásból és a levegő hőközléséből származó energiaközlést elhanyagoljuk) és az erőtér által átadott impulzus. Ez a forrás egyaránt növeli a víz és a hordalék energiáját, illetőleg impulzusát.

A külső hatás (a nehézségi erőtér) hozza létre a hordalék ülepedését, s így meghatározza az ülepedés sebességét is.

A víz mozgása, esése is a külső erőtér hatására következik be. A nehézségi erőtér munkájának egy része a hordalékszállításra, jelentős része pedig a mozgás fenntartása során fellépő különböző ellenállások (súrlódás, turbulencia, kanyarok stb.) legyőzésére fordítódik.

A kölcsönhatás során a víz kinetikai energiájának ill. impulzusának egy részét átadja a hordaléknak. Ennek köszönhető a hordaléksebesség vízszintes irányú konponense, továbbá, hogy a hordalék a nehézségi erőtérben is — lebegésben marad. A kinetikai energia diszipációja az egymással termikus kölcsönhatásban (hőcserében) levő víz és hordalék-részrendszer belső energiáját növeli. Termikus kölcsönhatás áll fenn ugyanakkor az egész rendszer és a

I. Táblázat

A víz és a hordalék mérlegegyenletei

		I. víz			II. hordalék, *i*-ik frakció		
		a extenzív	*b* extenzív áram	*c* extenzív forrás (nyelő)	*a* extenzív	*b* extenzív áram	*c* extenzív forrás (nyelő)
1.	Tömeg-mérleg	tömeg	konvektív	zérus (folytonos)	*i*-edik frakció tömege	konvektív és konduktív	aprítódás mint forrás *(általában elhanyagolják)*
2.	Kinetikai energia-mérleg	kinetikai energia	konvektív	nehézségi erőtér munkája mint *forrás;* energiaközlés a hordalékkal és energia disszipáció, mindkettő mint *nyelő*	*i*-edik frakció kinetikai energiája	konvektív	nehézségi erőtér munkája, a víz energiaközlése és az ütközésekből származó energianyereség, mindhárom mint *forrás;* hordalékmozgás energia disszipációja mint *nyelő*
3.	Belső energiamérleg	belső energia	konvektív és konduktív	energia disszipáció mint *forrás*	hordalék-frakciók belső energiája	konvektív	hordalékmozgás energia disszipációja mint *forrás*
4.	Impulzus-mérleg	impulzus	konvektív és konduktív	nehézségi erőtér mint *forrás;* átadás a hordaléknak mint *nyelő*	*i*-edik frakció impulzusa	konvektív és konduktív	nehézségi erőtér, a víztől és az ütközésektől eredő impulzus, mindhárom mint *forrás;* a hordalékmozgás disszipációja mint *nyelő*

környezete között is, amely olyan erős lehet, hogy a legtöbb gyakorlati esetben túlnyomórészt ez okozza a víz—hordalék-rendszer belső energiájának megváltozását. Ez azonban nem azt jelenti, hogy nincs disszipáció, hanem hogy a víz párolgása, valamint a rendszer és a környezet közötti energiacsere hatásához képest a disszipáció elhanyagolhatóan kicsi.

Vizsgáljuk meg az I. táblázatban szereplő extenzíveket, ezek áramait és forrásait, valamint mindhárom sűrűségét, külön-külön mind a vízre, mind a hordalékra, és bizonyos közelítő feltevések alapján határozzuk meg a mérlegegyenleteket is.

1. Tömegmérlegek (1.I. és 1.II.)

I. Víz

1.I/a) Víznél, ha *a kérdéses extenzív mennyiség a tömeg, ennek sűrűsége a* ϱ *tömegsűrűség.*

A vizet összenyomhatatlan, homogén közegnek tekintjük, vagyis tömegsűrűségének idő szerinti teljes megváltozása zérus:

$$\frac{d\varrho}{dt} = 0 \tag{3}$$

Mivel $\varrho = \varrho(t, x)$, a (3) összefüggést a

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varrho = 0 \tag{4}$$

alakban írhatjuk, ha $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ a vízáramlás sebessége.

1.I/b) Víznél a *konvektív tömegáram-sűrűsége*

$$\varrho \mathbf{v} \tag{5}$$

ahol $\mathbf{v}$ az áramlási sebesség vektora.

A konduktív tömegáram-sűrűséget (nevezhetjük öndiffúziónak) nem kell figyelembe vennünk, mert a (3), illetőleg (4) feltevés szerint minden térfogatelemből kilépő tömeg helyére ugyanolyan közegből ugyanannyi kerül.

1.I/c) Víznél *a tömeg forrássűrűségét* zérusnak tekintjük, a tömegáram forrásmentes (tehát pl. a vízbontás esetét is kizárjuk):

$$q_i = 0 \tag{6}$$

A fentiek szerint

1.I. a víz tömegmérleg-egyenlete (2) összefüggés szerint

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = 0 \tag{7}$$

amiből, mivel $\operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varrho$ a (4) összefüggés figyelembevételével

$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varrho + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ és $\varrho \neq 0$ lévén természetesen a

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{8}$$

vagyis a víz tömegáramának forrásmentessége folytonossága következik. A víz tömegmérleg-egyenletében tehát nincsen ismeretlen tényező.

II. Hordalék

1.II/a) A hordalék frakciók szerinti tömegét — jelenlegi ismereteink szerint — csak közelítőleg tudjuk meghatározni. Pontos leírásához igen sok mérésre lenne szükség. További kutatások feladata, hogy — a KOLMOGOROV által kidolgozott valószínűségelméleti modell alapján — a hordalékfrakciók matematikai leírása megtörténhessék. Az itt jelentkező nehézségeknek tudható be, hogy a kutatók túlnyomó többsége ma még csak „átlagos" szemcsemérettel számol, vagyis a hordalékot ún. monodiszperz halmaznak fogja fel.

A következőkben, elvi okokból a hordalék mérlegegyenleteit mindig csak egy frakcióra vonatkozóan írjuk fel.

A hordaléknál *az extenzív mennyiség sűrűsége a hordalék ϱ_1 tömegsűrűsége.* Ha $i = 1, 2, \ldots, n$ különböző frakcióval számolunk általánosságban $\varrho_{1,i}$-vel jelölhetjük az *extenzív mennyiség sűrűségét.*

1.II/b) Hordaléknál *a konvektív tömegáram-sűrűség* az i-edik frakcióra

$$\varrho_{1,i} \mathbf{v}_{hi} \tag{9}$$

ahol $\mathbf{v}_{hi}$ az i-edik frakció sebességvektora.

A konduktív tömegáram-sűrűséget turbulens diffúziónak nevezik és a molekuláris diffúzió analógiájára valamilyen $\varepsilon_{h,i}$ turbulens diffúziós tényező (általánosságban vezetési tényező) és a tömegsűrűség gradiensének szorzataként határozzuk meg. Eszerint *a konduktív tömegáram-sűrűség*

$$\varepsilon_{h,i} \operatorname{grad} \varrho_{1,i} \tag{10}$$

1.II/c) A monodiszperz hordalék esetében fel sem merül a „tömegforrás" kérdése. A szabatos tárgyaláshoz — a frakciónkénti vizsgálathoz — azonban már hozzátartozik annak leírása is, hogy milyen módon, milyen erők hatására és milyen sebességgel keletkeznek a nagyobb szemcsékből kisebbek — vagyis milyen az aprítódás következtében fellépő frakciónkénti tömegforrás. Természetesen ennek összege az egész hordalékra zérus.

Az i-edik frakció forrássűrűsége $q_{h,i}$.

Az összes ($i = 1, 2, \ldots, n$) frakciókra:

$$\sum_{i=1}^{n} q_{h,i} = 0$$

Az eddigiek szerint *1.II/ a hordalék tömegmérleg-egyenlete* a (2) összefüggés alapján *az i-edik frakcióra*

$$\frac{\partial \varrho_{1,i}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\varrho_{1,i}\,\mathbf{v}_{h,i} + \varepsilon_{h,i}\operatorname{grad}\varrho_{1,i}\right) = q_{h,i} \tag{11}$$

A víz tömegmérleg-egyenletével szemben a (11) egyenletben már több tényező meghatározása nehézségekbe ütközik.

Az első ismeretlen maga az i-dik frakció $\mathbf{v}_{h,i}$ sebességvektora. Ezt a nehézséget lebegtetett hordaléknál igen jó megközelítéssel kiküszöbölhetjük, ha a hordalék áramlási sebességét a vízáramlás $\mathbf{v}$ sebességével azonosnak vesszük. Ez a feltétel a sebességvektorokat tekintve a

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{v} \tag{12}$$

a sebességösszetevőknél pedig, ha a hordalék ülepedési sebessége ω a

$$v_{hx} = v_x \quad \text{és} \quad v_{hy} = v_y - \omega \tag{13}$$

összefüggésekkel fejezhető ki.

Görgetett hordaléknál azonban ez a feltevés már megengedhetetlen.

Nem ismerjük pontosan az $\varepsilon_{h,i}$ vezetési tényezőt sem. Az eddigi kutatások szerint értéke nem nagy mértékben tér el az impulzus vezetési tényezőjétől. A lebegtetett hordalék mozgásánál élünk is azzal a feltevéssel, hogy a két vezetési tényező közelítőleg azonos, bár a kísérletek egyrésze szerint a hordalék vezetési tényezője kissé nagyobb, más kísérletek eredménye viszont arra mutat, hogy értéke kisebb az impulzus vezetési tényezőjénél. Azt is megemlítjük, hogy a hordalék vezetési tényezőjét leegyszerűsítve általában skalárnak tekintik.

A görgetett hordalék mozgásánál a vezetési tényező meghatározása még a jövő kutatások feladata.

Nehéz feladat az i-edik frakció tömegmérlegénél a q_{hi} forrássűrűség megállapítása. A hordalékszemek egymással való ütközése, gördülése ugyanis nyilván csökkenti a szemcse méreteit. Ezt a körülményt a vizsgált frakciónál veszteségként, vagyis nyelőként, míg általában a kisebb méretű frakciónál nyereségként, vagyis forrásként kell figyelembe venni. Az itt felmerülő nehézség kiküszöbölése céljából nem túl nagy szemcse-intervallumok esetében átlagos szemcsemérettel dolgozunk, és *a hordalék tömegét forrásmentesnek tekintjük.*

A tömegmérlegeket illetően még egy megjegyzést kell tennünk. A víz és a hordalék tömegmérlege elvileg egymástól teljesen független. A két egyenletnek nincsen közös tagja. A vízre vonatkozó feltételeink (összenyomhatatlan homogén, vízbontás nélküli) alapján a víz tömegmérlege csak a folyékony fázis sajátságait és áramlási viszonyait jellemzi. A két tömegmérleget, különállóan kezelve a víz tömegmérlege csak a $\mathbf{v}_{hi} \cong \mathbf{v}$ közelítés bevezetése révén jut szerephez.

2. Kinetikai energiamérlegek (2. I. és 2. II.)

I. Víz

2.I/a) Víznél a kinetikai energiát a tömeg és a közepes áramlási sebesség négyzetével számoljuk, vagyis a sebességpulzációból származó mozgási energiát elhanyagoljuk:

$$\frac{Mv^2}{2} \tag{14}$$

Ennek az extenzív mennyiségnek a sűrűsége, ha a tömegsűrűség ϱ

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 \tag{15}$$

2.I/b) Víznél a kinetikai energiának csak a konvektív áramát

$$\left(\frac{Mv^2}{2}\right)\mathbf{v} \tag{16}$$

vesszük figyelembe. Ebből *a kinetikai energiaáramnak* mint extenzív mennyiségnek *felületi áramsűrűsége:*

$$\frac{1}{2}(\varrho v^2)\,\mathbf{v} \tag{17}$$

2.I/c) A víz kinetikai energiáját mint forrás csak a nehézségi erőtér munkája növeli. Így M tömegű folyadéknál az időegység alatti energianyereség, vagyis az erőtér ún. „gyorsítási" munkavégzése a forrás, mivel az átlagos sebesség 1/2 $\mathbf{v}$:

$$\frac{1}{2}M\,\mathbf{g}\mathbf{v} \tag{18}$$

a forrássűrűség pedig

$$\frac{1}{2}\varrho\,\mathbf{g}\mathbf{v} \tag{19}$$

Ezt az energianyereséget, energiaforrást azonban a víz kinetikai energiamérlegét tekintve *többféle energiaveszteség, energianyelő csökkenti*. Ezek közül a legjelentősebb a hordalék mozgásával járó munkavégzés, valamint a ν kinematikai viszkozitású víz belső súrlódásának legyőzéséhez szükséges energia, az ún. *energia-disszipáció*. A jelenség bonyolultságát tekintve ezt a két energianyelőt viszonylag könnyen meghatározhatjuk, és az elhanyagolt hatások okozta hiba még feltétlenül megengedhető.

A M_1 tömegű hordalék mozgatása az időegység alatt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{M_1(v-v_h)^2}{2}\right] \tag{20}$$

veszteséggel csökkenti a víz kinetikai energiáját. Ha ϱ_1 a hordalék tömegsűrűsége, a nyelő sűrűség

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial \varrho_1(v-v_h)^2}{\partial t} \tag{21}$$

lesz.

Az egységnyi tömegre ható súrlódó erőt összenyomhatatlan folyadék esetén, mint ismeretes, a

$$\nu\nabla^2\,\mathbf{v} \tag{22}$$

kifejezés határozza meg.

Így M tömeg esetén az időegység alatt a belső súrlódás által felemésztett energia, vagyis az energia-disszipáció, ha a gyorsítási munkának megfelelően $1/2\,\mathbf{v}$ átlagsebességgel számolunk:

$$\frac{1}{2}\,(\nu\nabla^2\,\mathbf{v})\,M\mathbf{v} \tag{23}$$

az ezt kifejező nyelő sűrűsége pedig

$$\frac{1}{2}\,(\nu\nabla^2\,\mathbf{v})\,\varrho\mathbf{v} \tag{24}$$

A fentieket figyelembe véve

2.1. a víz kinetikai energiájának mérlegegyenlete a (2) képlet szerint:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial \varrho v^2}{\partial t}+\frac{1}{2}\,\mathrm{div}\,(\varrho v^2\,\mathbf{v})=\frac{1}{2}\,\varrho\,\mathbf{g}\mathbf{v}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial \varrho_1(v-v_h)^2}{\partial t}-\frac{1}{2}\,(\nu\nabla^2\,\mathbf{v})\,\varrho\mathbf{v} \tag{25}$$

A víz kinetikai energiájának mérlegegyenleténél közelítést jelent a sebességpulzációból származó mozgási energia elhanyagolása, ami elvileg még a hordalék v_h sebességénél is jelentkezik.

A lebegtetett hordaléknál a v_h hordaléksebességnél élhetünk a (12) és (13) képlet szerinti feltevéssel. Görgetett hordaléknál azonban nyilván ebben az esetben sem alkalmazható ez a feltevés.

II. Hordalék

2.II/a) Hordaléknál a kinetikai energiát célszerűen frakcióként vesszük figyelembe. Ha az i-edik ($i = 1, 2, \ldots, n$) frakció tömege $M_{1,i}$, közepes sebessége $\mathbf{v}_{h,i}$, a sebességpulzációból származó kinetikai energiát elhanyagolva, a kinetikai energia:

$$\frac{M_{1,i}\, v_{h,i}^2}{2} \tag{26}$$

Ennek *az extenzív mennyiségnek a sűrűsége*, ha az i-edik frakció tömegsűrűsége $\varrho_{1,i}$:

$$\frac{1}{2}\, \varrho_{1,i}\, v_{h,i}^2 \tag{27}$$

2.II/b) Hordaléknál is a kinetikai energiának csak a konvektív áramát

$$\frac{M_{1,i}\, v_{h,i}^2}{2}\, \mathbf{v}_{h,i} \tag{28}$$

vesszük figyelembe. A (28) kifejezés alapján *a hordalék kinetikai energiaáramának* mint extenzív mennyiségnek *felületi áramsűrűsége:*

$$\frac{1}{2}\, (\varrho_{1,i}\, v_{h,i}^2)\, \mathbf{v}_{h,i} \tag{29}$$

2.II/c) A hordalék i-edik frakciójának kinetikai energiáját, mint forrás egyrészt a nehézségi erőtér munkája, másrészt pedig az áramló víz által átadott energia növeli.

Az $M_{1,i}$ tömegű i-edik hordalékfrakciónál az időegység alatti energianyereség, vagyis a nehézségi erőtér munkavégzése, a forrás, ez $1/2\ \mathbf{v}_{h,i}$ átlagsebességgel számítva

$$\frac{1}{2}\, M_{1,i}\, g\mathbf{v}_{h,i} \tag{30}$$

Így ez *a forrássűrűség:*

$$\frac{1}{2}\, \varrho_{1,i}\, g\mathbf{v}_{h,i} \tag{31}$$

A mozgó víz által átadott kinetikai energia nyilván azonos a víz energiaforrását csökkentő (20) alatti veszteséggel. A különbség csak annyi, hogy a víz kinetikai energiamérlegének felállításánál a teljes hordaléktömeggel számoltunk, itt pedig csak az i-edik frakciót vizsgáljuk. Így az $M_{1,i}$ tömegű i-edik frakció a mozgó víztől

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{M_{1,i}(v_{h,i}-v)^2}{2}\right] \tag{32}$$

energiát nyer. *A kinetikai energia forrássűrűsége* tehát:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \varrho_{1,i}(v_{h,i}-v)^2}{\partial t} \tag{33}$$

Energiaforrásként jelentkezik még az i-edik frakciónak a nagyobb sebességű frakciókkal való ütközése. Viszont a kisebb sebességgel mozgó frakciókkal való ütközése az i-edik frakció számára energiaveszteséget, energianyelőt jelent. A hordalékmozgás jelenségét tekintve a kétféle ütközés, összesítve várhatóan csekély energiaváltozást eredményez.

Ennek ellenére, mivel hordaléknál a mérlegegyenleteket mindig csak az i-edik frakcióra írjuk fel, az ütközésekből származó kinetikai energiaforrást célszerű meghatározni.

Legyen N_i az i-edik, N_k pedig a k-adik frakciók szemcseszáma. Az összes frakció szemcseszámainak összege pedig N, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = N$$

Az i-edik frakció, amelynek sebessége $v_{h,i}$, a $k = 1, 2, \ldots, n$, de $k \neq i$ és $v_{h,k}$ sebességű frakcióktól, ha az impulzus vezetési tényezője L_{ik},

$$\sum_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n} L_{ik}(\mathbf{v}_{h,k}-\mathbf{v}_{h,i})\frac{N_k}{N} \tag{34}$$

impulzust nyer vagy veszít. Ha ezt az i-edik hordalékfrakcióra vonatkozó impulzus forrás- vagy nyelősűrűséget $1/2\ \mathbf{v}_{h,i}$-vel skalárisan szorozzuk, már az *ütközésekből származó kinetikai energia forrássűrűségét* kapjuk. Vagyis:

$$q_{h,i} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_{h,i}\sum_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n} L_{ik}(\mathbf{v}_{h,k}-\mathbf{v}_{h,i})\frac{N_k}{N} \tag{35}$$

Megemlítjük, hogy mivel a hordalék teljes tömegén belüli kinetikai energiacsere a hordalék összenergiáját nem változtathatja meg, nyilvánvalóan az összes n frakcióra fennáll a

$$\sum_{i=1}^{n} q_{h,i} = 0 \tag{36}$$

összefüggés.

A hordalék i-edik frakciójának kinetikai energiáját mint nyelő — miután az ütközések hatását a fentiek szerint már figyelembe vettük — már csak a súrlódásból származó munka csökkenti. A súrlódásból származó kinetikai energiaveszteséget sem tudjuk szabatosan kiszámítani. Több feltevés alapján azonban közelítőleg meghatározhatjuk.

Legyen az $M_{1,i}$ tömegű i-edik frakcióhoz tartozó hordalékszemek teljes súrlódásnak kitett felülete F_i.

Tételezzük fel, hogy a vízsebesség és a hordaléksebesség különbsége következtében a víz viszkozitásának hatására valamilyen

$$\tau_{h,i} \tag{37}$$

csúsztató feszültség ébred az F_i felületen. Ha a víz és hordalék átlagos sebességkülönbségének abszolút értéke $|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i}|$, akkor az időegység alatti energiaveszteség, vagyis a súrlódó erők időegységre vonatkoztatott munkája

$$\tau_{h,i}\, F_i |\mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i}| \tag{38}$$

már a keresett energianyelőt határozza meg.

Az $M_{1,i}$ tömegű és $\varrho_{1,i}$ sűrűségű i-edik frakció teljes térfogata közelítőleg:

$$V_{1,i} = \frac{M_{1,i}}{\varrho_{1,i}} \tag{39}$$

A nyelősűrűségét nyilván megkapjuk, ha a (38) alatti nyelőt $V_{1,i}$-vel elosztjuk. Vagyis a nyelősűrűség:

$$\tau_{h,i}\, F_i |\mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i}| \frac{\varrho_{1,i}}{M_{1,i}} \tag{40}$$

Tekintettel arra, hogy

$$F_i / M_{1,i} = \varphi_i \tag{41}$$

éppen az i-edik frakció egységnyi tömegére vonatkoztatott felület, az ún. *fajlagos felület*, (40) összefüggést célszerűbb a

$$\tau_{h,i}\, \varphi_i |\mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i}|\, \varrho_{1,i} \tag{42}$$

alakban írni. Ez egyben arra mutat, hogy az energiacsere $\tau_{h,i}$, v és $v_{h,i}$ konstans értékei esetében a fajlagos felülettel egyenes arányban nő.

Az eddigiek szerint

2.II. a hordaléknál az i-edik frakció kinetikai mérlegegyenlete a (2) összefüggés alapján

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \varrho_{1,i} v_{h,i}^2}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{div}\left[(\varrho_{1,i} v_{h,i}^2)\,\mathbf{v}_{h,i}\right] = \frac{1}{2}\varrho_{1,i}\,\mathbf{g}\mathbf{v}_{h,i} + \frac{1}{2}\frac{\partial \varrho_{1,i}(v - v_{h,i})^2}{\partial t} +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathbf{v}_{h,i}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} L_{ik}(\mathbf{v}_{h,k} - \mathbf{v}_{h,i})\frac{N_k}{N} - \tau_{h,i}\,\varphi_i|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i}|\,\varrho_{1,i} \tag{43}$$

Ennél a mérlegegyenletnél ugyancsak a sebességpulzációból származó mozgási energia elhanyagolása szerepel mint közelítő feltevés. Lebegtetett hordaléknál $\mathbf{v}_h$ meghatározása itt is lehetséges a (12) és (13) összefüggések szerint. Görgetett hordaléknál ez nyilvánvalóan megengedhetetlen.

Az ütközésekből származó energiaforrás számításához szükséges az impulzus vezetési tényezőjének ismerete. Ez monodiszperz hordalék feltételezésével kiküszöbölhető.

A súrlódási energiaveszteség, energianyelő meghatározása is közelítést jelent, de megítélésünk szerint az itt mutatkozó eltérés megengedhető mértékű.

Megemlítjük, hogy a hordalék kinetikai mérlegegyenletét, ha a szemcseméretek intervalluma nem túl nagy, célszerűbb lenne átlagos sebességek, szemátmérők és tömegsűrűségek alapján az egész hordaléktömegre felírni. Ez a közelítés is elsősorban a lebegtetett hordaléknál mutatkozik előnyösnek.

3. Belső energiamérlegek (3. I. és 3. II.)

A belső energia megváltozása, — miután a víz és a hordalék össztömege külön-külön is változatlan, vagyis állandó térfogatú és tömegű rendszerről van szó — csak a hőmérséklet változásában jelentkezik.

A vízből és hordalékból összetevődő ún. kétfázisú rendszer — mint ezt az előzőekben már említettük — termikus kölcsönhatásban van a környezettel, a szabad vízfelszínnél a levegővel, a mederoldalaknál és a mederfenéknél pedig a talajjal. A talajjal a kétfázisú rendszer jó közelítéssel termikus egyensúlyban levőnek tekinthető. A levegővel való kölcsönhatás a meteorológiai viszonyoktól függ, és részben felmelegedés vagy lehülés, részben pedig párolgás alakjában jelentkezik. Megállapítottuk már, hogy a levegővel való kölcsönhatás igen nagy mértékben megváltoztathatja a rendszer belső energiáját. Ez a belső energiaváltozás azonban, bár a viszkozitás révén hatással van a súrlódási viszonyokra, magát a hordalék mozgásának jelenségét alig befolyásolja. Ezért a környezettel való kölcsönhatás elhanyagolása a belső energiát tekintve, a hordalékmozgás vizsgálatánál indokoltnak vehető.

A hordalékszemcsék teljes felületükkel vízzel érintkeznek. Ez különösen a lebegtetett hordaléknál áll fenn. Ennek következtében a hordalék és a víz csaknem tökéletes termikus egyensúlyban van. Ez a körülmény feleslegessé teszi a hordalék belső energia mérlegegyenletét.

A belső energia mérlegegyenletét így célszerűen a két fázist egy rendszernek tekintve írhatjuk fel.

I. Víz + II. Hordalék

3.I.—II/a) A víz—hordalék-rendszer össztömege $(M + M_1)$, össztérfogata $(V + V_1)$ s így a víz—hordalék-keverék tömegsűrűsége

$$\varrho_Z = \frac{M + M_1}{V + V_1} \tag{44}$$

a belső energiának mint extenzív mennyiségnek *a sűrűsége pedig*

$$e_Z = \varrho_Z ct, \tag{45}$$

ahol $t[\Theta]$ a hőmérséklet és $c\left[\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{M}\,\Theta}\right]$ a fajhő.

3.I.—II/b) A víz—hordalék-rendszer belső energiájának *konvektív árama*

$$(M + M_1)\,ct\,\mathrm{v} \tag{46}$$

ennek felületi áramsűrűsége pedig

$$e_Z\,\mathrm{v} \tag{47}$$

A belső energia *konduktív áramsűrűségét* a tömeg áramsűrűség analógiájára a

$$\lambda\left[\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{TL}\,\Theta}\right] \tag{48}$$

hővezetési tényezőnek és a $t[\Theta]$ hőmérséklet gradiensének szorzataként határozzuk meg. Eszerint a belső energia konduktív áramsűrűsége:

$$\lambda \operatorname{grad} t \tag{49}$$

3.I.—II/c) A víz—hordalék-rendszer *belső energiájának forrása* — miután a környezeti hatásokat kizártuk — a víz és a hordalék kinetikai energiájának disszipációjával azonos.

Víznél közvetlenül felhasználhatjuk a (24) szerinti forrássűrűséget.

$$\frac{1}{2}(\nu\nabla^2 \mathbf{v})\,\varrho\mathbf{v} \tag{50}$$

Hordaléknál a (42) alatti $\tau_{h,i}\,\varphi_i|\mathbf{v}-\mathbf{v}_{h,i}|\;\varrho_{1,i}$ disszipációt, mivel az csupán az i-edik frakcióra vonatkozik, a belső energia forrássűrűségének felírásához az összes $i = 1, \ldots, n$ frakcióra összegeznünk kell.

A $\sum_{i=1}^{n} M_{1,i}$ össztömegű hordaléknál az összes szemcse (N) teljes súrlódásnak kitett felülete $\sum_{i=1}^{n} F_i$.

Tételezzük fel, hogy ezen a felületen ébredő, csúsztató feszültség átlagos értéke

$$\tau_h \tag{51}$$

és legyen $\mathbf{v}_h$ az összes frakció szemcséinek átlagsebessége. Így a súrlódó erők időegység alatti munkája átlagosan

$$\tau_h \sum_{i=1}^{n} F_i|\mathbf{v}-\mathbf{v}_h| \tag{52}$$

már *a keresett belső energiaforrást jelenti.*

Ha a hordalék átlagos tömegsűrűsége ϱ_1, akkor az összes hordalékszemcse térfogata

$$V_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{1,i}}{\varrho_1} \tag{53}$$

amellyel (52)-t elosztva a forrássűrűséget kapjuk. Bevezetve (41) analógiájára az összes hordalékfrakcióra a

$$\varphi_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i}{\sum_{i=1}^{n} M_{1,i}} \tag{54}$$

és a tömegegységre vonatkoztatott átlagos fajlagos felületet, *a hordalékenergia disszipációjából származó belső energia forrássűrűsége:*

$$\tau_h\,\varphi_1|\mathbf{v}-\mathbf{v}_h|\,\varrho_1 \tag{55}$$

Az előzőek szerint

3.I—II. A víz—hordalék-rendszer belső energiájának mérlegegyenlete:

$$\frac{\partial e_Z}{\partial t} + \operatorname{div}(e_Z \mathbf{v} - \lambda \operatorname{grad} t) = \frac{1}{2}(\nu\nabla^2 \mathbf{v})\varrho\mathbf{v} + \tau_h \varphi_1 |\mathbf{v} - \mathbf{v}_h| \varrho_1 \tag{56}$$

Az (56) mérlegegyenletben több tényező meghatározása nehézségekbe ütközik. Többek között τ_h és v_h értékeket csak további vizsgálatokkal és kísérletekkel lehet majd meghatározni.

A mérlegegyenlet, a levezetés során bevezetett feltevések ellenére viszonylag jól jellemzi a környezeti kölcsönhatásoktól függetlenített víz—hordalékrendszer belső energiáját.

Ha a környezettel való igen jelentős termikus kölcsönhatást tekintjük, nyilvánvaló, hogy a hordalékmozgás jelenségénél a belső energia nem döntő jelentőségű. Legtöbb kutató él is ezzel a lehetőséggel és a belső energiát vizsgálatainál elhanyagolja.

4. Impulzusmérlegek (4. I. és 4. II.)

I. Víz

4.I/a) Víznél *az impulzust* a tömeg és a közepes sebesség szorzatából, vagyis az

$$M\mathbf{v} \tag{57}$$

kifejezésből számítjuk, elhanyagolva a sebességpulzációból származó impulzust.

Ennek *az extenzív mennyiségnek a sűrűsége*

$$\varrho\mathbf{v} \tag{58}$$

4.I/b) A víz *impulzus áramánál* mind a konvektív, mind a konduktív áramot figyelembe vesszük.

A konvektív áram felületi sűrűsége az impulzussűrűség és az áramlási sebességvektor diadikus szorzata, vagyis

$$\varrho\mathbf{v} \circ \mathbf{v} \tag{59}$$

A konduktív áram felületi sűrűségét mint a pulzációs impulzussűrűség és a pulzációs sebességvektor diadikus szorzatának időbeli középértékét vehetjük figyelembe:

$$\varrho\overline{\mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'} \tag{60}$$

4.I/c) A víz impulzusát mint forrás, csakúgy mint kinetikai energiáját, csupán a nehézségi erőtér növeli. Így *az impulzus forrássűrűsége*

$$\varrho \mathbf{g} \tag{61}$$

Impulzusveszteséget jelent az $i = 1, \ldots, n$ hordalékfrakcióknak átadott impulzus, valamint a víz kinetikai energia-disszipációnak megfelelő impulzus. Ezt a két *impulzus-nyelősűrűséget*, az alábbiak szerint vehetjük számításba.

Az impulzuscsere jellemző intenzív mennyisége a sebesség. Az i-edik frakciónak átadott impulzus, ha a frakció sebessége $\mathbf{v}_{h,i}$, szemcseszáma N_i, az impulzusforrás vezetési tényezője pedig L_i:

$$L_i(\mathbf{v}_{h,i} - \mathbf{v})\, N_i \tag{62}$$

Ha az összes frakció össz-szemcse száma N, akkor *az impulzus nyelősűrűsége:*

$$\sum_{i=1}^{n} L_i(\mathbf{v}_{h,i} - \mathbf{v}) \frac{N_i}{N} \tag{63}$$

A másik impulzusveszteséget közvetlenül a viszkózus feszültségek jelentik, amelyek összenyomhatatlan folyadék esetében a

$$(\nu \nabla^2 \mathbf{v})\, \varrho \tag{64}$$

összefüggéssel adhatók meg.

Ebből származtattuk $1/2$ v-vel való szorzás útján a (24) alatti egyenletet, amely a kinetikai energia disszipációs veszteségét írja le.

Mindezek alapján

4.I. a víz impulzusmérleg-egyenlete a (2) összefüggés szerint

$$\frac{\partial \varrho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{Div}(\varrho \mathbf{v} \circ \mathbf{v} + \overline{\varrho \mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'}) = \varrho \mathbf{g} + \sum_{i=1}^{n} L_i(\mathbf{v}_{h,i} - \mathbf{v}) \frac{N_i}{N} - (\nu \nabla^2 \mathbf{v})\, \varrho \tag{65}$$

II. Hordalék

4.II/a) Hordaléknál az *i-edik frakció impulzusát* a frakció $\mathbf{v}_{h,i}$ közepes sebességének és az $M_{1,i}$ tömegnek a szorzataként kapjuk

$$M_{1,i}\, \mathbf{v}_{h,i} \tag{66}$$

Az i-edik frakció impulzussűrűsége tehát

$$\varrho_{1,i}\, \mathbf{v}_{h,i} \tag{67}$$

4.*II/b) A hordalék impulzus áramánál* is mind a konvektív, mind a konduktív áramot számításba vesszük.
A konvektív áram felületi sűrűsége az impulzussűrűség és az i-edik frakció sebességvektorának diadikus szorzata:

$$\varrho_{1,i}\, \mathbf{v}_{h,i} \circ \mathbf{v}_{h,i} \tag{68}$$

A konduktív áram felületi sűrűségét ugyanígy, de a sebességpulzáció vektorát véve határozhatjuk meg időbeli középértékként:

$$\varrho_{1,i}\, \overline{\mathbf{v}'_{h,i} \circ \mathbf{v}'_{h,i}} \tag{69}$$

4.*II/c) Az i-edik hordalékfrakció impulzusát* mint forrás, elsősorban a nehézségi erőtér növeli. Eszerint *a hordalékimpulzus forrássűrűsége:*

$$\varrho_{1,i}\, \mathbf{g} \tag{70}$$

Növeli az impulzusforrást a víz által átadott impulzus is. Ennek az impulzusforrásnak a sűrűsége a (62) szerint

$$L_i(\mathbf{v}_{h,i} - \mathbf{v}) \tag{71}$$

Végül impulzusforrást jelent az i-edik frakcióra vonatkozóan a többi, $k = 1, \ldots, n$, de $k \neq i$ frakcióval való ütközésnél fellépő impulzuscsere is. Ez az impulzus forrássűrűség, ha a k-ik frakció sebessége $\mathbf{v}_{h,k}$ és ennél az i-deik frakciónál az impulzusátadás vezetési tényezője $L_{i,k}$:

$$\sum_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n} L_{ik}(\mathbf{v}_{h,k} - \mathbf{v}_{h,i})\,\frac{N_k}{N} \tag{72}$$

Impulzusveszteséget, nyelőt jelent a hordalék mozgásánál fellépő súrlódási energia disszipációnak megfelelő impulzus is. Ezt a nyelőt a hordalék kinetikai energia disszipációját meghatározó (42) alatti

$$\tau_{h,i}\, \varphi_i |\mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i}|\, \varrho_{1,i}$$

nyelősűrűségből $2\,\mathbf{v}^{-1}$-el való skaláris szorzással kapjuk. Így *az i-ik frakció mozgásánál fellépő súrlódásból származó impulzus nyelősűrűsége:*

$$2\,\tau_{h,i}\, \varphi_i |\mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i}|\, \mathbf{v}^{-1} \varrho_{1,i} \tag{73}$$

A fentiek szerint

4.*II. az i-edik hordalékfrakció impulzusmérleg-egyenlete* (2) összefüggés alapján:

$$\frac{\partial \varrho_{1,i}\,\mathbf{v}_{h,i}}{\partial t} + \operatorname{Div}\left(\varrho_{1,i}\,\mathbf{v}_{h,i}\circ\mathbf{v}_{h,i} + \varrho_{1,i}\,\overline{\mathbf{v}'_{h,i}\circ\mathbf{v}'_{h,i}}\right) = \varrho_{1,i}\,\mathbf{g} + L_i(\mathbf{v}_{h,i} - \mathbf{v}) + $$
$$+ \sum_{\substack{k=1\\ i\neq k}}^{n} L_{ik}(\mathbf{v}_{h,k} - \mathbf{v}_{h,i})\frac{N_k}{N} - 2\tau_{h,i}\,\varphi_i|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{h,i}|\,\mathbf{v}^{-1}\varrho_{1,i}. \qquad (74)$$

A hordalék impulzus-mérlegegyenletére mindazok a feltételek és megállapítások fennállnak, amelyeket az *i*-edik frakció kinetikai mérlegegyenleténél felsoroltunk.

1.3. A hordalékszállítás mérlegegyenleteinek összehasonlítása és értékelése

Az impulzus mérlegegyenletei, ha a kinetikai mérlegegyenleteknél bevezetett feltételek és elhanyagolások mellett írjuk fel — mint már említettük — nem függetlenek egymástól.

Az impulzus mérlegegyenleteiből ugyanis, mint az a fentiekből is kitűnik, 1/2 v-vel való skaláris szorzással levezethetők a kinetikai energia mérlegegyenletei.

Levezetéseinknél mégis mutatkozik a két mérlegegyenlet-rendszer között különbség.

Ennek egyik része csak formai, mivel az impulzusáramokat diadikus szorzatként, míg a kinetikai energiaáramokat a gyorsítási munka áramaként írtuk fel.

A másik különbség abból származik, hogy a kinetikai energiánál az aránylag kis konduktív áramot elhanyagoltuk, ugyanezt azonban — mint aránylag jelentős hatást — az impulzusmérlegnél figyelembe vettük.

A víz és a hordalék mérlegegyenletei között lényeges különbség, hogy a víznél azok mindig az egész „*homogénnek*” tekintett tömegre, míg a hordaléknál csupán egy frakcióra vonatkoznak.

A mérlegegyenletek szabatos megoldása ez ideig még nem történhetett meg. Több fizikai változót vezettünk be, amelyeket értelmeztünk ugyan, de egyelőre még ismeretlenek. Az ebből származó nehézségeknek bizonyos közelítő feltevésekkel való kiküszöbölése csak további kutatások révén lehetséges. Végül az is nyilvánvaló, hogy ennek a bonyolult egyenletrendszernek numerikus megoldása nehéz feladat lesz.

1.4. A lebegtetett hordalékszállítás mérlegegyenletei

Még az általános mérlegegyenletek vázlatos megfogalmazása előtt *izoterm viszonyokat* tételezve fel, a *lebegtetett hordalékszállítás* egyenleteit sikerült meghatározni.

Izoterm viszonyoknál termikus egyensúly van, s így *a kinetikai energia disszipációját* is figyelmen kívül hagyhatjuk.

Ilyen feltevések mellett a lebegtetett hordalékszállítást a *tömegmérleg* és az *impulzusmérleg* felírásával jellemezhetjük.

Az egyenleteket *a hordalék egész tömegére* határoztuk meg, bevezetve a szemcsék ϱ_1 közepes sűrűségét, az $\bar{\omega}$ eredő ülepedési sebességet, valamint az átlagos $\mathbf{v}_h$ és $\mathbf{v}_h'$ hordaléksebességeket, továbbá a hordalék konduktív tömegáramánál az átlagos ε_h vezetési tényezőt. A víz és hordalék közti impulzuscserénél a lebegtetett hordalékra érvényes sebességösszetevők alapján megállapítottuk, hogy γ_1 hordalékfajsúly esetén az impulzusforrás vezetési tényezője $\gamma_1/\bar{\omega}$ hányados lesz.

Mind a víz, mind a hordalék tömegét állandónak vettük, vagyis mindkét fázisnál a tömegmérleg forrásmentes.

A fenti feltevések alapján:

a víz tömegmérlege, (7) változatlan:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathbf{v} = 0 \tag{75}$$

impulzusmérlege a (65) módosulásával:

$$\frac{\partial \varrho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{Div}(\varrho \mathbf{v} \circ \mathbf{v} + \overline{\varrho \mathbf{v}' \circ \mathbf{v}'}) = \varrho \mathbf{g} + \frac{\gamma_1}{\bar{\omega}}(\mathbf{v}_h - \mathbf{v}) \tag{76}$$

a hordalék tömegmérlege a (11) átalakulásával:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho_1 \mathbf{v}_h + \varepsilon_h \operatorname{grad} \varrho_1) = 0 \tag{77}$$

impulzusmérlege a (74) megváltozásával

$$\frac{\partial \varrho_1 \mathbf{v}_h}{\partial t} + \operatorname{Div}(\varrho_1 \mathbf{v}_h \circ \mathbf{v}_h + \varrho_1 \overline{\mathbf{v}_h' \circ \mathbf{v}_h'}) = \varrho_1 \mathbf{g} - \frac{\gamma_1}{\bar{\omega}}(\mathbf{v}_h - \mathbf{v}) \tag{78}$$

A fenti mérlegegyenleteket összehasonlítva az irodalomból ismert lebegtetett hordalékszállítási elméletekkel, kiderül, hogy legtöbbnél csak a (77) alatti hordalék tömegmérlegét vették figyelembe. Az összehasonlító vizsgálatok során sikerült csaknem valamennyi ismert hordalékszállítási egyenletet egységes rendszerbe foglalni. Az egységes rendszerbe foglalás a lehetséges elhanyagolások, ill. közelítő feltevések alapján történt. Az erre vonatkozó részletek az irodalomban felsorolt tanulmányokban találhatók.

Példaként megemlítjük, hogy az összes lehetséges és megengedhető elhanyagolást figyelembe véve a (77) egyenletből rendkívül egyszerű és világos módon lehet az *O'Brien—Christiansen-féle töménységeloszlási egyenletet* levezetni.

Ezzel pedig el is jutottunk a lebegtetett hordalékmozgásnál az elméleti eredmények gyakorlati alkalmazhatóságának lehetőségeire. Az O'Brien—Christiansen-féle egyenlet tekinthető ugyanis még ma is a legmegbízhatóbbnak. Segítségével számítható a közepes töménység, amiből pedig közvetlenül adódik a G_s [kp/sec] lebegtetett hordaléksúly is.

2. Természetben végzett mérések és vizsgálatok

2.1. A mérések és vizsgálatok szerepe

Az elméleti kutatásokkal párhuzamosan a természetben végzett mérések és vizsgálatok is újabb és újabb részletekre terjednek ki. Ilyenek például az alluviális mederformák szerepére vonatkozó megfigyelések, amelyek éppen a mederformáknak a vízhozamokra, a vízsebességekre, valamint a lebegtetett és görgetett hordalékszállításra gyakorolt hatását kívánják tisztázni.

Mindezek az irodalomból általában ismeretesek, ezért ezekre itt külön részleteiben nem térünk ki.

Az újabb elméleti kutatások tárgyalásánál követett módszerhez hasonlóan azonban ezekről a természetben végzett mérésekről és vizsgálatokról is szeretnénk egy példát bemutatni. Ezek lényegileg a már tárgyalt félempirikus módszerek körébe tartoznak, amelyeknek rendszerezését is elősegítették a tárgyalt elméleti kutatások.

2.2. A vízfolyások hordalékszállító képessége

Ismeretes, hogy az alluviális, hordalékos vízfolyások a lebegtetett és görgetett hordalék szállítása mellett viszonylag rövid idő alatt medrüket is nagy mértékben változtatják. Régi törekvése a kutatóknak, hogy valami módon a vízfolyások hordalékszállító képességét, ill. a hordalékszállításra fordított energiaszükségletet számszerűen meghatározzák. Nyilvánvaló, hogy a mederváltozásokra fordított energia nagysága sem közömbös. Végső fokon tehát igen jó tájékoztatást kaphatnánk, ha egy-egy folyószakaszon a nehézségi erőtérben a hordalékos víz mozgása folytán rendelkezésre álló teljes energiát feloszthatnánk a lebegtetett és a görgetett hordalék szállítására, valamint a mederváltozásokra fordított energiahányadokra.

Az erre vonatkozó vizsgálatokat a Budapesti Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Intézetben (VITUKI) Dr. CSOMA János vezetésével a Dráva drávaszabolcsi vízmércéje feletti kereken 6 km-es szakaszon végzett mérések alapján mutatjuk be.

2.3. *A Dráva kísérleti szakaszán végzett észlelések*

A Drávának ennek a szakaszán a VITUKI 1968 óta rendszeres keresztszelvény-felvételeket, vízhozamméréseket, valamint lebegtetett és görgetett hordalékméréseket végez. A kísérleti Dráva-szakasz hidrológiai és hidraulikai jellemzőit a II. táblázatban foglaltuk össze. Az adatok szerint ez a szakasz a hordalékmozgás szempontjából jól megközelíti Európa több síkvidéki nagyobb folyójának sajátságait. Az átlagos viszonyoktól talán kissé eltér az ezen a szakaszon éves viszonylatban mutatkozó feltöltődések, ill. kimélyülések nagy értéke, amit röviden úgy is fogalmazhatunk, hogy ezen a szakaszon rövid idő alatt igen nagy térfogatú mederanyag rendeződik át.

A mérési adatok alapján kiszámítottuk több időszakra vonatkozóan a 6 km-es kísérleti szakaszon levonult hordalékos víz súlyát (F értékek), a lebegtetett hordalék vízben mért súlyát (F_1), a görgetett hordalék vízben mért súlyát (F_2), valamint a meder átrendeződését jellemző mederanyag súlyát (F_3). Ezek közül *3 időszak* adatait mutatjuk be.

Az átrendeződésben résztvevő anyag mértékéül a szakaszon kimélyülésként jelentkezett mennyiséget fogadtuk el (lásd a III. táblázat 5. sorát) azzal a megszorítással, hogy ha az időszakban eredő kimélyülés jelentkezett, azt a szakaszról levonult lebegtetett hordaléknak tekintettük, tehát levontuk az átrendeződő anyagból. Feltételeztük, hogy az átrendeződő anyag mint görgetett hordalék, a felvételi időszakok között csak egyszer mozogva rendeződik át. Átrendeződési útszakasznak a meder átlagos szélességét, vagyis 300 m-t vettünk számításba.

Már itt meg kell jegyeznünk, hogy ily módon az átrendeződésre fordított energiaszükséglet minimumát kapjuk. Nyilvánvaló ugyanis, hogy a kimélyülések és feltöltődések folytán bekövetkező átrendeződés folyamatos mederanyagmozgást jelent, vagyis a valóságban a számított energiaszükségletnek többszöröse használódik el.

Az említett időszakra vonatkozó hordalékos víz, lebegtetett és görgetett hordalék, valamint az átrendeződött anyag súlyát a III. táblázat tünteti fel.

A hordalékos víz E munkáját, a lebegtetett és görgetett hordalék szállításához szükséges munkát, valamint a meder átrendezésére fordított energiaszükségletet bizonyos egyszerűsítő feltevések alapján a következőképpen számíthatjuk ki.

Az egyes időszakokban a III. táblázatban feltüntetett hordalékos víz, lebegtetett és görgetett hordalék vízben mért súlyát a vízhozam tartósságok és a vízhozam-hordalékhozam összefüggések alapján számítottuk (lásd a III. táblázat 2., 3, és 4. sorát). Az átrendeződött anyag vízben mért súlyát (III. táblázat 5. sora) az előzők szerint a kimélyülésekből számítottuk. Az aránylag lényegtelen vízsebesség-változásokra való tekintettel a 6000 m-es szakaszon

II. Táblázat

A Dráva drávaszabolcsi kísérleti szakaszának hidrológiai és hidraulikai jellemzői

A kísérleti szakasz helye	A drávaszabolcsi vízmérce feletti folyószakasz
Vízgyűjtőterület	A drávaszabolcsi vízmércénél 35764 km^2
A kísérleti szakasz hossza	$L = 6000$ m
A kísérleti szakasz jellege	Kanyargó, medrét erősen változtató
A meder mélysége	6—8 m a partok szintje alatt
Átlagos vízmélység	A vizsgált időszakban, közepes vízállásnál $D = 4$ m
Átlagos ülepedési úthossz közelítőleg az átlagos vízmélység fele	$D_s = \frac{D}{2} = \frac{4\text{ m}}{2} = 2{,}00$ m
A meder szélessége	200—500 m
A meder átlagos szélessége	$B = 300$ m
Átlagos esés	$S = 16$ cm/km
A teljes szakasz esésvesztesége	$h_v = 0{,}96$ m
Vízhozamok	$Q_{\min} = 150\ m^3/sec$ $Q_{\text{közép}} = 850\ m^3/sec$ $Q_{\max} = 2500\ m^3/sec$
Közepes vízsebesség	$v_k = 1{,}0$ m/sec
A legnagyobb és a legkisebb vízállás különbsége	586 cm
A lebegtetett hordalék átlagos szemátmérője	$d_g = 0{,}04$ mm
A görgetett hordalék és a mederanyag átl. szemátmérője	$d_g = 0{,}3$ mm
A hordalék és a mederanyag fajsúlya	$\gamma_1 = 2650\ kp/m^3$
A lebegtetett hordalék átl. töménysége a 3 időszakra	$C_k = 0{,}063\ kp/m^3$ $C_k = 0{,}050\ kp/m^3$ $C_k = 0{,}045\ kp/m^3$
A hordalékos víz térfogatsúlya a 3 időszakra	$\gamma_z = 1000{,}041\ kp/m^3$ $\gamma_z = 1000{,}031\ kp/m^3$ $\gamma_z = 1000{,}025\ kp/m^3$

II. táblázat folytatása

A kísérleti szakasz helye	A drávaszabolcsi vízmérce feletti folyószakasz
A lebegtetett hordalék ülepedési sebessége	$\omega = 0{,}0015$ m/sec
Az évi átlagos lebegtetett hordalékszállítás	$G_S = 750\,000$ m³/év
Az évi átlagos görgetett hordalékszállítás	$G_B = 110\,000$ m³/év
A kísérleti szakasz teljes kimélyülése a 3 időszakra	836 298 m³; 751 350 m³; 587 065 m³
A kísérleti szakasz teljes feltöltődése a 3 időszakra	681 907 m³; 1 227 354 m³; 659 897 m³

III. Táblázat

A Dráva hordalékszállítása Drávaszabolcsnál három különböző időszakban

	Első időszak	második időszak	harmadik időszak
1. Az energiavonal esése (m)	0,96	0,96	0,96
2. A szakaszon levonult hordalékos víz súlya F (kp)	$5{,}5 \cdot 10^{12}$	$31{,}15 \cdot 10^{12}$	$5{,}28 \cdot 10^{12}$
3. A szakaszon levonult lebegtetett hordalék vízben mért súlya F_1 (kp)	$3{,}48 \cdot 10^{8}$	$15{,}70 \cdot 10^{8}$	$2{,}17 \cdot 10^{8}$
4. A szakaszon levonult görgetett hordalék vízben mért súlya F_2 (kp)	$0{,}19 \cdot 10^{8}$	$2{,}14 \cdot 10^{8}$	$0{,}16 \cdot 10^{8}$
5. Átrendeződött anyag vízben mért súlya F_3 (kp)	$11{,}20 \cdot 10^{8}$	$12{,}40 \cdot 10^{8}$	$9{,}70 \cdot 10^{8}$

az energiavonal esését a vízfelszín esésével egyöntetűen 0,96 m-re vettük fel.*

A lebegtetett és görgetett hordalék súlyát G_s [kp/sec] és G_B [kp/sec] olyan átlagértékkel vettük figyelembe, amely a vízhozamtartósságok, a vízhozam és hordalékhozam összefüggések alapján adódott ki.

A teljesség kedvéért lássuk röviden a teljes energia és az egyes energiaszükségletek számításának menetét.

A hordalékos víz által végzett munka. Ha h_v [m] az L [m] hosszúságon az energiavonal teljes esése, és ha C [kp/m³] átlagos töménységgel számítjuk a

* A számpéldákra való tekintettel a továbbiakban a fizikai változók, valamint az összefüggések mellett a szokástól eltérően a szögletes zárójelben nem a dimenziókat, hanem az alkalmazott mértékegységeket tüntettük fel.

hordalékos víz γ_z térfogatsúlyát, vagyis

$$\gamma_z = \gamma - \frac{\gamma C}{\gamma_1} + C \tag{79}$$

akkor a hordalékos víz által Δt [sec] alatt végzett munka

$$E = \gamma_z Q_z h_v \Delta t \tag{80}$$

ahol Q_z-t közelítőleg a vízhozammal vettük azonosnak.

Ugyanis az egyes Δt időközökben levonult hordalékos víz súlya

$$F = \gamma_z Q_z \Delta t \text{ [kp]} \tag{81}$$

Ha a felszín esése S, akkor L [m] hosszúságon az energiavonal esése

$$h_v = SL \text{ [m]} \tag{82}$$

A hordalékos víz által a kísérleti szakaszon az egyes időszakokban végzett teljes munka tehát

$$E = F h_v \text{ [kpm]} \tag{83}$$

A lebegtetett hordalék szállítására fordított munka. Ezt a munkát úgy számítottuk, hogy a lebegtetett hordalék D_s átlagos ülepedési úthosszon ω [m/sec] ülepedési sebesség ellenében a hordalékos víz energiájának rovására marad lebegésben. A hordalék

$$t_1 = \frac{D_s}{\omega} \text{ [sec]} \tag{84}$$

idő alatt ülepednék le a mederfenékre.

Mivel azonban, ha v_k [m/sec] a vízfolyás átlagos sebessége, a kísérleti szakasz hossza pedig L [m] lévén,

$$t_2 = \frac{L}{v_k} \text{ [sec]} \tag{85}$$

ideig kell a hordalékot lebegésben tartani.

Így az ülepedési út nyilván

$$D_s \text{ tényleges} = D_s \frac{t_2}{t_1} \tag{86}$$

Ha G_s [kp/sec] az időegység alatti átlagos lebegtetett hordaléksúly, akkor a Δt idő alatt levonult lebegtetett hordalék vízben mérhető súlya

$$F_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1} G_s \Delta t \, [\text{kp}] \tag{87}$$

a hordalék lebegtetéséhez szükséges munka pedig

$$E_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1} G_s D_s \frac{t_2}{t_1} \Delta t = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1} G_s D_s \frac{L}{v_k} \frac{\omega}{D_s} \Delta t \tag{88}$$

illetőleg figyelembe véve a (87) összefüggést

$$E_1 = F_1 L \frac{\omega}{v_k} \tag{89}$$

A görgetett hordalék szállítására fordított munka. Ha G_B [kp/sec] az átlagos görgetett hordalékszállítás, akkor annak vízben mérhető súlya

$$\frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1} G_B \, [\text{kp/sec}] \tag{90}$$

Így Δt idő alatt a szállított görgetett hordalék vízben mérhető súlya

$$F_2 = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1} G_B \Delta t \, [\text{kp}] \tag{91}$$

Ez az F_2 súlyerő $L = 6000$ m hosszú úton súrlódva mozog. A szükséges munka tehát, ha Bagnold szerint a 0,3 mm átlagos szemátmérőjű görgetett hordalék súrlódási tényezőjét $f = 0{,}75$-el vesszük számításba:

$$E_2 = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_1} G_B \Delta t L f = F_2 L f \, [\text{kpm}] \tag{92}$$

az átrendeződött anyag munkaszükséglete.

A III. táblázat 5. sorában szerepelnek a 3 időszakra vonatkozóan az előzőekben említett föltevések alapján számított F_3 értékek.

Mint említettük, *az átrendeződésre fordított munkát* $B = 300$ m, az átlagos meder szélességének megfelelő úthosszal és ugyancsak $f = 0{,}75$ súrlódási tényezővel számítva,

$$E_3 = F_3 B f \, [\text{kpm}] \tag{93}$$

Az E energiaveszteséget, ill. az E_1, E_2 és E_3 energiaszükségletet a három időszakra vonatkozóan az előzőek szerint kiszámítva a IV. táblázat foglalja össze.

A IV. táblázatban az E energiaveszteséget, amely tulajdonképpen az átlagos energiaforrást jelenti, 100%-nak tekintve, az utolsó oszlopban megadtuk, hogy az energia hány százaléka szükséges a lebegtetett és görgetett hordalék szállítására, valamint a meder átrendezéséhez. Az $E_1 + E_2 + E_3$ összeget a 100%-ból levonva, E_4 adja a különböző ellenállások (súrlódás, kanyarulatok, alakváltozások, turbulens vízmozgás stb.) leküzdésére és a vízmozgás fenntartására fordított energiát.

A IV. táblázatban foglaltakat áttekintve, kitűnik, hogy a hordalékmozgásra és a mederátrendeződésre a teljes energiának csupán mintegy $4 \div 7$%-a használódott fel. Nyilvánvaló, hogy ez az alacsony energiafelhasználási százalék az előző közelítő feltevéseket figyelembe véve minimumnak tekinthető. Vagyis adott esetben bizonyossággal mondhatjuk, hogy a vízfolyások ennél lényegesebben több energiát fordítanak a hordalékszállításra és a mederátrendeződésre.

Ha egyenkint tekintjük a lebegtetett, görgetett és mederátrendeződési energiaszükségleteket, akkor a következőket állapíthatjuk meg.

A lebegtetett hordalékszállításra mindhárom periódusban a teljes energiájának csupán $6 \div 4$ század részszázalékát fordította a vízfolyás. Ez, összehasonlítva például a Duna nagymarosi szakaszán talált 0,15%-al, feltűnően alacsony érték. Egyik magyarázata ennek az lehet, hogy a Dunán általában $2 \div 4$-szeres ülepedési úthossz ellenében tartja a vízfolyás lebegésben a hordalékot. Egy másik lehetséges magyarázat, hogy a vizsgált időszakokban lebegtetett hordalékban aránylag szegény volt a Dráva-víz.

A görgetett hordaléknál $1{,}4 \div 3$% volt a teljes energia százaléka. Ez az érték is a valóságban nyilván lényegesen nagyobb, hiszen folyamatos súrlódási munkát tételeztünk fel, míg a valóságban, éppen a legújabb vizsgálatok szerint, a görgetett hordalék szakaszosan mozog.

Az átrendeződésre $1 \div 4{,}8$%-a fordítódott az energiának. Ez az érték mindenképpen minimum és a nyilvánvaló többszöri átrendeződést tekintve, a valóságban annak esetleg nagyságrendileg nagyobb érték felelne meg.

A drávaszabolcsi szakaszra vonatkozó vizsgálatok összhangban vannak a vízfolyások hordalékszállító képességére vonatkozó vizsgálatokkal. A természetes vízfolyások hordalékszállító képességét általában a lebegtetett hordalékszállításra fordított (89) képlet és a hordalékos víz teljes energiaveszteségének arányával szokták kifejezni. Ha képezzük a (89) képlet és a (80) képlet hányadosát, valóban megkapjuk az irodalomból jól ismert

$$\eta = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma_z} \frac{\omega}{vS} \frac{Q_s}{Q_z} \tag{94}$$

IV. Táblázat

A lebegtetett és görgetett hordalék szállításához, valamint a meder átrendeződéséhez szükséges energia a Dráva 6000 m-es szakaszán három különböző időszakban

Időszak	Energiaveszteség, ill. energiaszükségletek	Súlyerő: F, F_1, F_2 és F_3 [kp]	Megtett út L, B [m]	Esés: $S = \frac{h_v}{L}$	Esési veszteség h_v [m]	Ülepedési sebesség és középsebesség aránya ω/v_k [—]	Surlódási tényező f [—]	Energiaveszteség, ill. energiaszükségletek [kpm]-ben	Energiaveszteség, ill. energiaszükségletek Energiaveszteség E %-ában
Első időszak	E	$F = 5{,}50 \cdot 10^{12}$	6000	$1{,}6 \cdot 10^{-4}$	0,96	—	—	$5{,}280 \cdot 10^{12}$	100,000
1968. X. 1.—1969.	E_1	$F_1 = 3{,}48 \cdot 10^{8}$	6000	—	—	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$	—	$31{,}320 \cdot 10^{8}$	0,059
III. 15.	E_2	$F_2 = 0{,}19 \cdot 10^{8}$	6000	—	—	—	0,75	$8{,}550 \cdot 10^{10}$	1,619
	E_3	$F_3 = 11{,}20 \cdot 10^{8}$	300	—	—	—	0,75	$2{,}520 \cdot 10^{11}$	4,773
	E_4	—	—	—	—	—	—	$4{,}939 \cdot 10^{12}$	93,549
Második időszak	E	$F = 31{,}15 \cdot 10^{12}$	6000	$1{,}6 \cdot 10^{-4}$	0,96	—	—	$29{,}904 \cdot 10^{12}$	100,000
1969. III. 15.—	E_1	$F_1 = 15{,}70 \cdot 10^{8}$	6000	—	—	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$	—	$141{,}300 \cdot 10^{8}$	0,047
1970. X. 15.	E_2	$F_2 = 2{,}14 \cdot 10^{8}$	6000	—	—	—	0,75	$0{,}963 \cdot 10^{12}$	3,221
	E_3	$F_3 = 12{,}40 \cdot 10^{8}$	300	—	—	—	0,75	$0{,}279 \cdot 10^{12}$	0,933
	E_4	—	—	—	—	—	—	$28{,}646 \cdot 10^{12}$	95,799
Harmadik időszak	E	$F = 5{,}28 \cdot 10^{12}$	6000	$1{,}6 \cdot 10^{-4}$	0,96	—	—	$5{,}069 \cdot 10^{12}$	100,000
1970. X. 16.—	E_1	$F_1 = 2{,}17 \cdot 10^{8}$	6000	—	—	$1{,}5 \cdot 10^{-3}$	—	$19{,}530 \cdot 10^{8}$	0,038
1971. V. 15.	E_2	$F_2 = 0{,}16 \cdot 10^{8}$	6000	—	—	—	0,75	$0{,}072 \cdot 10^{12}$	1,420
	E_3	$F_3 = 9{,}70 \cdot 10^{8}$	300	—	—	—	0,75	$0{,}218 \cdot 10^{12}$	4,301
	E_4	—	—	—	—	—	—	$4{,}777 \cdot 10^{12}$	94,241

összefüggést. Q_s és Q_z ugyanis a lebegtetett hordalék, ill. hordalékos víz térfogatban kifejezett hozama, az energiavonal esése pedig

$$S = \frac{h_v}{L} \tag{95}$$

Összehasonlítva (94) és a (76) összefüggést, felismerhető a

$$\frac{\gamma_z}{\gamma_1 - \gamma} \frac{v}{\omega} S \frac{Q_z}{Q_s} \quad \text{és} \quad \frac{\gamma_1}{\omega}(v_h - v)$$

képletek közti analógia.

A drávaszabolcsi kísérleti szakaszon a mérések jelenleg is folyamatban vannak. Várható, hogy a további mérések alapján újabb következtetéseket tudunk majd levonni, de az is valószínű, hogy a különböző helyeken végzett hasonló vizsgálatok eredményei további értékes megállapításokat tesznek majd lehetővé.

A drávaszabolcsi kísérleti szakaszra vonatkozó vizsgálatok jól mutatják, hogy a vízfolyások hordalékszállítására vonatkozó elméleti kutatások és mérési eredmények szorosan, elválaszthatatlanul kapcsolódnak össze.

3. A feladatok megoldási módszerei

A természetben végzett észlelések és megfigyelések szakmai hasznosításához csakúgy, mint a korszerű elméleti kutatásoknál is, rendkívül fontos a feladat szabatos megfogalmazása. Ezt a legcélravezetőbb megoldási módszer kiválasztásának kell követnie. A feladatok legáltalánosabb formában a fizikai változók közti kapcsolatok és az ezekhez kapcsolódó egyértelműségi feltételek, vagyis az ún. matematikai modellek határozzák meg.

Nyilvánvaló, hogy a matematikai modell pontos megfogalmazása még akkor is szükséges, ha annak matematikai megoldása mai ismereteink szerint még nem lehetséges. A pontos megfogalmazás kényszerít ugyanis bennünket arra, hogy lehetőleg minden fontos körülményt figyelembe vegyünk, és a vizsgált folyamatra vonatkozó ismereteinket szabatosan rendszerezzük.

Az előzőekből világos, hogy a jelenséget leíró differenciálegyenlet-rendszer megoldását ma még nem ismerjük. De az is nyilvánvaló, hogy bizonyos feltevésekkel a közelítő megoldás esetleg lehetővé válik. Egy ilyen egyszerűsítés pl., amely különben általánosan megengedett, hogy a vezetési tényezőket, amelyek elméletileg tenzorok, skalárral helyettesítjük. Vagy ilyen egyszerűsítés, hogy a vízmozgás turbulenciáját nem a Reynolds-feszültségekkel, hanem valamilyen vezetési tényező és az áramlási középsebesség gradiensének szorzatával vegyük figyelembe. Még általánosabban elfogadott egyszerűsítés a két, sőt egy dimenzióra való áttérés.

Az egyenletrendszert esetenként ún. differenciaegyenlet-rendszerré is átalakíthatjuk, és így lehetővé válik, hogy a korszerű, nagy sebességű digitális vezérlésű automatikus számítógéppel az egyenletrendszert az egyértelműségi feltételek függvényében megoldjuk.

Lehetséges a kísérleti megoldás is, amelyet magán a természetes vízfolyáson vagy valamilyen kismintán végezhetünk. Egyébként is ma már világos, hogy a kísérleti és numerikus megoldást egymástól nem lehet elválasztani. Kibernetikai nyelven ezt úgy mondjuk, hogy ún. visszacsatolás van a kettő között. A numerikus módszerekkel kapott megoldás alapján dönthető el, hogy milyen feltevéseket kell kísérleteinkben megvizsgálni, és a kísérleti adatok alapján tehetjük pontosabbá magát a numerikus módszert is.

Eszerint a gyakorlati feladatok megoldásához az elméleti és kísérleti eszközök egyaránt szükségesek. Pontosabban fogalmazva, a hordalékmozgás témakörével kapcsolatos elméleti vizsgálatok megfelelő kísérleti munka nélkül nem vezethetnek sikerre. Természetesen fordítva is mondhatjuk. Egyetlen kísérlet sem adhat megbízható és használható eredményt megfelelő elméleti megfontolások nélkül.

IRODALOM

1. BOGÁRDI J.: Vízfolyások hordalékszállítása. Akadémiai Kiadó, Budapest 1971, 837. o.
2. BOGÁRDI J.: Fluvial Sediment Transportation. *Advances in Hydroscience*, **8.** (1972), 183—259. Academic Press Inc. New York and London
3. BOGÁRDI J.: A lebegtetett hordalékszállítás általános egyenletei. *Hidrológiai Közlöny* (1970), 529—536
4. BOGÁRDI J.: The Sediment Transporting Capacity of Alluvial Streams. *Acta Techn. Hung.* **75** (1973)
5. BOGÁRDI J.: Feststoffproblem-Theorie und Praxis. *ÖWWV.* Institut für Wasserwirtschaft, Hochschule für Bodenkultur, Hydrologie-Fortbildungskurs, 1973, Band 14/B, Wien
6. BOGÁRDI J.—SZŰCS, E.: Balance Equations of Suspended Sediment Transportation. *Acta Techn. Hung.* **69** (1970)
7. BRUK S.: Observation on Some Assumptions in Suspended Sediment Transport Kinetics *Saopstenja Instituta za Vodoprivedu „Jaroslav Cerni"*, Vol. XIV, No. 40.
8. SZŰCS E.: Dialógusok a műszaki tudományokról. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971
9. SZŰCS E.: Hasonlóság és modell. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1972

Up-to-date Theroetical and Practical Problems of Sediment Transport. Theoretical problems are dealt with by making use of the balance equations. Differential equations to express the conservation of mass, kinetic energy, internal energy and of momentum are introduced. After evaluation a comparison is made between them and, on this basis, characteristic righttousnesses are established. Principally, the balance equations are equally valid for the movement of the suspended silt and bed load, however, as a matter of course, by both of them, separately considering the unanimity conditions relating to themselves and mostly differing from one another. The sediment transporting capacity of watercourses, both in theoretical and practical relations is discussed. On the basis of the measurements and observations performed on the experimental section of the river Drava also the quota of energy used for the motion of the suspended silt and bed load as well as that allotted to the rearrangement of the material in connection with degradation and agredation of the river bed are numerically presented.

Moderne theoretische und praktische Probleme der Geschiebebewegung. Der Verfasser behandelt die theoretischen Probleme der Geschiebebewegung mit Hilfe der Bilanzgleichungen. Es werden Differentialgleichungen eingeführt, welche die Erhaltung der Masse, der kinetischen Energie, der inneren Energie und des Impulses ausdrücken. Dieselben werden bewertet, minteinander verglichen und es werden charakteristische Gesetzmäßigkeiten ermittelt. Die Bilanzgleichungen sind grundsätzlich in gleicherweise gültig für die Bewegung des Schwebestoffes und des Geschiebes, wobei natürlich gesondert für beide die auf sie bezüglichen und die vorneinenander äußerts abweichenden Eindeutigkeitsbedingungen in Betracht gezogen werden. Es wird auch die Feststoff-Führungsfähigkeit der Wasserläufe, sowohl in theoretischer als auch in praktischer Hinsicht besprochen. Anstand der an der Versuchstrecke der Drau durchgeführten Messungen und Beobachtungen werden auch die Energieanteile zahlenmäßig angeführt, die auf die Bewegung des Geschiebes und Schwebestoffes sowie auf die mit der Austiefung, bzw. Verlandung zusammenhängende Bettumordnung verwendet wurden.