AZ INTERPOLÁCIÓS ALAPPONTOK CÉLSZERŰ FELVÉTELE KÉTVÁLTOZÓS LAGRANGE-INTERPOLÁCIÓ ESETÉBEN

KIS SÁNDOR*

[Beérkezett 1972 november 15-én]

1. Bevezetés

Az interpoláció a numerikus matematika egyik igen fontos segédeszköze. Ha egy függvényt interpoláló polinómjával helyettesítünk, akkor az sok vonatkozásban (helyettesítési érték meghatározás, deriválás, integrálás) számítástechnikailag könnyebben kezelhető. Ilyen úton vezethetjük vissza például egy differenciálegyenlet megoldását lineáris egyenletrendszer megoldására. Az irodalom a fenti módszert részletesen tárgyalja mind közönséges, mind parciális differenciálegyenletekre, szabályos és szabálytalan rácspontosztáson történő interpolálás esetére is [2–4, 6–9].

A közelítés sikere nagymértékben függ az interpolációs alappontok (továbbiakban pontkép) szerencsés felvételétől. Az irodalomból ismert tény, hogy egyváltozós függvényekhez tetszőlegesen választott interpolációs pontkép esetén is egy és csakis egy legalacsonyabb fokszámú Lagrange-féle interpoláló polinom tartozik, ugyanakkor ez a — sok szempontból igen előnyös — egyértelműség kétváltozós interpoláció esetében nincs biztosítva.

A fentiek következménye, hogy a parciális differenciálegyenletekre alkalmazott differencia-módszer tetszőlegesen választott pontképek esetében stabilitási problémát vetett fel ([4], [6]), és nem vezet eredményre csak az ún. reguláris pontképek esetében.

Dolgozatunk első részében *meghatározzuk a reguláris pontkép fogalmát, és értelmezzük azt egy- és kétváltozós interpoláció esetére.* Ezzel nyilvánvalóvá válik a differencia-módszer stabilitása és a Lagrange-féle interpoláció közötti szoros kapcsolat.

A dolgozat második részében a *kétváltozós interpoláció reguláris pontképeinek néhány* olyan *tulajdonságát* határozzuk meg, amelyek segítségével a regularitásra elégséges feltételt adhatunk.

E feltétel birtokában a dolgozat harmadik részében *módszert adunk a reguláris pontképek szerkesztésére.* A regularitás feltétele geometriai kikötéseket tartalmaz, így szemléletessége révén a gyakorlati szerkesztésre jól alkalmazható.

* Dr. Kiss Sándor, 1145 Budapest, Újvidék u. 66/b.

Végül bemutatunk néhány példát a pontképek felvételére, amelyek között a szabályos négyszög és háromszög rácsosztáson felvehető pontképeken kívül a legáltalánosabb pontkép is szerepel.

2. A reguláris pontkép fogalma

Legyen az egy bizonyos közös tulajdonsággal bíró u függvények $\{u\}$ halmaza az R lineáris tér. Ezen u függvények bármelyikéhez az $L(u)$ szimbólummal hozzárendelünk egy valós vagy komplex számot. A hozzárendelés lineáris, ha bármely $u, v \in R$ és α, β valós ill. komplex számpár esetén fennáll az

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$$

egyenlőség.

Az L lineáris hozzárendelések $\{L\}$ halmaza maga is lineáris tér, amelyet az R konjugált terének nevezünk, és R^*-gal jelölünk. Ha az R tér n-dimenziós, akkor R^* is n-dimenziós (Bizonyítás: [5]).

Ha az R egy bázisa: $r_1, r_2, \ldots r_n$ és az R^* egy bázisa: $L_1, L_2, \ldots L_n$, akkor a következő determináns biztosan nem zérus:

$$\Delta = |L_i(r_j)| \neq 0. \tag{2.1}$$

Fordítva: $\Delta \neq 0$ esetében $\{L_i\}$ és $\{r_i\}$ bázis. (Bizonyítás pl.: [3] és [5]).

Ekkor az R-ben találhatunk olyan $l_1, l_2, \ldots, l_n$ bázist, amelynek vektorai az alábbi értelemben ortogonálisak az $L_1, L_2, \ldots, L_n$ vektorokra:

$$L_i(l_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases} \tag{2.2}$$

Ilyen esetben az $\{L_i\}$ és $\{l_i\}$ bázisokat reciprok bázisoknak nevezzük. A reciprok bázis meghatározása a következő.

Legyenek az l_k vektor $\{r_i\}$ bázisra vonatkozó koordinátái: $\alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \ldots, \alpha_{n,k}$. Ekkor a (2.2) alapján e koordináták meghatározására az alábbi feltételi rendszer írható:

$$L_i(l_k) = L_i\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} r_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} L_i(r_j) = \delta_{ik}, \tag{2.3}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Az egyenletrendszer determinánsa, Δ nem zérus, így az α_{jk} koordináták egyértelműen meghatározhatók.

Fentiek kapcsolata a Lagrange-interpolációval nyilvánvalóvá válik, ha a következő két példában értelmezzük az egyes vektorokat.

a) *Első példánkban* legyen az R a legfeljebb p-edfokú egyváltozós polinomok lineáris tere. A tér dimenziószáma: $n = p + 1$. Az $\{r_i\}$ bázist és az $\{L_i\}$ bázist válasszuk a következőképpen:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = x, \quad r_3 = x^2, \quad \ldots, \quad r_n = x^{n-1},$$

$$L_1(u) = u(x_1); \quad L_2(u) = u(x_2); \quad \ldots, \quad L_n(u) = u(x_n), \tag{2.4}$$

ahol $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tetszőleges, de különböző értékek.

A (2.1) szerinti determináns jelen esetben az ún. Vandermonde-determináns:

$$\Delta = V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |r_j(x_i)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.5}$$

Mint ismeretes, a Vandermonde-determináns különböző x_i értékeknél nem tűnik el, tehát $\{L_i\}$ és $\{r_i\}$ valóban bázis. Az $\{L_i\}$ bázis $\{l_i\}$ reciprok bázisának vektorai jelen esetben éppen a Lagrange-féle interpoláló alappolinomok:

$$L_i(l_j) = l_j(x_i) = \delta_{ij}. \tag{2.6}$$

Valamely u függvény (polinom) a bázisvektorok lineáris konbinációjaként írható fel:

$$u = \alpha_1 l_1 + \ldots + \alpha_n l_n.$$

A koordináták meghatározására alkalmazzuk u-ra az L_i lineáris hozzárendelést:

$$L_i(u) = u(x_i) = L_i(\alpha_1 l_1 + \ldots + \alpha_n l_n) = L_i(\alpha_i l_i) = \alpha_i$$

$$\alpha_i = u(x_i),$$

vagyis legyen

$$u = u(x_1) l_1 + \ldots + u(x_n) l_n. \tag{2.7}$$

b) *Második példánkban* legyen az R a legfeljebb p-edfokú kétváltozós polinomok lineáris tere. A tér dimenziószáma $n = 1/2\,(p + 1) \cdot (p + 2)$. [Ezt beláthatjuk, ha meggondoljuk, hogy egy p-edfokú polinomnak legfeljebb $1/2\,(p + 1) \cdot (p + 2)$ számú szabadon felvehető együtthatója van.] Vegyünk fel az értelmezési tartományban n pontból álló pontképet: $P_1, P_2, \ldots, P_n$, és válasszuk meg az $\{r_i\}$ és $\{L_i\}$ bázisokat a következőképpen:

$$\begin{gathered} r_1 = 1,\ r_2 = x,\ r_3 = y,\ r_4 = x^2,\ r_5 = xy,\ r_6 = y^2,\ \ldots,\ r_n = y^p, \\ L_1(u) = u(P_1),\ L_2(u) = u(P_2),\ \ldots,\ L_n(u) = u(P_n). \end{gathered} \tag{2.8}$$

Mivel $\{r_i\}$ az R-nek nyilvánvalóan bázisa, az $L_1, L_2, \ldots, L_n$ vektorok akkor és csakis akkor lineárisan függetlenek, ha a (2.1) szerint képzett Δ determináns nem zérus:

$$\Delta = |r_j(P_i)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^p & y_2^p & \ldots & y_n^p \end{vmatrix} = W(x_1,y_1;\ x_2,y_2;\ \ldots;\ x_n,y_n) \tag{2.9}$$

Ezt a determinánst nevezzük a továbbiakban a (2.5) mintájára kétváltozós Vandermonde-determinánsnak, és jelöljük $W(x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ \ldots\ x_n, y_n)$-vel.

Ha $W \neq 0$, akkor az $\{l_i\}$ reciprok bázis egyértelműen állítható elő, és az R tér valamely u eleme

$$u = u(P_1)l_1 + \ldots + u(P_n)l_n \tag{2.10}$$

alakban felírható.

A kétváltozós Vandermonde-determináns értéke explicite nem fejezhető ki, és zérustól különböző volta nincs biztosítva bármely pontkép esetében.

Definíció

Az olyan $P_1, P_2, \ldots P_n$ pontokból álló pontképet, amelyhez tartozó W determináns zérustól különböző, p-edfokú reguláris pontképnek nevezzük.

A fenti két példában az R tér valamely tetszőleges elemét (polinomját) állítottuk elő a Lagrange-féle alappolinomok lineáris kombinációjaként. Egy interpolációs feladatban a közelítendő függvény általában nem polinom, és ezért nem eleme R-nek, így a (2.7) és (2.10) alatti előállítás csupán a függvény R térre vonatkozó „vetületét" adja. A közelítés tehát annyiban nevezhető jónak vagy rossznak, amennyiben az adott függvény jól vagy rosszul helyettesíthető az R-re vonatkozó vetületével. (Az R ebben a vonatkozásban a folytonos függvények lineáris terének hipersíkjaként tekintendő.)

A két példából az alábbi következtetést vonhatjuk le: egy u függvény a (2.7) illetve (2.10) alakban egyértelműen előállítható vagy közelíthető, ha az interpolációs feltételeket kifejező L_i vektorrendszer lineárisan független, azaz, ha a fenti definíció értelmében az interpolációs pontkép reguláris.

Megvizsgáljuk, hogyan biztosítható a pontkép regularitása kétváltozós függvények esetén.

3. Reguláris pontképek tulajdonságai

A következőkben kétváltozós p-edfokú reguláris pontképek három olyan tulajdonságát ismertetjük, amelyek alapján ilyen pontképek szerkeszthetők:

(I). Egy pontképhez tartozó W determináns invariáns a koordináta-transzformációval szemben

A fenti állítás helyességét a következőképpen láthatjuk be: a koordinátarendszer transzformációját a v, z és ψ változókkal jellemezhetjük, amelyek közül a v az x, és z az y irányú eltolást, ψ pedig az elfordítás szögét jelenti.

Megvizsgáljuk a mozgásokat külön-külön és a W-t deriváljuk rendre a kérdéses változó szerint. Egy n-edrendű determináns deriváltja n db determináns összegével egyenlő, melyek mindegyikében egy-egy sort deriválunk. Könnyen beláthatjuk, hogy a W speciális szerkezete folytán bármely derivált sor megegyezik valamely más, nem derivált sorral, vagy azok egy lineáris kombinációjával, vagy zérus, és így:

$$\frac{dW}{dv} = 0\,, \quad \frac{dW}{dz} = 0\,, \quad \frac{dW}{d\psi} = 0\,, \tag{3.1}$$

A fenti három egyenlőség éppen az I. állítással ekvivalens.

(II). Egy p-edfokú reguláris pontképben legfeljebb $p + 1$ pont illeszkedhetik egy egyenesre

A bizonyításhoz képezzük az x, y változók Lagrange-féle alappolinomjait:

$$l_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}\,, \tag{3.2}$$

ahol x_j, y_j a P_j pont koordinátái ($i, j = 1, 2, \ldots, n$). Legyenek $P_{\nu 1}$, $P_{\nu 2}, \ldots P_{\nu k}$ pontok az $y = \alpha x + \beta$ egyenesen, és tekintsük a $z = l_{\nu i}(x, \alpha x + \beta)$ p-edfokú, egyváltozós polinomot. Ennek zérushelyei $x_{\nu 1}, \ldots, x_{\nu i-1}, x_{\nu i+1}, \ldots, x_{\nu k}$ és az $x = x_{\nu i}$ helyen pedig $z = 1$. Mivel a polinom z-ben p-edfokú, ezért $x_{\nu i}$ különböző valós gyökeinek száma legfeljebb p lehet, így szükséges, hogy

$$k \leq p + 1 \tag{3.3}$$

legyen, és ezzel az állítást is igazoltuk.

(III). *Ha egy p-edfokú reguláris pontképből elhagyunk $p+1$ db egy egyenesen fekvő pontot, akkor a megmaradó pontok egy $p-1$-edfokú reguláris pontképet alkotnak.*

Azt fogjuk bebizonyítani, hogy a $W^{(p)}$ determináns előállítható egy nemzérus determináns, valamint a megmaradó $p-1$-edfokú pontkép $W^{(p-1)}$ determinánsának szorzataként.

Legyenek a $P_1, P_2, \ldots, P_{p+1}$ pontok egy egyenesen, mégpedig az X-tengelyen. (E feltétel megengedhető, ugyanis a pontok számozása tetszőleges, másrészt (I) értelmében a vonatkoztatási rendszert is tetszőlegesen vehetjük fel). Rendezzük át $W^{(p)}$ determináns sorait az y, és ezen belül az x koordináták növekvő hatványa szerint, és legyen eközben a sorcserék száma: t_p.

Ekkor $W^{(p)}$ a következő alakú:

$$W^{(p)} = (-1)^{t_p} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_1 & \ldots & x_{p+1} & x_{p+2} & \ldots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & \ldots & x_{p+1}^2 & x_{p+2}^2 & \ldots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^p & \ldots & x_{p+1}^p & x_{p+2}^p & \ldots & x_{n-1}^p & x_n^p \\ 0 & \ldots & 0 & y_{p+2} & \ldots & y_{n-1} & y_n \\ 0 & \ldots & 0 & x_{p+2}\, y_{p+2} & \ldots & x_{n-1}\, y_{n-1} & x_n y_n \\ 0 & \ldots & 0 & x_{p+2}^2\, y_{p+2} & \ldots & x_{n-1}^2\, y_{n-1} & x_n^2 y_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & x_{p+2}^{p-1}\, y_{p+2} & \ldots & x_{n-1}^{p-1}\, y_{n-1} & x_n^{p-1} y_n \\ 0 & \ldots & 0 & y_{p+2}^2 & \ldots & y_{n-1}^2 & y_n^2 \\ 0 & \ldots & 0 & x_{p+2}\, y_{p+2}^2 & \ldots & x_{n-1}\, y_{n-1}^2 & x_n y_n^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & y_{p+2}^p & \ldots & y_{n-1}^p & y_n^p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V^{(p)} & Z \\ & M^{(p-1)} \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

A bal alsó blokk zérus a feltétel miatt. A Laplace-féle kifejtési szabályt alkalmazva:

$$W^{(p)} = (-1)^{t_p} V^{(p)} M^{(p-1)} \tag{3.5}$$

ahol $V^{(p)} = V(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$, a Vandermonde-determináns. Az $M^{(p-1)}$ determinánsból oszloponként kiemelhetünk y_k-t ($k = p + 2, \ldots, n$), és ekkor $W^{(p)}$ így írható fel:

$$W^{(p)} = (-1)^{t_p} V^{(p)} y_{p+2} y_{p+3} \ldots y_n (-1)^{t_p - 1} W^{(p-1)} \tag{3.6}$$

és ha bevezetjük a

$$G^{(p)} = (-1)^{t_p + t_p - 1} V^{(p)} \prod_{k=p+2}^{n} y_k \tag{3.7}$$

jelölést, akkor

$$W^{(p)} = G^{(p)} W^{(p-1)}$$

A $G^{(p)}$ nem zérus, mert a Vandermonde-determináns különböző értékeknél nem tűnik el, másrészt feltételünk értelmében az y_k koordináták, ha $p + 2 \leq k \leq n$, különböznek zérustól.

Ezzel a (III) állítást igazoltuk.

4. Reguláris pontkép szerkesztése

Ha egy pontképben $p+1$ db pont elhagyása után található p számú egy egyenesen fekvő pont, akkor a (III) bizonyításában leírt eljárás folytatható: tegyük fel, hogy egy pontkép szerkezete olyan, hogy minden „maradék" r-edfokú pontképben van $r + 1$ egy egyenesre illeszkedő pont, ekkor a $W^{(p)}$ determináns:

$$W^{(p)} = G^{(p)} G^{(p-1)} \ldots G^{(1)} W^{(0)} \tag{4.1}$$

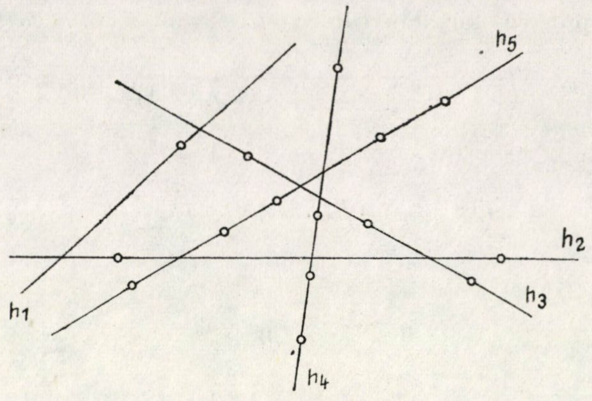
és belátható, hogy $W^{(0)} = 1$.

Az eljárás megfordítva, az egy pontból álló, nulladfokú reguláris pontképből kiindulva egy p-edfokú reguláris pontképet $p + 1$ lépésben előállíthatunk. Az eljárás általános (k-adik) lépése a következő: felveszünk egy egyenest (h_k) és az egyenesen k db pontot, ($k = 1, 2, \ldots, p + 1$).

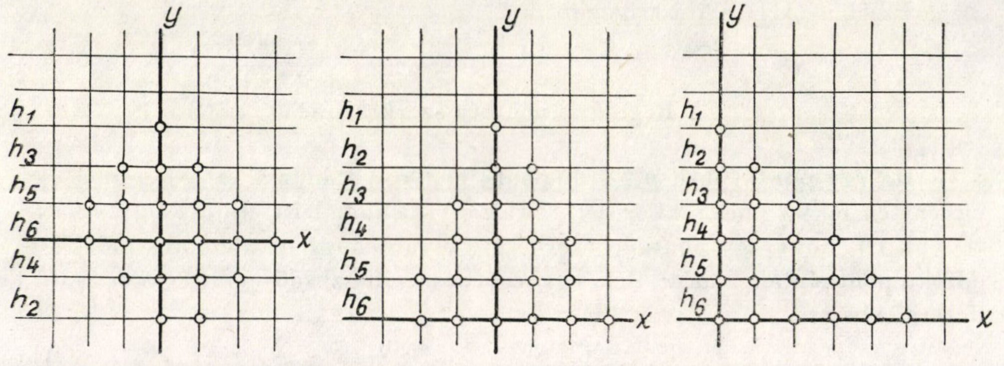
Nyilvánvaló, hogy az egyes lépésben felvett egyeneseknek egymástól különbözniök kell, valamint az, hogy az egyenesekre nem illeszkedhetnek a már előző lépésekben felvett pontok.

Az 1. ábrán a fenti eljárással előállított negyedfokú pontkép látható, szabálytalan rácsosztás esetén.

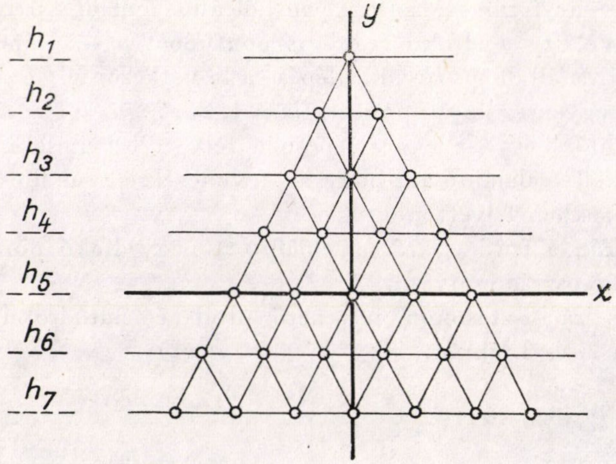
Szabályos rácsosztásokon felvehető ötöd- és hatodfokú pontképeket mutatunk be a 2. és 3. ábrán.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

IRODALOM

1. BOOTH, A. D.: Numerical Methods. Butterworths Scientific Publications. London 1957
2. COLLATZ, L.: The Numerical Treatment of Differential Equations. Springer-Verlag. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1960
3. DAVIS, PH. J.: Interpolation and Approximation. Blaisdell Publishing Co. New York—Toronto—London 1965
4. FEKETE, S.: Differenciáloperátorok numerikus generálása. *NIM. Számítástechnikai Közlemények*, 12, (1968)
5. GELFAND, I. M.: Előadások a lineáris algebráról. Akadémiai Kiadó. Budapest, 1955
6. HOLNAPY, D.: Új numerikus eljárás felületszerkezetek gépi számítására. Kandidátusi értekezés. Budapest 1970
7. KANTOROVICS, L. V.—KRÜLOV, V. I.: A felsőbb analízis közelítő módszerei. Akadémiai Kiadó, Budapest 1953
8. KOROVKIN, P. P.: Linear Operators and Approximation Theory. Hindustan Publishing Corp. Delhi 1960
9. KUNZ, K. S.: Numerical Analysis. McGraw-Hill Book Co. Inc. New York—Toronto—London 1957
10. RALSTON, A.: Bevezetés a numerikus analízisbe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1969
11. STEFFENSEN, J. F.: Interpolation. Chelsea Publishing Co. New Yotk 1950
12. THIELE, T. N.: Interpolationsrechnung. Commission von B. G. Teubner. Leipzig, 1909

Rational Assumption of Interpolation Reference Points in the Case of Bivariate Lagrange Interpolation. The paper deals with the bivariate Lagrange interpolation with respect to the unicity of the interpolating polynome. Such an interpolation (regular) point pattern is defined where the interpolation can be unequivocally performed. The properties of regular point patterns are studied, and, a practical method is introduced for their production. Finally, some regular interpolation point patterns are presented as examples for the application of the method described.

Zweckmäßige Festlegung der Grundprodukte für die Lagrangesche Interpolation bei zwei Variablen. Die Arbeit untersucht die Lagrangesche Interpolation für zwei Veränderliche vom Standpunkt der Unizität des interpolierenden Polynoms. Der Begriff eines solchen Punktsystems wird definirt (reguläres Punktsystem), für welches die Interpolation eindeutig durchgeführt werden kann. Die Eigenschaften des regulären Punktsystems werden untersucht und ein praktisches Verfahren für die Darstellung eines solchen Punktsystems wird gezeigt. Als Beispiele für die Anwendung der Methode werden einige reguläre Interpolationspunktsysteme gezeigt.