

# HÁROMDIMENZIÓS FESZÜLTÉG-ANALÍZIS KONTINUUM-ALTÉR SEGÍTSÉGÉVEL

BÉRES ELEK\*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1973. január 3-án]

A dolgozat a háromdimenziós feszültség-analízisnek egy olyan módszerét ismerteti, amely az egyensúlyi egyenleteket közvetlenül a véges méretű elemekre, a folytonossági feltételeket pedig a háromdimenziós kontinuum egydimenziós alterére, a felosztó felületek metszsvonalaként adódó hálózatra írja fel. A feszültségeket leíró függvényeket polinomokkal közelítve, a numerikus megoldás lineáris egyenletrendszerre vezet, amelynek együtthatói határozott integrálokból adódnak. Egyenletes osztás esetében ezek felírására általános érvényű operátorok alkalmazhatók, ezért ilyenkor az integrálok konkrét elvégzésére sincs szükség.

## 1. Bevezetés

A feszültségek számításának klasszikus módszere a differenciális méretű térfogatelemekre felírt egyensúlyi és folytonossági egyenletek segítségével nyert differenciálegyenletek felírását és megoldását jelenti. Minthogy a feladatnak az adott peremfeltételeket kielégítő megoldása az általános esetre vonatkozólag nem adható meg zárt alakban, kevés kivételtől eltekintve megelégszünk valamilyen numerikus módszer szolgáltatta közelítő eredménnyel. Régebben elsősorban a véges differenciák módszerét, vagy a függvényssorral történő megoldásnak azt az esetét említették a megoldás elvi lehetőségeként, amely a függvényssornak csupán az első vagy első néhány tagját vette figyelembe. A megoldás fonásága különösen a véges differenciák módszerénél szembeűnő, ahol a közvetlen felírás helyett lényegében az infinitezimálisan kicsiny elemekre érvényes összefüggésekből következtetnek vissza a véges méretekre vonatkozó összefüggésekre.

Nagy kapacitású és gyors működésű számológépek azonban a differenciálegyenletek felírásakor alkalmazott elvek közvetlen felhasználását is lehetővé teszik. Lehetőség van rá, hogy az egyensúlyi feltételeket magukra a felületek valamilyen adott rendszere által kimetszett véges nagyságú térfogatelemekre, a folytonossági egyenleteket pedig a térfogatelemek élei által kép-

\* Béres Elek, 1011 Budapest, Hunyadi J. u. 11.

viselt, csupán egydimenziós elemekből álló hálózatra, a kontinuum alterére írjuk fel. Ez utóbbi új gondolat jelenti az ismertetendő módszer alapvető sajátosságát.

A feszültségeket leíró függvényeket polinomokkal közelítjük. Ezekkel a polinomokkal szemben azt az igényt támasztjuk, hogy véges számú előírt pontban egyezzenek meg a közelítendő függvénnyel. A számítás közvetlen célja a feszültségeket leíró függvények előbb említett véges számú pontjához tartozó közelítő értékének a meghatározása. A függvények ilyen közelítésekor az egyensúlyi és folytonossági feltételek olyan lineáris egyenletek alakjában írhatók fel, amelyek összessége szolgáltatja azt a lineáris egyenletrendszert, amelyből aztán a feszültségeknek a kiválasztott pontokhoz tartozó értékei kiszámíthatók. A továbbiakban ezt az alapelvében nagyon egyszerű módszert fogjuk ismertetni, előre bocsátva, hogy közelítő jellege egyedül a függvények polinomokkal való közelítéséből adódik. Előnyei röviden a következőkben foglalhatók össze:

- a) a módszer a test, illetve az őt határoló felület geometriájában nem igényel közelítést;
- b) a folytonossági egyenleteket az egydimenziós hálózatra kell felírni;
- c) a lineáris egyenletrendszer együtthatóit határozott integrálok szolgáltatják, ami a megoldás stabilitását fokozza.

## 2. A módszer leírása

A vizsgálandó testet felületekkel részekre bontjuk. A testben ébredő feszültségeket e felületek mentén kívánjuk meghatározni. A testnek egy-egy elemi része a felületén ható feszültségek és a ráható tömegerők hatására egyensúlyban van. Egyensúly esetében az erők három, nem egy síkba eső egyenesre vonatkozó vetületeinek az összege, valamint a nyomatékvektorok három nem egy síkba eső vektorral párhuzamos összetevőinek összege külön-külön zérus. Egy-egy térfogatelemre vonatkozó egyensúlyi feltétel tehát az általános esetben 6 egyenletet jelent.

Az így kimetszett elemek a felületükön ható és a belsejükben ébredő feszültségek hatására úgy deformálódnak, hogy a deformáció után is hézagmentesen csatlakoznak egymáshoz. Ezt az alakváltozásra vonatkozó feltételt nevezzük folytonossági feltételnek. Ez a minden egyes térfogatelemre, sőt annak minden felületdarabjára nézve folytonos kapcsolat végtelen sok feltételt jelent, ezért a hiánytalan kielégítésére való törekvés egyet jelentene a kapcsolatot leíró parciális differenciálegyenlet egzakt megoldásával, ami az általános esetben keresztülvihetetlen.

Az ismert és az általában alkalmazott numerikus módszerek az elemek kiválasztott pontjainak egymáshoz való illesztésével közelítik a folytonossági

feltételeket. Ez a közelítés a folytonosságot a kontinuum 0 dimenziós alterére, a kijelölt pontokra korlátozza. Ezzel szemben a most ismertetendő eljárás a folytonossági feltételeket az egydimenziós altérre, a hálózatra írja elő. Itt a dimenziócsökkenés már csak kettő, tehát a közelítés egy dimenzióval magasabb rendben történik.

Ugyanakkor a módszer mind elvében, mind pedig gyakorlati kivitelében egyszerű, mert az alakváltozást a legegyszerűbb elemre, a szemléletesség érdekében rúdnak nevezhető, valójában azonban a geometriai értelemben vett vonalra vonatkozólag kell felírni. A rúd elnevezés használatát az indokolja, hogy az alakváltozás számítása során a valódi rudat is egydimenziós kontinuumként kezeljük.

Az ismertetendő módszer az elmozdulások egyezését vonalak, azaz az elemek közös élei mentén írja elő. A közös csomópontba csatlakozó vonalak végpontjaira nézve nemcsak az azonos eltolódást, hanem az érintők megfelelő viszonyát is megköveteli.

Feladatunk azonban a feszültségek meghatározása. Mivel azok eloszlását nem ismerjük, helyette csupán adott pontbeli közelítő értékeinek a meghatározására törekszünk. Ezeknek a pontbeli értékeknek a segítségével a feszültségeket leíró függvényeket polinomokkal közelítjük, és a vonalak alakváltozását ezekkel fejezzük ki.

A testet elemekre osztó felületek metszésvonalai egy térbeli hálózatot alkotnak. Ennek a hálózatnak a vonalai a testre ható külső erők okozta alakváltozás után is úgy csatlakoznak egymáshoz, hogy a közös pontok közös pontok maradnak, és ezekben az érintők hajlásszöge is csak a csomópontbeli feszültségekkel kifejezhető kis mértékben változik meg. A közös csomópontba csatlakozó rúdvégek eltolódásának egyenlőségét és a hozzájuk rendelt tengelykeresztek elfordulásának előírt (a feszültségekből számított, ill. azokkal kifejezett) különbségét kifejező egyenletek a folytonossági egyenletek.

Egy-egy vonalszakasz két végpontjának relatív elmozdulása a testben ébredő feszültségekből számítható, ill. közelítő értéke a feszültségek adott értékeivel kifejezhető.

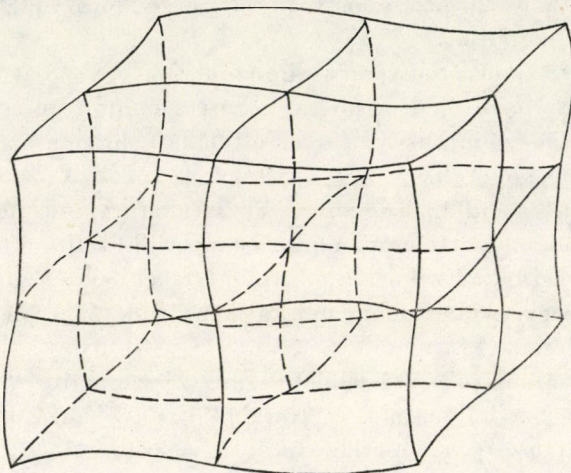
Az elemekre osztást megvalósító felületek alakjának elvi jelentősége nincs. Az elemek alakja és a metszésvonalként adódó hálózat tetszőleges lehet, mint az pl. az 1. ábrán is látható. A számítás végrehajtása szempontjából azonban mind mennyiségi, mind pedig minőségi tekintetben jelentős kihatása van a felosztás megfelelő megválasztásának.

A legegyszerűbbnek a koordinátasíkokkal párhuzamos síkokkal történő felosztás mondható, midőn a síkok egymástól való távolsága egyenlő. Speciális esetben -- pl. forgástestek vizsgálatakor -- előfordulhat ugyan, hogy más felosztás előnyösebb, a módszer első bemutatását mégis arra az esetre korlátozzuk, midőn az elemekre bontást végző felületek párhuzamos, ill. egymásra

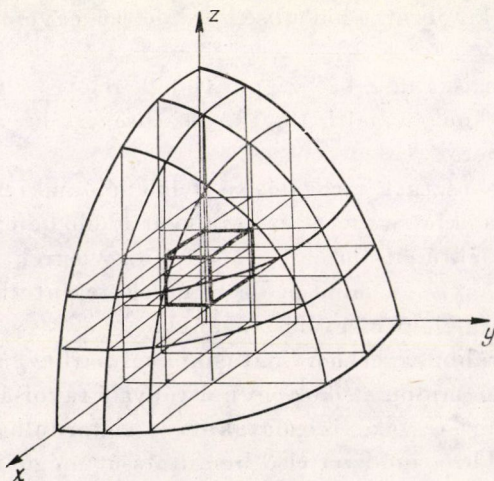
merőleges síkok és a párhuzamos síkok egymástól egyenlő távolságban vannak (2. ábra). A más esetre vonatkozó összefüggések hasonló módon vezethetők le.

A vizsgálandó esetben az elemek téglatestek, ill. téglatestekből a test határoló felülete által lemetszett részek (3. ábra), a hálózat vonalai pedig egyenesek, ill. sík görbék.

Ismeretleneknek a feszültségek csomópontokhoz tartozó értékeit tekintjük. Ez csomópontonként 6 ismeretlent jelent, mégpedig a síkokra merőleges



1. ábra



2. ábra



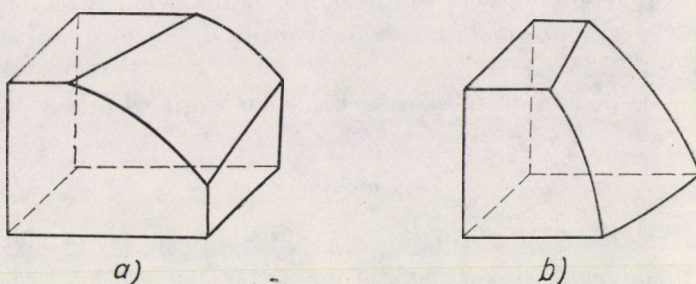
$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  és  $\sigma_z$  normál feszültségeket és a síkokkal párhuzamos  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  és  $\tau_{yz}$  nyírófeszültségeket.

Ha minden csomópontban mind a hat feszültséget felvesszük az ismeretlenek közé, és minden lehetséges egyensúlyi és folytonossági egyenletet felírunk, akkor az egyenletek száma meghaladja az ismeretlenek számát. A túlhatározott egyenletrendszerrel szemben azt a feltételt írjuk elő, hogy

$$\| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \| = \min!$$

legyen.

Amennyiben az egyenletek és az ismeretlenek száma egyenlővé tételnek az igénye felmerül, úgy az is biztosítható. Ennek egy hasonló esetre vonat-



3. ábra

kozó módja [2]-ben megtalálható, ezért ezzel a problémával itt nem foglalkozunk.

Az egyenletrendszer együtthatói határozott integrálok segítségével számíthatók. Mégpedig az egyensúlyi egyenletek együtthatói kettős, a folytonossági egyenletek együtthatói pedig egyszeres integrálok segítségével állíthatók elő. Maga az a tény is előnyösnek mondható, hogy az együtthatók határozott integrálok értékei, mert ez más műveletekkel pl. a differenciálással szemben a hibák hatását és terjedését csökkenti. Ugyanakkor számítástechnikai előnyök is jelentkeznek. A síkgörbére vonatkozó integrálok számítása általános esetben sem okoz problémát, mégis érdemes itt külön is rámutatni arra a felosztásból következő sajátságra, hogy a numerikus megoldáshoz a test belsejében levő elemekre vonatkozólag mind az egyszeres, mind pedig a kettős integrálokra általános érvénnyel bíró képletek vezethetők le, melyek a differenciálmódszer operátoraival mutatnak alaki hasonlóságot. Az integrálok esetenkénti konkrét kiszámítására tehát csupán a testet határoló felület mentén van szükség.



### 3. Egyensúlyi egyenletek

Egy elem akkor van egyensúlyban, ha a felületére ható erők (a metszeterőket képviselő feszültségek és felületi erők), valamint a tömegezők  $x$ ,  $y$  és  $z$  tengellyel párhuzamos összetevője, továbbá ezekre a tengelyekre vonatkozó nyomatéka zérus. Ez elemenként három erő- és három nyomaték-egyensúlyi egyenletet, összesen tehát 6 egyenletet jelent.

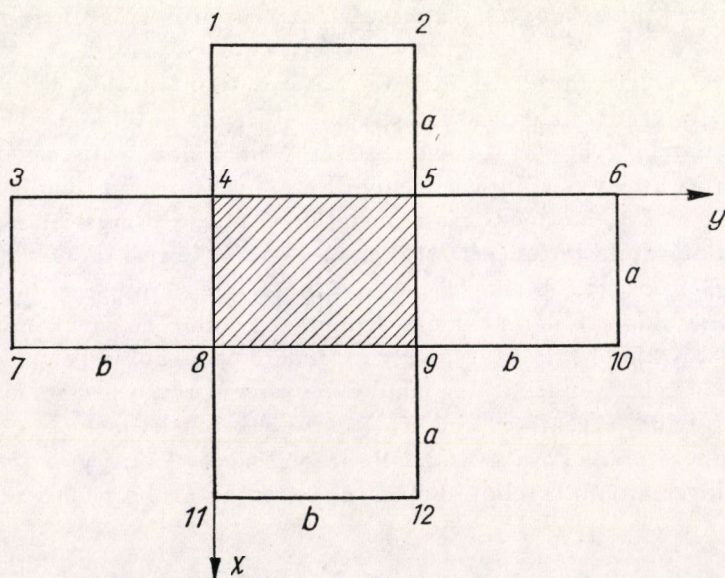
Mivel az osztó síkokat a koordinátasíkokkal párhuzamosan vettük fel, egy-egy metszetfelületen csupán 3 ismeretlen feszültség hat, a többi zérus. A test felületén ható külső terhelést (ide tartoznak a reakcióerők is) a koordinátatengelyekkel párhuzamos összetevőkre bontva célszerű megadni.

Az egyensúlyi egyenletek felírása az elemek felületére vonatkozó integrálok kiszámítását teszi szükségessé. Elméletileg a probléma ezzel megoldottnak is tekinthető, a számítástechnikai szempontok szem előtt tartása azonban részletesebb kifejtést igényel.

Az elemeket határoló felületrészek három fő típusba sorolhatók.

#### 3.1. Az elemek első típusa

A felületelem téglalap alakú, sőt a síkjában levő szomszédos elemek is egybevágó téglalapok (4. ábra). Mint említettük, a feszültségeket egy-egy vonal mentén polinomokkal közelítjük, és magát a függvényt, sőt a vonatkozó integrálokat is a kiválasztott pontokhoz tartozó függvényértékekkel fejezzük



4. ábra



ki. Ez utóbbi azonban csak úgy lehetséges, ha nem csupán az egyes vonal menti, hanem a teljes tartományra vonatkozó — immár kétváltozós — függvényt is polinommal közelítjük. Ha a polinom alakját megadjuk, együtthatóit az adott pontbeli függvényértékkel egyértelműen kifejezhetjük.

Például a 4. ábrán látható felvétel mellett az 1, 2, . . . , 12 számokkal jelzett csomópontokhoz tartozó értékek segítségével megadható egy olyan kétváltozós függvény, amely ezekben a pontokban éppen az adott értéket veszi fel.

A konkrét megoldás 12 együttható megkeresését jelenti. A vázolt esetben a következő alakú függvény mondható kedvezőnek

$$f(x,y) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + Dy^3 + Ey^2 + Fy + Gx^3y + Hxy^3 + Jx^2y + Kxy^2 + Lxy + M, \quad (1)$$

mert akkor a 12 ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer, melyből az  $A, B, C, \dots, M$  együtthatók számíthatók, felbontható olyan egyenletrendszerekre, melyekben legfeljebb három ismeretlen van. Kifejezve az együtthatókat a csomópontokhoz tartozó függvényértékekkel, a keresett függvény

$$\begin{aligned} f(x,y) = & \frac{-f_1 + 3f_4 - 3f_8 + f_{11}}{6a^3} x^3 + \frac{f_1 - 2f_4 + f_8}{2a^2} x^2 + \\ & + \frac{-2f_1 - 3f_4 + 6f_8 - f_{11}}{6a} x + \frac{-f_1 + 3f_4 - 3f_5 + f_6}{6b^3} y^3 + \\ & + \frac{f_3 - 2f_4 + f_5}{2b^2} y^2 + \frac{-2f_3 - 3f_4 + 6f_5 - f_6}{6b} y + \\ & + \frac{f_1 - f_2 - 3f_4 + 3f_5 + 3f_8 - 3f_9 - f_{11} + f_{12}}{6a^3b} x^3y + \\ & + \frac{f_3 - 3f_4 + 3f_5 - f_6 - f_7 + 3f_8 - 3f_9 + f_{10}}{6ab^3} xy^3 + \\ & + \frac{-f_1 + f_2 + 2f_4 - 2f_5 - f_8 + f_9}{2a^2b} x^2y + \\ & + \frac{-f_3 + 2f_4 - f_5 + f_7 - 2f_8 + f_9}{2ab^2} xy^2 + \\ & + \frac{2f_1 - 2f_2 + 2f_3 - 3f_5 + f_6 - 2f_7 - 3f_8 + 6f_9 - f_{10} + f_{11} - f_{12}}{6ab} xy + f_4 \end{aligned} \quad (2)$$



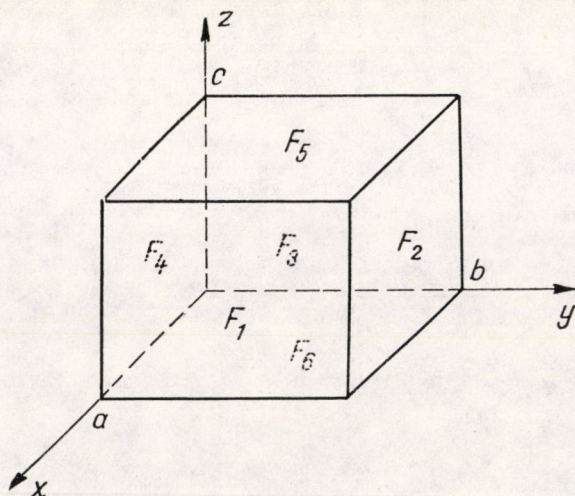
A 4. ábrán látható esetben az egyensúlyi egyenletekben szereplő integrálok a következő operátorok segítségével számíthatók:

$$\int_{(F)} f(x, y) dx dy = \frac{ab}{48} \begin{array}{|c|c|} \hline -1 & -1 \\ \hline -1 & 14 & 14 & -1 \\ \hline -1 & 14 & 14 & -1 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline \end{array} f(x, y) \quad (3)$$

$$\int_{(F)} xf(x, y) dx dy = \frac{a^2 b}{720} \begin{array}{|c|c|} \hline -7 & -7 \\ \hline -5 & 71 & 71 & -5 \\ \hline -10 & 139 & 139 & -10 \\ \hline -8 & -8 \\ \hline \end{array} f(x, y) \quad (4)$$

$$\int_{(F)} yf(x, y) dx dy = \frac{ab^2}{720} \begin{array}{|c|c|} \hline -5 & -10 \\ \hline -7 & 71 & 139 & -8 \\ \hline -7 & 71 & 139 & -8 \\ \hline -5 & -10 \\ \hline \end{array} f(x, y) \quad (5)$$

Tekintsük az 5. ábrán látható elemet. Például az  $x$  tengellyel párhuzamos erők egyensúlyát a



5. ábra



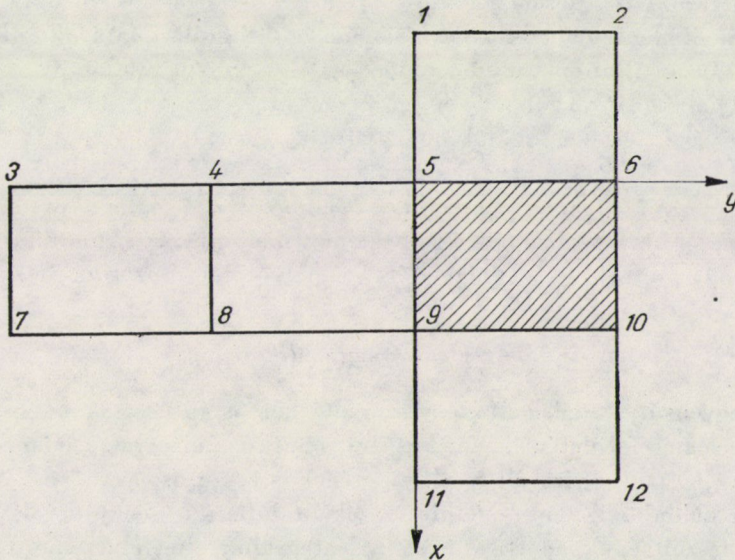
$$\int_{(F_1)} \sigma_x(a, y, z) dy dz - \int_{(F_2)} \sigma_x(o, y, z) dy dz + \int_{(F_2)} \tau_{yx}(x, b, z) dx dz - \\ - \int_{(F_4)} \tau_{yx}(x, o, z) dx dz + \int_{(F_4)} \tau_{zx}(x, y, c) dx dy - \int_{(F_4)} \tau_{zx}(x, y, o) dx dy + X = 0, \quad (6)$$

az  $x$  tengelyre vonatkozó nyomatékok egyensúlyát pedig a

$$- \int_{(F_1)} z \tau_{xy}(a, y, z) dy dz + \int_{(F_1)} y \tau_{xz}(a, y, z) dy dz + b \int_{(F_2)} \tau_{yz}(x, b, z) dx dz - \\ - \int_{(F_2)} z \sigma_y(x, b, z) dx dz + \int_{(F_2)} z \tau_{xy}(o, y, z) dy dz - \int_{(F_2)} y \tau_{xz}(o, y, z) dy dz + \\ + \int_{(F_4)} z \sigma_y(x, o, z) dx dz + \int_{(F_4)} y \sigma_z(x, y, c) dx dy - c \int_{(F_4)} \tau_{zy}(x, y, c) dx dy - \\ - \int_{(F_4)} y \sigma_z(x, y, o) dx dy + M_x = 0 \quad (7)$$

egyenlet fejezi ki, ahol  $X$  a tömegerők  $x$  tengellyel párhuzamos összetevője,  $M_x$  pedig a tömegerők  $x$  tengelyre vonatkozó nyomatéka. Az  $y$  és  $z$  tengelyekkel párhuzamos erők, valamint az  $y$  és  $z$  tengelyre vonatkozó nyomatékok egyensúlyát kifejező egyenletek hasonló módon írhatók fel.

A (6) és (7) képletekben a kettős integrálokat a (3), (4), (5) képletek alapján az adott pontbeli függvényértékekkel kifejezve, látható, hogy az egyensúlyi egyenletek a belső téglatestekre meglehetősen egyszerűen írhatók fel.



6. ábra



Ha a vizsgálandó test maga is téglatest (vagy ilyenekből összetett), akkor a teljes felbontás elvégezhető úgy, hogy minden elem egybevágó legyen. Ekkor a felülettel érintkező elemek metszeteire is levezethetők az előzőkhöz hasonló kifejezések. A szélső téglalapokra vonatkozó kettős integrálok számításához a szereplő pontokat a 6. ábrán látható módon célszerű felvenni.

### 3.2. Az elemek második típusa

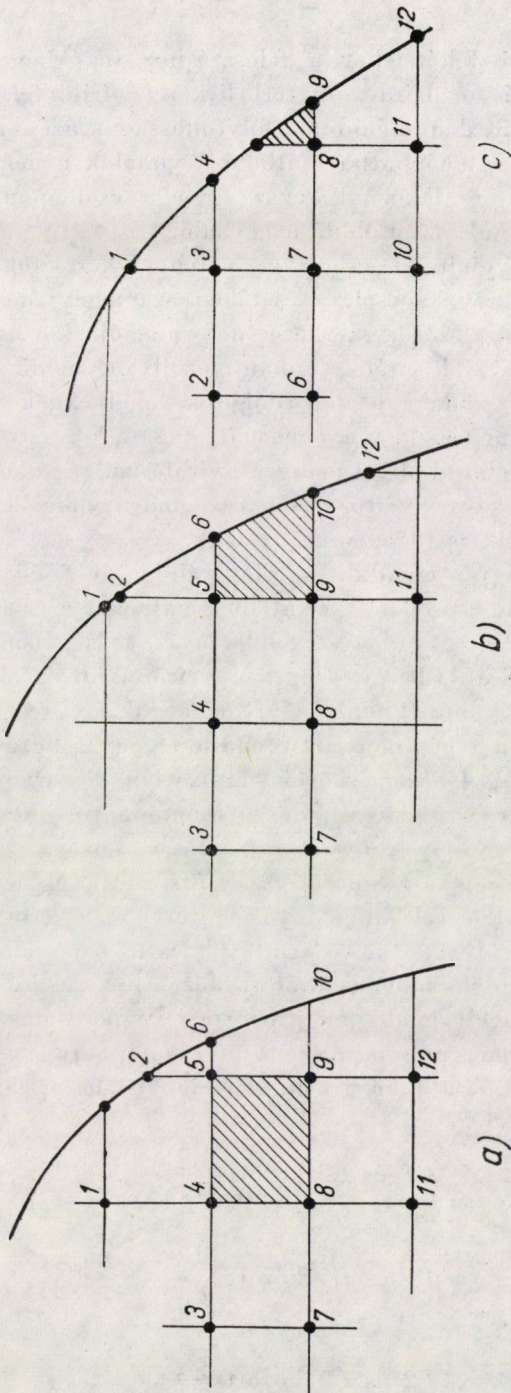
Bonyolultabb a helyzet azoknál az elemeknél, melyek határoló felületei között a vizsgált testet határoló felület is szerepel. Lényegében ide sorolhatók azok a téglatestek is, amelyek ilyenekkel szomszédosak. Ebben a részben csak a síkmetszetekre vonatkozó kettős integrálok számításával foglalkozunk.

A számítás menetét megint csak egyetlen síkmetszetre részletezzük. Ilyen metszeteket mutat a 7. ábra. Az *a)* ábra különösen hasonlít az előbb tárgyalt esetre, mégsem azonos vele, mert bár elvileg ugyanúgy járunk el, mint előbb, az  $f(x,y)$  függvényt esetenként újra és újra fel kell írni, az együtthatók értékét ki kell számítani, mert az integrálok értékét az együtthatókon keresztül a 2, 6 és 10 jelű pontok koordinátái is befolyásolják. Tekintettel azonban arra, hogy ezek adottak, az integrálok értékeinek a kifejezésében csak a csomópontokhoz tartozó feszültségek szerepelnek ismeretlenként. A különbség az *a)* esethez viszonyítva csupán annyi, hogy amíg az egyenletes osztás esetére az operátorok általános érvénnyel adottak, ill. magasabb fokú polinommal való közelítés esetére is hasonlóképpen megadhatók, addig más esetekre az operátorok elemeit minden egyes felület- ill. vonalelemre ki kell számítani. Nehézséget azonban ez sem jelent, mert ezek számítása is automatizálható. Az *a)* ábrának megfelelő esetekben azonban az integrálási határok éppen olyan egyszerűek, azaz állandók, mint az előző típus esetében. Abban a tekintetben, hogy az (1) alakú  $f(x,y)$  függvény együtthatóit esetenként ki kell számítani, a 7. ábrán vázolt példák mind megegyeznek. Ezért is foglalhatók össze egy csoportba.

A *b)* és *c)* változat csak annyiban különbözik *a)*-tól, hogy ott az integrálási tartomány nem téglalap. A 7. ábrákon a melléjük írt számokkal a számításba bevont pontoknak egy-egy célszerű felvételét mutatjuk be.

### 3.3. Az elemek harmadik típusa

Az egyensúlyi egyenletekben szereplő kettős integrálok harmadik csoportját az elemek felületének azon részére vonatkozó integrálok jelentik, amely felületrész egyúttal a vizsgált test felületének is része. Ez az előző két típustól lényegesen különbözik, mert e felületrészek általában nem síkidomok, és midőn a felületi feszültségek adottak, ezek az integrálok elméletileg pontosan számíthatók.



7. ábra

#### 4. Folytonossági egyenletek

A folytonossági feltételeket a felosztáshoz (az elemekre bontáshoz) használt síkok metszésvonalaira mint térbeli keretre írjuk fel. Ezek a vonalak a feszültségek hatására deformálódnak, folytonosságuk azonban változatlanul fennmarad. A közös csomópontba csatlakozó vonalak a deformáció után is közös csomópontban csatlakoznak, azaz egy-egy csomóponthoz csatlakozó vonalak e végpontjának az eltolódása egyenlő.

Egy kicsit bonyolultabb a helyzet a tengelykeresztek elfordulásával.

Rudak sarokmrev kapcsolata esetében a tengelyvonalak csomópontbeli érintői által bezárt szög a szerkezet deformációja közben is változatlan marad. Jelen vizsgálataink során azonban nem ilyen valódi, külön szerkezeti elemként jelentkező rudakkal van dolgunk, melyeknek keresztmetszete tovább bontható elemi részekre, hanem már maga a keresztmetszet a tovább oszthatatlan elemi metszet. Mivel pedig a nyírófeszültség okozta deformációt sem hanyagoljuk el, az alakváltozás számításánál a vonalak csatlakozásánál létrejövő szögváltozást is figyelembe vesszük.

Szemléletesen úgy is mondhatjuk, hogy amíg két valódi rúd sarokmrev kapcsolata esetén tengelyvonalaik érintőinek hajlásszöge a deformáció során változatlan marad, addig egy test felületén és belsejében felvett hálózat csomópontbeli érintői által bezárt szögek a nyírófeszültség okozta alakváltozás következtében kis mértékben megváltozhatnak.

A továbbiakban tehát nem azt mondjuk, hogy a közös csomópontban csatlakozó vonalak által bezárt szögek változatlanok maradnak, hanem azt, hogy a közöttük létrejövő szögtorzulás a csomópontbeli feszültségekkel kifejezhető.

Ha a vonalak egymásra merőlegesek (8. ábra), akkor a szögtorzulás egyedül a nyírófeszültséggel kifejezhető. Feltételezés szerint a feszültségek folytonos függvények, tehát a közös érintővel csatlakozó vonalak között nincs szögtorzulás, azaz a deformálódás után is közös lesz az érintőjük. Így pl. a 8. ábra C1 és C3 tengelyvonalainak C pontbeli végpontjához tartozó érintők azonosak az alakváltozás után is. Viszont a C csomóponthoz csatlakozó C1, C2, C5 vonalak C pontbeli érintői között már létrejöhet szögtorzulás. Ezek értékei:

$$C1 \text{ és } C2 \text{ között } \frac{1}{G} \tau_{xy},$$

$$C1 \text{ és } C5 \text{ között } \frac{1}{G} \tau_{xz},$$

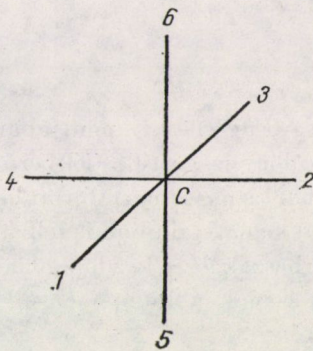
$$C2 \text{ és } C5 \text{ között } \frac{1}{G} \tau_{yz},$$



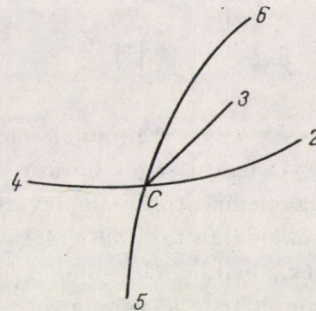
A testet határoló felület mentén a hálózat általában már nem lesz ilyen szabályos. Ilyen csomópontot szemléltet a 9. ábra. A C2 és C4, ill. a C5 és C6 vonalak C pontbeli érintője azonos, ezért ezek között szögtorzulás nem lesz. A C2 és C3, a C2 és C6 vagy a C3 és C6 vonalak közötti szögtorzulások pedig a *Függelék 2.* pontjában található képlet alapján számíthatók. Például a C2 és C3 vonalak C pontbeli érintőinek szögváltozása

$$\gamma_{2,3} = (2\varepsilon_n - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \operatorname{tg} \alpha_{2,3},$$

ahol  $\varepsilon_2$  és  $\varepsilon_3$  a fajlagos nyúlás a C2, ill. C3 érintőjének irányában,  $\varepsilon_n$  pedig ezek szögfelezőjére merőleges irányban, míg  $\alpha_{2,3}$  az érintők által bezárt szög fele.



8. ábra



9. ábra

A teljes alakváltozás ismeretéhez csupán a vonalszakaszok alakváltozásának az ismerete szükséges.

Mintogy a módszer ismertetéséhez azt az esetet választottuk, midőn az elemeket kimetsző felületek síkok, vizsgálatainkat síkbeli vonalakra korlátozhatjuk. A következőkben ezekkel kapcsolatban azokra az esetekre írjuk fel a képleteket, melyek az  $(y, z)$  koordinátasíkkal párhuzamos síkban vannak.

A koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesek alakváltozásának a számítása egyszerűbb, ezért azt ismertetjük először, és majd csak ez után az általános esetet képviselő görbe vonal (sík görbe) deformációját.

Például a  $z$  tengellyel párhuzamos vonal  $j$  kezdőpontja elmozdulásának ismeretében  $k$  végpontja elmozdulásának összetevői a következő képletek alapján számíthatók:

$$\Delta x_k = \Delta x_j + (z_k - z_j) \Delta \varphi_{y,j} + \int_{(j,k)} (z_k - z) \left[ \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_z - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y) \right] dz,$$

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= \Delta y_j - (z_k - z_j) \Delta \varphi_{x,j} + \\ &+ \int_{(l,k)} (z_k - z) \left[ \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_z - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y) \right] dz, \\ \Delta z_k &= \Delta z_j + \frac{1}{E} \int_{(l,k)} (\sigma_z - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y) dz, \\ \Delta \varphi_{x,k} &= \Delta \varphi_{x,j} + \frac{1}{G} (\tau_{yz,j} - \tau_{yz,k}) + \frac{1}{E} \int_{(l,k)} \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_z - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y) dz, \\ \Delta \varphi_{y,k} &= \Delta \varphi_{y,j} + \frac{1}{G} (\tau_{xz,k} - \tau_{xz,j}) - \frac{1}{E} \int_{(l,k)} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_z - \nu \sigma_x - \nu \sigma_y) dz, \\ \Delta \varphi_{z,k} &= \Delta \varphi_{z,j} + \frac{1}{2G} \int_{(l,k)} \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) dz, \end{aligned}$$

A kifejezések egyes tagjainak elemzése a *Függelék* 1. pontjában található, ahol az egyes feszültségek hatását külön-külön vizsgáltuk. Célszerűnek látszott e képletek elemi úton való levezetése, bár azok ismert formulák, mint pl. [3] 17–18. oldalán található (4.16)–(4.20) képlete alapján is felírhatók.

Az  $(y, z)$  síkbeli  $l_{j,k}$  módon jelölt görbeszakasz  $j$  kezdőpontja elmozdulásának ismeretében  $k$  végpontja elmozdulásának a komponensei a görbületi sugárral osztott tagok elhanyagolása esetén:

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= \Delta x_j + (z_k - z_j) \Delta \varphi_{y,j} - (y_k - y_j) \Delta \varphi_{z,j} + \\ &+ \int_{(l,k)} \left\{ \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_t - \nu \sigma_x - \nu \sigma_n) [(y_k - y) \cos(n, z) - (z_k - z) \cos(n, y)] + \right. \\ &+ \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{tx}}{\partial s} [(y_k - y) \cos(t, y) + (z_k - z) \cos(t, z)] + \\ &\left. + \frac{1}{2G} \left( \frac{\partial \tau_{tn}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{tx}}{\partial n} \right) [(z_k - z) \cos(t, y) - (y_k - y) \cos(t, z)] \right\} ds, \\ \Delta y_k &= \Delta y_j - (z_k - z_j) \Delta \varphi_{x,j} + \int_{(l,k)} \left[ \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{tn}}{\partial s} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial n} (\sigma_t - \nu \sigma_x - \nu \sigma_n) \right] (z_k - z) ds, \\ \Delta z_k &= \Delta z_j + (y_k - y_j) \Delta \varphi_{x,j} + \int_{(l,k)} \left[ \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial n} (\sigma_t - \nu \sigma_x - \nu \sigma_n) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{G} \frac{\partial \tau_{tn}}{\partial s} \right] (y_k - y) ds, \end{aligned}$$



$$\Delta\varphi_{x,k} = \Delta\varphi_{x,j} + \frac{1}{G} (\tau_{tn,j} - \tau_{tn,k}) + \frac{1}{E} \int_{(l,k)} \frac{\partial}{\partial n} (\sigma_t - \nu\sigma_x - \nu\sigma_n) ds,$$

$$\Delta\varphi_{y,k} = \Delta\varphi_{y,j} + \int_{(l,k)} \left[ \frac{1}{2G} \left( \frac{\partial\tau_{tn}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{tx}}{\partial n} \right) \cos(t, y) - \right. \\ \left. - \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_t - \nu\sigma_x - \nu\sigma_n) \cos(n, y) \right] ds,$$

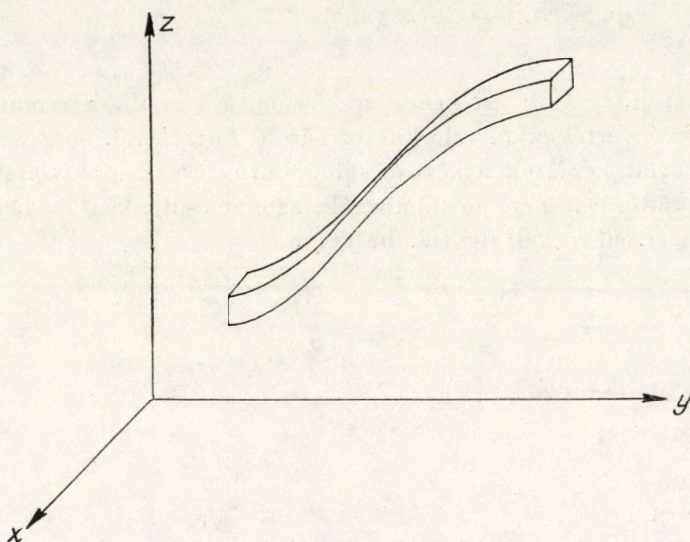
$$\Delta\varphi_{z,k} = \Delta\varphi_{z,j} + \int_{(l,k)} \left[ \frac{1}{2G} \left( \frac{\partial\tau_{tn}}{\partial x} - \frac{\partial\tau_{tx}}{\partial n} \right) \cos(t, z) - \right. \\ \left. - \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_t - \nu\sigma_x - \nu\sigma_n) \cos(n, z) \right] ds.$$

A határozott integrálok értékének a kiszámítására, ill. a csomópontokhoz tartozó függvényértékekkel való kifejezésére a *Függelék 3.* pontja ad tájékoztatást. A közölt képletek a közös csomópontba csatlakozó vonalak közötti szögek megváltozását nem tartalmazzák, azokat esetenként, a helyi sajátosságoknak megfelelően kell figyelembe venni.

## FÜGGELÉK

## 1. Kontinuumbeli vonal deformációja

Tekintsük a vonalat mint a kontinumból kimetszett rudat, melyet két párhuzamos sík és ezekre merőleges két hengerfelület határol, midőn e síkok, ill. felületek egymástól való távolsága zérushoz tart (F-1. ábra). Vizsgáljuk először is ennek egy  $l$  hosszúságú elemét, melyet a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben úgy helyezünk el, hogy oldallapjai a koordinátasíkokkal legyenek párhuzamosak (F-2. ábra).



F-1. ábra

Számításaink során feltételezzük, hogy a feszültségeknek az alakváltozásra gyakorolt együttes hatása az egyes feszültségek hatásának az összegével egyenlő, ezért a feszültségek hatását külön-külön vizsgáljuk.

## a) A húzó- és nyomófeszültség hatása

A rugalmasságtanból ismert,\* hogy

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y),$$

\* Lásd pl. [1] 7. oldalán.

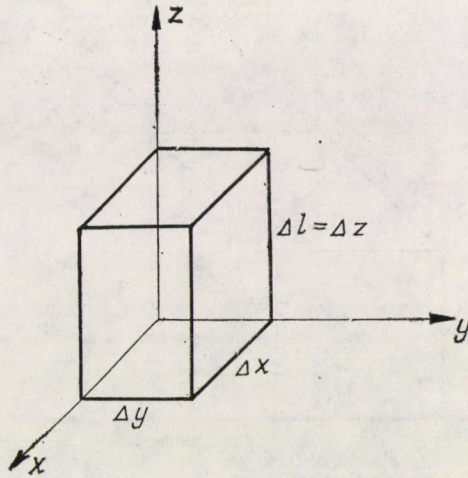


ezért az  $(l_{j,k})$  hosszúságú,  $z$  tengellyel párhuzamos vonal  $(k)$  végpontjának  $w$  eltolódása (F-3. ábra)

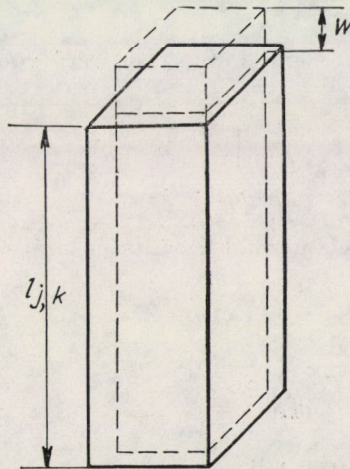
$$w = \frac{1}{E} \int_{(l_{j,k})} (\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) dz.$$

b) A húzó- és nyomófeszültségnek a vonalra merőleges irányú változása

Ha a feszültségek csak az  $x$  irányban változnak, akkor az F-4. ábra alapján írhatjuk, hogy



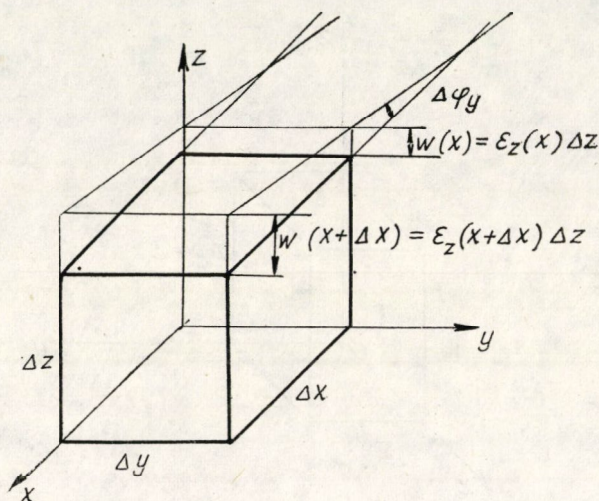
F-2. ábra



F-3. ábra



$$\begin{aligned} \Delta\varphi_y &= -\frac{\varepsilon_z(x+\Delta x) - \varepsilon_z(x)}{\Delta x} \Delta z = \\ &= -\frac{1}{E} \left[ \frac{\sigma_z(x+\Delta x) - \nu\sigma_x(x+\Delta x) - \nu\sigma_y(x+\Delta x)}{\Delta x} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma_z(x) - \nu\sigma_x(x) - \nu\sigma_y(x)}{\Delta x} \right] \Delta z = -\frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) \Delta z, \end{aligned}$$



F-4. ábra

tehát az  $l_{j,k}$  hosszúságú, elemi keresztmetszetű rúd véglapjának elfordulása

$$\varphi_y = -\frac{1}{E} \int_{(l,j,k)} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) dz,$$

a vonal ( $k$ ) végpontjának a normál feszültségek változása következtében létrejövő eltolódása pedig:

$$u_k = -\frac{1}{E} \int_{(l,j,k)} \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) (z_k - z) dz.$$

Felépítésüket tekintve teljesen azonosak az  $y$  irányú változásra vonatkozó képletek is. Különbség csak az indexekben és az előjelben van.

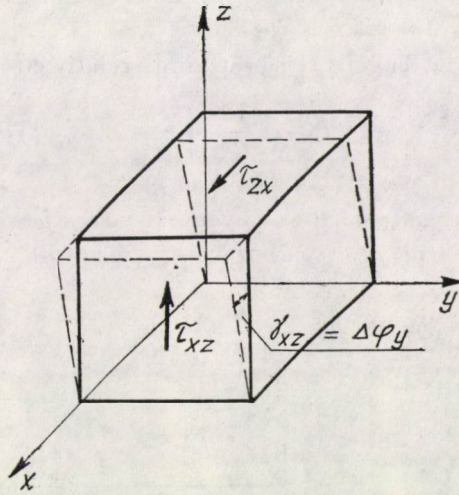


c) *A nyírőfeszültség hatása*

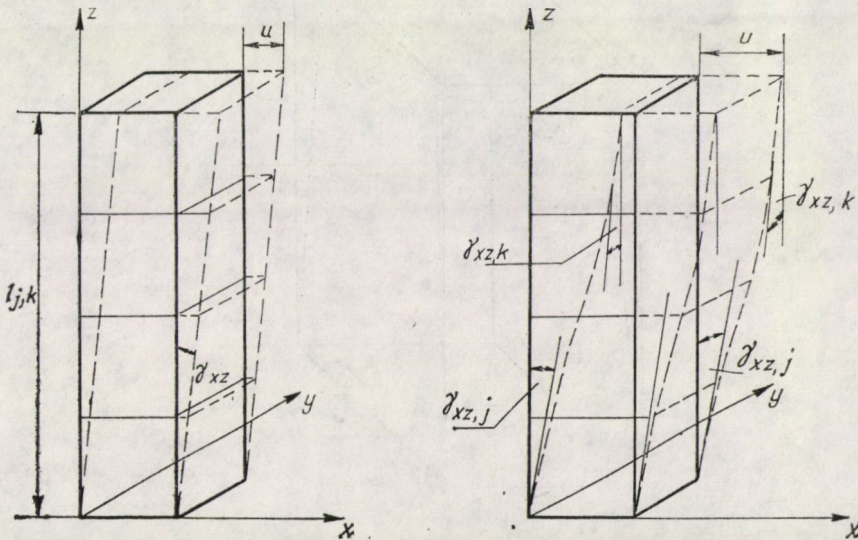
A rugalmasságtanból ismert az az összefüggés is, mely szerint pl. a  $\tau_{xz}$  nyírőfeszültség hatására létrejövő szögtorzulás (F-5. ábra):

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}.$$

Amint az az F-6/a. ábrán is látható, a nyírőfeszültség okozta érintőelfordulás nagysága nem függ a vonal hosszától, hanem csupán a nyírőfeszültség nagy-



F-5. ábra



F-6. ábra



ságától. Ha a nyírófeszültség az egyenes vonal teljes hosszában állandó, akkor a végpontok relatív eltolódásának  $x$  irányú komponense

$$u = \frac{1}{G} \tau_{zx} l_{j,k}.$$

Ha viszont a nyírófeszültség a vonal mentén változik, akkor érintőjének elfordulása minden pontban az ott keletkező nyírófeszültséggel arányos (F-6/b. ábra), ezért

$$\gamma_{zx,k} - \gamma_{zx,j} = \frac{1}{G} (\tau_{zx,k} - \tau_{zx,j}).$$

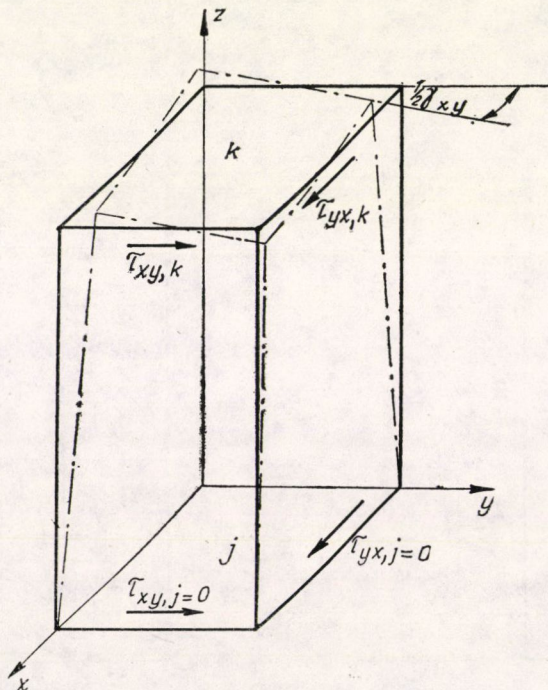
A végpontoknak az  $x$  tengellyel párhuzamos relatív eltolódása

$$u = \frac{1}{G} \tau_{zx,j} l_{j,k} + \frac{1}{G} \int_{(j,k)} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} (z_k - z) dz.$$

A  $\tau_{xy}$  nyírófeszültség változásának következtében a  $j$  és  $k$  végpontokhoz rendelt, eredetileg az  $y$  tengellyel párhuzamos egyenesek

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2G} (\tau_{xy,k} - \tau_{xy,j})$$

szöveget zárnak be (F-7. ábra).



F-7. ábra



## d) A nyírőfeszítésnek a vonalra merőleges változása

A  $\tau_{zx}$  nyírőfeszítés  $y$  irányú és a  $\tau_{yz}$  feszítés  $x$  irányú változása  $z$  tengely körüli elcsavarodást eredményez. A  $\tau_{yz}$  nyírőfeszítésnek az  $x$  tengely irányában bekövetkező változása a  $\Delta z$  magasságú hasáb  $\Delta x$  koordinátájú felső csúcspontjának

$$\Delta v = \frac{1}{2G} [\tau_{yz}(\Delta x) - \tau_{yz}(0)] \Delta z$$

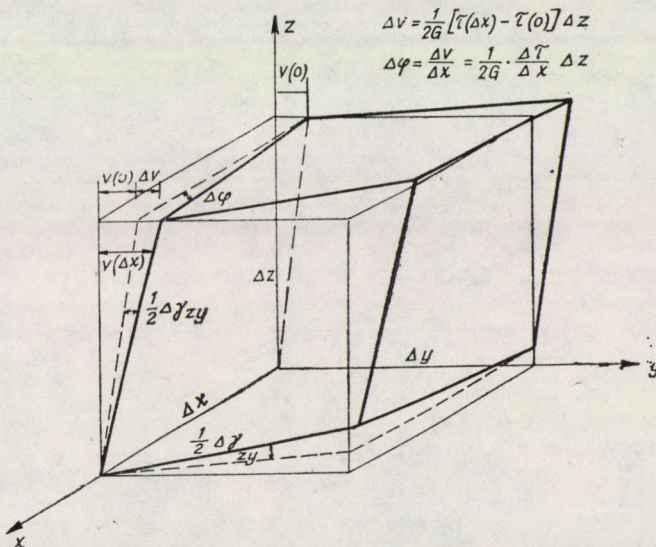
$y$  irányú további eltolódását hozza létre (F-8. ábra). Tehát a  $\tau_{zy}$  nyírőfeszítés  $x$  irányú változásából keletkező  $z$  tengely körüli elcsavarodás fajlagos értéke

$$\varphi_{z0} = \frac{1}{2G} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}$$

Hasonlóképpen határozható meg az  $y$  irányú változás hatása. Így az  $x$  és  $y$  irányú változások  $l_{j,k}$  hosszon együtt a

$$\varphi_z = \frac{1}{2G} \int_{(l,j,k)} \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} \right) dz$$

elcsavarodást idézik elő.



F-8. ábra



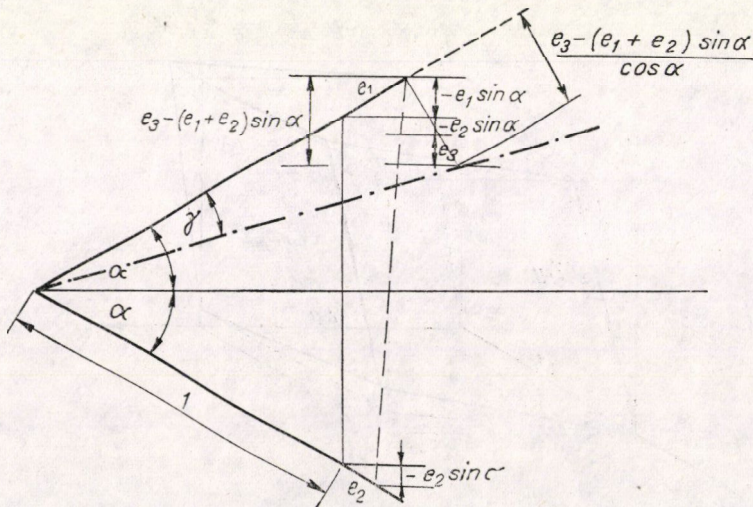
## 2. Koncentrált szögtorzulás

Az elemi szilárdságtanban a nyírófeszültségnek az alakváltozásra gyakorolt hatását el szokták hanyagolni. Ez azt jelenti, hogy a hálózati vonalak között létrejövő koncentrált szögtorzulást is elhanyagolják. Ha azonban a nyírófeszültségnek az alakváltozásra gyakorolt hatását is figyelembe vesszük, akkor a vonalak csatlakozásánál létrejövő koncentrált szögtorzulást is számításba kell vennünk. Merőleges csatlakozás esetén ez éppen a nyírófeszültségből adódó  $\gamma = \tau/G$  értékkel egyenlő, egyébként pedig a következőképpen határozható meg.

A testből olyan hasábot metszünk ki, melynek a vizsgált metszetbe eső lapja rombusz. A rombusz két oldala a hálózat két vonalával párhuzamos. Legyen a rombusz éle egységnyi hosszúságú, akkor ezek  $e_1$  és  $e_2$  megnyúlás a velük párhuzamos fajlagos nyúlással egyenlő, azaz  $e_1 = \varepsilon_1$  és  $e_2 = \varepsilon_2$ . A rombusz átlójának megnyúlása pedig  $e_3 = 2\varepsilon_3 \sin \alpha$ , ahol  $\alpha$  az 1 és 2 irányok által bezárt szög fele. Az F-9. ábra alapján könnyen belátható, hogy az 1 és 2 jelű vonalak vizsgált pontbeli érintőinek szögváltozása

$$\gamma = \frac{e_3 - (e_1 + e_2) \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2\varepsilon_3 \sin \alpha - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sin \alpha}{\cos \alpha} = (2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \tan \alpha.$$

Az  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  fajlagos nyúlásokat az adott irányokkal párhuzamos és rájuk merőleges feszültségekkel éppen úgy kifejezhetjük, mint pl. az [1] 223. oldalán



F-9. ábra



található

$$\varepsilon_n = \varepsilon_x \cos^2(n, x) + \varepsilon_y \cos^2(n, y) + \varepsilon_z \cos^2(n, z) + \gamma_{xy} \cos(n, x) \cdot \cos(n, y) + \\ + \gamma_{xz} \cos(n, x) \cdot \cos(n, z) + \gamma_{yz} \cos(n, y) \cdot \cos(n, z)$$

képlet alapján az  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  fajlagos nyúlásokkal és  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  és  $\gamma_{yz}$  szögváltozókkal. A további átalakítás során az első esetben a párhuzamos és merőleges irányokhoz tartozó feszültségeket, utóbbiban pedig a fajlagos nyúlásokat és szögváltozásokat fejezzük ki a  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  és  $\tau_{yz}$  feszültségekkel.

### 3. Többváltozós függvény adott irány szerinti deriváltjával képzett függvény ívhossz szerinti integráljának numerikus kiszámítása

Az az eset, midőn az a vonal, amelynek mentén az integrálás történik, valamelyik koordinátatengellyel párhuzamos, olyan mértékben egyszerűbb az általános esetnél, hogy érdemes külön tárgyalni és a szempontunkból általános esetet csak ezt követően elemezni. Azokra a koordinátatengelyekkel párhuzamos szakaszokra, melyeknek környezetében a számításba bevont pontok szabályos elrendezésűek, a határozott integrált a környező pontokhoz tartozó függvényértékekkel kifejező képlet általánosságban megadható, tehát ezeknél az integrálás esetenkénti végrehajtására nincs szükség. Ezzel szemben az általános esetben a vonalszakaszokra vonatkozó integrálokat, sőt a görbének az ívhossz függvényében való felírását is esetenként el kell végezni.

#### a) A koordinátatengellyel párhuzamos egyenes esete

Vizsgálataink alapjául válasszuk azt az esetet, midőn az egyenes a  $z$  tengellyel párhuzamos. A függvényt, melynek deriváltjai az integrálban szerepelnek, jelöljük  $\sigma$ -val. Meghatározandók a következő integrálok értékei:

$$\int_{(l_i, k)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dz, \\ \int_{(l_i, k)} (a - z) \frac{\partial \sigma}{\partial x} dz, \quad (x = x, y) \\ \int_{(l_i, k)} (a - z) \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz.$$

Célunk tulajdonképpen az, hogy a határozott integrálok értékét a csomópontokhoz tartozó függvényértékek segítségével fejezzük ki. Mivel a függvényeket nem ismerjük, azokat polinommal közelítjük. Ezeket a polinomokat a csomó-

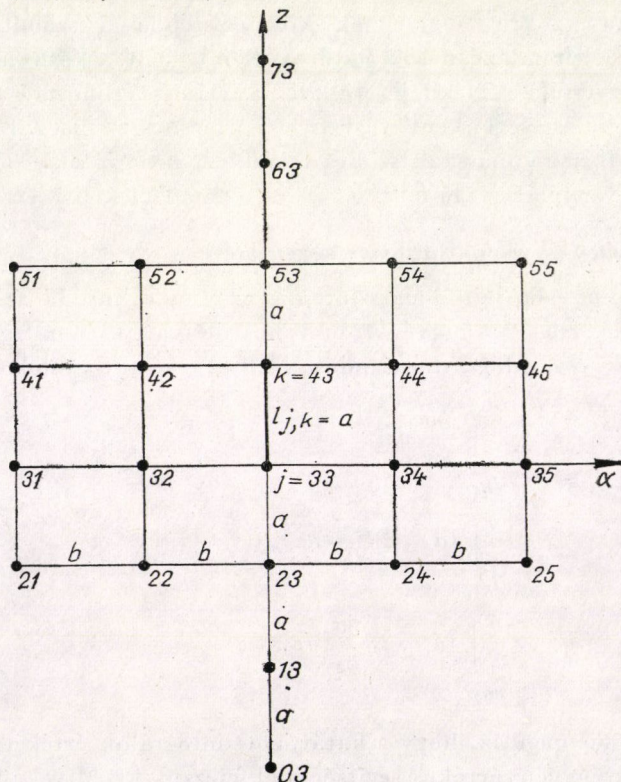


pontokhoz tartozó függvényértékek határozzák meg. Elvileg a közelítő polinomok fokszáma tetszőleges, a következőkben azonban vizsgálatainkat arra a konkrét esetre mutatjuk be, midőn az integrandusban szereplő közelítő polinomok harmadfokúak. A differenciálhányados közelítéséhez pedig negyedfokú polinomot használunk.

A derivált függvényt tartalmazó integráloknak a környező csomópontbeli függvényértékekkel való kifejezésénél úgy járunk el, hogy előbb a differenciálhányados értékét írjuk fel a szükséges négy pontban (harmadfokú polinommal való közelítéskor), majd ezeket beírjuk az integrál értékét szolgáltatató képletekbe. Ez azt jelenti, hogy az integrandusban szereplő derivált függvényt harmadfokú polinommal közelítjük azt követően, hogy a differenciálhányadosok értékét negyedfokú polinommal való közelítésből számítottuk. Az F-10. ábra jelöléseivel

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha}\right)_{z=z_i} = \frac{1}{12b} (\sigma_{i1} - 8\sigma_{i2} + 8\sigma_{i4} - \sigma_{i5}),$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right)_{z=z_i} = \frac{1}{12a} (\sigma_{i-2,3} - 8\sigma_{i-1,3} + 8\sigma_{i+1,3} - \sigma_{i+2,3})$$



F-10. ábra



tehát a  $z$  tengellyel párhuzamos  $l_{j,k}$  szakaszra vonatkozó határozott integrálok közelítő értékét megadó operandusok:

$$\int_{(l,k)} \sigma dz = \frac{a}{24} \begin{array}{|c|} \hline -1 \\ \hline 13 \\ \hline 13 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \sigma(\alpha, z), \quad \int_{(l,k)} (a-z) \sigma dz = \frac{a^2}{360} \begin{array}{|c|} \hline -7 \\ \hline 66 \\ \hline 129 \\ \hline -8 \\ \hline \end{array} \sigma(\alpha, z),$$

$$\int_{(l,k)} \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} dz = \frac{a}{288b} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 8 & & -8 & 1 \\ \hline 13 & -104 & & 104 & -13 \\ \hline 13 & -104 & & 104 & -13 \\ \hline -1 & 8 & & -8 & 1 \\ \hline \end{array} \sigma(\alpha, z),$$

$$\int_{(l,k)} (a-z) \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} dz = \frac{a^2}{4320b} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline -7 & 56 & & -56 & 7 \\ \hline 66 & -528 & & 528 & -66 \\ \hline 129 & -1032 & & 1032 & -129 \\ \hline -8 & 64 & & -64 & 8 \\ \hline \end{array} \sigma(\alpha, z),$$

$$\int_{(l,k)} (a-z) \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz = \frac{a}{4320} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline -122 \\ \hline 399 \\ \hline 1096 \\ \hline -599 \\ \hline -966 \\ \hline 193 \\ \hline -8 \\ \hline \end{array} \sigma(\alpha, z).$$

A felírt képletek természetesen csak akkor használhatók, ha az egyenletes beosztás a szomszédos szakaszra, ill. differenciáláskor az éppen vizsgált ponttól még két-két beosztásnyira is érvényes. Ha a beosztás nem egyenletes, akkor a számítást esetenként el kell végezni. Ha viszont a beosztás egyenletes, de a vizsgált szakaszon túl további szakasz már nincs, azaz a szakasz egyik végpontja a test felületén van, akkor ezekre vonatkozólag is levezethetők az előbbiekhöz hasonló képletek. Tekintettel azonban arra, hogy ezekre csak speciális alakú testek (tégla vagy ilyenekből összetett testek) vizsgálatakor van szükség, ismertetésüktől eltekintünk. Felírásuk az előbbi ismertetés után már nem jelent elvi nehézséget.

*b) A koordinátasíkkal párhuzamos síkgörbe esete*

Általános vizsgálatainkat síkgörbékre korlátozzuk, mivel tulajdonképeni célunk elérése ennél többet nem igényel. Legyen a görbe az  $(y, z)$  koordinátasíkkal párhuzamos síkban.

Feladatunk a következő típusú integráloknak függvényértékekkel való kifejezése

$$\int_{(1)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(s) ds, \quad \int_{(1)} \frac{\partial \sigma}{\partial n} f(s) ds, \quad \int_{(1)} \frac{\partial \sigma}{\partial s} f(s) ds,$$

ahol  $n$  a görbe normálisa.

A  $\partial \sigma / \partial x$ ,  $\partial \sigma / \partial n$  és  $\partial \sigma / \partial s$  függvényeket az integráloknak a kijelölt pontokhoz tartozó értékei segítségével felírt Lagrange-polinomokkal közelítjük. A következőkben megmutatjuk, hogy ilyen módon az integrálok értékei a környező pontbeli függvényértékek lineáris kombinációjaként előállíthatók.

Tekintsük az *F-11.* ábrát. A derivált függvény  $i, j, k, m$  pontbeli értékeit jelölje  $D_i, D_j, D_k$  és  $D_m$ , akkor a derivált függvényt az  $L(s)$  Lagrange-polinommal közelítve az integrál az

$$I = \int_{(l,k)} L(s) f(s) ds = \int_{(l,k)} \left\{ \sum_{(v)} L_v(s) D_v \right\} f(s) ds = \sum_{(v)} D_v \int_{(l,k)} L_v(s) f(s) ds$$

alakban is felírható, ahol  $L_v(s)$  a  $v$ -edik Lagrange-féle alappolinom és  $v = i, j, k, m$ . Tekintettel arra, hogy az

$$\int_{(l,k)} L_v(s) f(s) ds$$

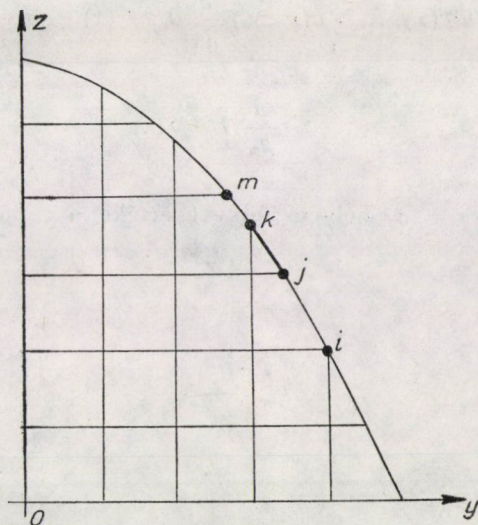
integrálok értéke csak a görbe jellemzőitől függ, a keresett ismeretleneket nem tartalmazzák, ezért a test, ill. a belőle az  $x = x_j$  síkkal kimetszett vonal ismeretében kiszámítható állandók. Jelöljük ezek értékeit  $C_v$ -vel, akkor

$$I = \sum_{(v)} C_v D_v,$$



Ezután már csak annak kimutatása van hátra, hogy a derivált függvény  $i, j, k, m$  pontbeli  $D_i, D_j, D_k, D_m$  értékei kifejezhetők a környezetben levő pontokhoz tartozó függvényértékekkel.

Az F-12. ábra egy test  $x = \text{const}, y = \text{const}$  és  $z = \text{const}$  síkok metszészvonala alkotta hálózatát mutatja három vetületével. A  $(j, k)$  szakaszt tartalmazó  $x = x_j$  metszetet vastagabb vonallal emeltük ki.



F-11. ábra

Az  $x$  szerinti differenciálhányados szempontjából a  $j$  és a  $k$  pont két különböző esetet képvisel. A  $j$  pont az  $x = x_j$  síkon kívül a  $z = z_j$  síkon is rajta van, ezért a  $j$  pontbeli differenciálhányadost a  $z = z_j$  síkbeli pontokhoz tartozó  $\sigma$  értékek segítségével fejezzük ki. Ez a  $z = z_j$  metszet látható az F-13. ábrán. E síkmetszetheli  $i_1, i_2, i_3, i_4$  pontokhoz tartozó függvényértékek segítségével felírható az  $L_{ij}^{(z_j)}(y)$  Lagrange-polinom, melynek az  $y = y_j$ -hez tartozó  $M_{ij}^{(z_j)}$  értéke előállítható a  $\sigma_{i_p}$  ( $p = 1, 2, 3, 4$ ) értékek lineáris kombinációjaként. Ugyanis

$$L_{ij}^{(z_j)}(y) = \sum_{p=1}^4 \sigma_{i_p} L_{ijp}^{(z_j)}(y),$$

ahol  $L_{ijp}^{(z_j)}(y)$  a  $p$ -edik alappolinom, melynek  $y = y_j$ -hez tartozó  $H_{ijp}$  értéke előre kiszámítható állandó, ezért

$$L_{ij}^{(z_j)}(y) = \sum_{p=1}^4 H_{ijp} \sigma_{i_p} = \tilde{\sigma}(x_i, y_j).$$

(A  $\sim$  jellel a közelítő jellegre kívántuk felhívni a figyelmet). A  $\sigma$  függvénynek az  $y = y_j$  metszete már csak  $x$  függvénye, melyet ugyancsak Lagrange-



polinommal közelítünk. A feltétel az hogy az  $(x_i, y_j)$  pontokban a  $\sigma(x_i, y_j)$ ,  $j$ -ben pedig az  $\sigma_j$  értéket vegye fel. Ez a polinom

$$L^{(z_i, y_j)}(x) = \sum_{q=1}^3 L_q^{(z_i, y_j)}(x) \tilde{\sigma}(x_q, y_j) + L_4^{(z_i, y_j)}(x) \sigma_j,$$

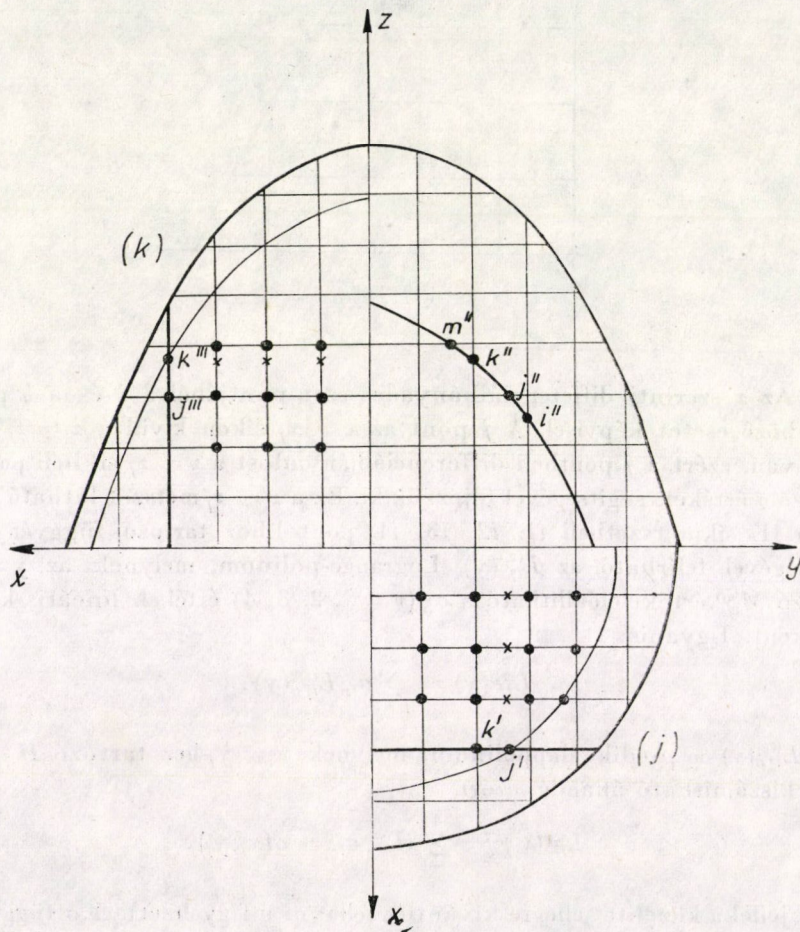
deriváltja pedig

$$\frac{d}{dx} L^{(z_i, y_j)}(x) = \sum_{q=1}^3 \tilde{\sigma}(x_q, y_j) \frac{d}{dx} L_q^{(z_i, y_j)}(x) + \sigma_j \frac{d}{dx} L_4^{(z_i, y_j)}(x).$$

A

$$\frac{d}{dx} L_q^{(z_i, y_j)}(x)$$

függvénynek az  $x = x_j$  helyen felvett értéke a hálózathálból számítható  $K_q$



F-12. ábra



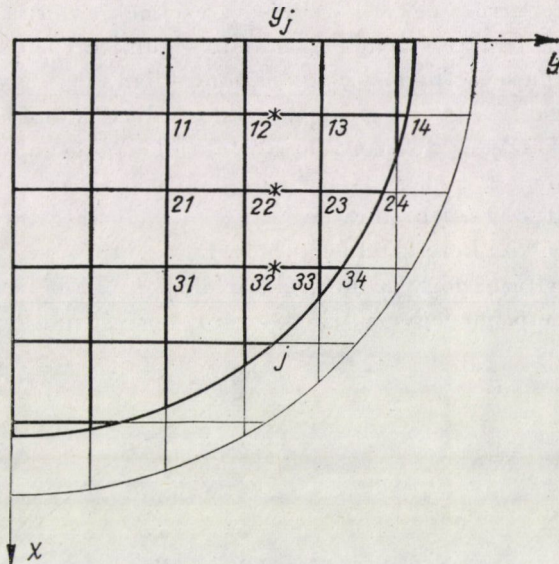
állandó, tehát

$$D_j = \left\{ \frac{d}{dx} L^{(x,y)}(x) \right\}_{x=x_j} = \sum_{q=1}^3 K_q \bar{\sigma}(x_q, y_j) + K_4 \sigma_j.$$

Végül pedig a  $\bar{\sigma}(x_q, y_j)$  értékét is a felvett pontokhoz tartozó értékekkel kifejezve

$$D_j = \sum_{q=1}^3 K_q \sum_{p=1}^4 H_{qjp} \sigma_{qp} + K_4 \sigma_j$$

adódik. Mivel pedig  $K_q$  és  $H_{qjp}$  értékei a hálózatból számítható állandók, az utolsó kifejezés azt jelenti, hogy a  $j$  pontbeli  $D_j$  differenciálhányados közelítő



F-13. ábra

értéke felírható a  $j$  pont környezetében levő csomópontokhoz tartozó függvényértékek lineáris kombinációjaként.

Hasonló módon határozhatjuk meg a  $k$  jelű pontban is az  $x$  szerinti differenciálhányados értékét azzal a különbséggel, hogy akkor nem a  $z = z_k$  síkban levő csomópontokhoz tartozó értékekkel dolgozunk (hiszen a  $k$  jelű ponton kívül ilyen csomópont általában nincs is), hanem az  $y = y_k$  síkban levőkkel.

Az elmondottak természetesen  $D_i$ -re és  $D_m$ -re is érvényesek, tehát a teljes

$$\int_{(l,k)} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(s) ds$$



felírható a környezetbeli csomópontokhoz tartozó függvényértékek lineáris kifejezéseként.

A görbe érintője, ill. normálisa irányában vett deriváltakat az ismert módon, a

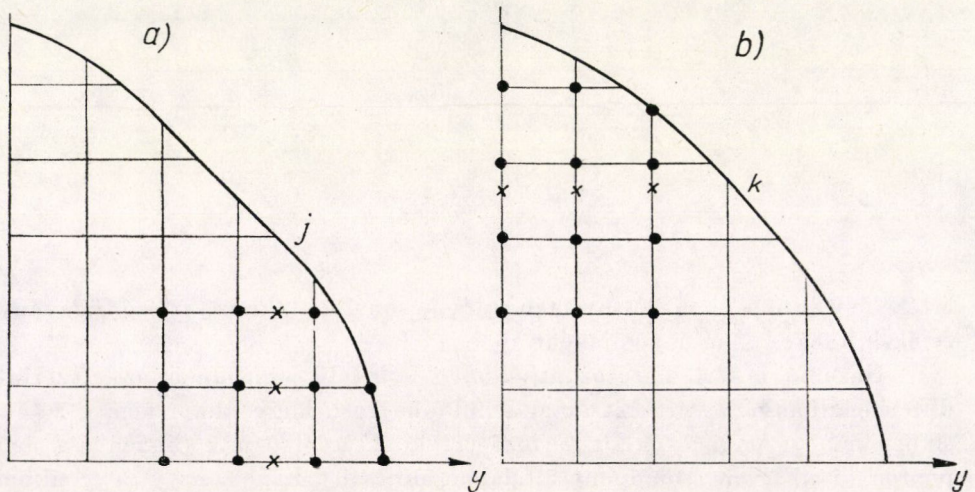
$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cos(t, y) + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \sin(t, y),$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial n} = \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \sin(n, y)$$

képletek alapján fejezzük ki az  $y$  és  $z$  szerinti deriváltakat, ahol  $t$  a görbe érintője,  $n$  pedig a normálisa.

Tekintettel arra, hogy a közelítéshez ezeknek a deriváltaknak csak bizonyos pontokban felvett értékeire van szükségünk (a példaként felvett és az *F-11.* ábrán látható esetben az  $i, j, k, m$  pontokban), egy-egy pontra vonatkozó értéknél a szögek és így szögfüggvényeik is adott állandók, tehát a további vizsgálatot csak az  $y$  és  $z$  szerinti deriváltakra kell végezni.

A  $j$  pontban a  $z$  szerinti derivált az *F-14/a.*, a  $k$  pontban pedig az  $y$  szerinti derivált az *F-14/b.* ábra ponttal jelölt helyeihez tartozó függvényértékekkel fejezhető ki a kereszttel jelölt helyek közvetítésével. A számítás menete és annak bizonyítása, hogy az integrál a jelölt pontokhoz tartozó függvényértékekkel kifejezhető, megegyezik az  $x$  szerinti deriválnál alkalmazottal.



F-14. ábra

## IRODALOM

1. TIMOSHENKO, S.—GOODIER, J. N.: *Theory of Elasticity* Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York—Toronto—London 1951
2. BÉRES E.: Calculation of Bent Shells by Means of Grid Model. *Acta Techn. Hung.* 74, 173—196
3. LURJE, A. I.: *Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie.* Akademie Verlag, Berlin 1963

**Triaxial Stress-Analysis with the Aid of the Continuum Sub-space Approach.** An approach to the triaxial stress-analysis is presented by which the equilibrium equations are directly related to the elements of finite sizes and the continuity conditions to the uniaxial sub-space of the triaxial continuum, to the network formed by the intersection lines of the subdividing surfaces. The numerical solution by approximating the functions describing the stresses by polynomials leads to a set of linear equations whose coefficients are obtained from definite integrals. In case of uniform subdivision, for writing down these integrals, operators of overall validity may be applied, therefore, there is no need to carry out the actual integration.

**Dreidimensionale Spannungsanalyse mit Hilfe des Kontinuum Unterraums.** Eine Methode der dreidimensionalen Spannungsanalyse wird beschrieben, mit deren Hilfe die Gleichgewichtsgleichungen unmittelbar auf die Elemente von endlichen Dimensionen und die Kontinuitätsbedingungen auf den eindimensionalen Unterraum des dreidimensionalen Kontinuums auf das Netz der Schnittlinien der Verteilungsflächen aufgetragen werden können. Durch Näherung der die Spannungen beschreibenden Funktionen mit Hilfe der Polynome erhält man ein System von linearen Gleichungen, deren Koeffizienten sich aus bestimmten Integralen ergeben. Bei einer gleichmäßigen Aufteilung können für deren Aufzeichnung Operatoren von allgemeiner Gültigkeit angewendet werden, weshalb man in solchen Fällen die konkreten Integrationen nicht durchführen muß.