LÖSUNGEN EINER MIT DEM DOPPELVERHÄLTNIS ZUSAMMENHÄNGENDER FUNTIONALGLEICHUNG

Herrn G. Hajós zum 50-sten Geburtstag gewidmet

von

J. ACZÉL,[1] K. FLADT[2] und M. HOSSZÚ[3]

§ 1. H. Reichenbach [5] gelangte bei seiner Einführung des relativistischen Zeitbegriffes zu der Funktionalgleichung

$$\frac{f(t+t_3)-f(t)}{f(t+t_2)-f(t)} \Bigg/ \frac{f(t+t_3)-f(t+t_1)}{f(t+t_2)-f(t+t_1)} = G(t_1, t_2, t_3) \tag{1}$$

(rechte Seite von t unabhängig). Der Symmetrie halber setzen wir

$$t = x - x_3\,, \quad t_3 = x_3 - x_1\,, \quad t_2 = x_3 - x_2\,, \quad t_1 = x_3 - x_4$$

und erhalten

$$\frac{f(x-x_1)-f(x-x_3)}{f(x-x_2)-f(x-x_3)} \Bigg/ \frac{f(x-x_1)-f(x-x_4)}{f(x-x_2)-f(x-x_4)} = F(x_1, x_2, x_3, x_4) \tag{2}$$

(rechte Seite von x unabhängig), wobei

$$G(x_3-x_4, x_3-x_2, x_3-x_1) = F(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

geschrieben wurde. — Auch umgekehrt folgt (1) aus (2) mit $x_3 = 0$, $x_1 = -t_3$, $x_2 = -t_2$, $x_4 = -t_1$, so dass (1) und (2) äquivalente Funktionalgleichungen sind.

Der in [5] zur Lösung von (1) verwendeter Gedankengang ist — wie J. von Neumann darauf hingewiesen hat — unvollständig und ergibt auch nicht alle Lösungen. Das Ziel, wofür die Lösung von (1) dort gebraucht wurde, kann übrigens auch an anderen Wegen erreicht werden ([5], [4]), die Funktionalgleichungen (1) und (2) sind aber auch sonst interessant, da sie die Invarianz des auf einer nicht unbedingt linear geeichten Skala gerechneten Doppelverhältnisses gegenüber gleichzeitiger Verschiebung der vier Koten fordert.

Wir wollen hier die Funktionalgleichung (2) unter sukzessiv reduzierten Regularitätsbedingungen lösen. — Ihre Gültigkeit wird natürlich nur dort vorausgesetzt, wo sie einen Sinn haben, (also die Nenner $f(x-x_2) - f(x-x_3)$ und $f(x-x_1) - f(x-x_4)$ nicht verschwinden), insbesondere *werden* (*auch an einer unendlichen Punktmenge mit endlichem Häufungspunkt*) *konstante Funktionen* $f(x)$ im vorherein *ausgeschlossen.*

[1] Debrecen.
[2] Calw.
[3] Miskolc.

(2) wird u. a. durch

$$f(x) = x\,, \ \text{tg}\ kx\,, \ \text{th}\ kx \tag{3}$$

erfüllt und *wenn* $f(x)$ *eine Lösung von* (2) *ist, so sind auch alle*

$$g(x) = \frac{af(x)+b}{cf(x)+d} \tag{4}$$

mit beliebigen Konstanten a, b, c, d $(ad - bc \neq 0)$ *Lösungen. — Wir wollen zeigen, dass mit* (3) *und* (4) *im wesentlichen die Lösungen erschöpft sind.*

§§ 2, 4 und 8 stammen vom ersten, §§ 1 und 3 vom zweiten, §§ 5,6 und 7 im wesentlichen vom dritten Verfasser, die Verff. haben aber die Bemerkungen von einander und von anderen Kollegen, insbes. die der Herren Z. DARÓCZY (Debrecen) und E. VINCZE (Miskolc) mehrfach verwendet.

§ 2. Wir schreiben (2) in die Gestalt

$$\frac{f(x-x_1)-f(x-x_3)}{f(x-x_2)-f(x-x_3)}\,\frac{f(x-x_2)-f(x-x_4)}{f(x-x_1)-f(x-x_4)} = F(x_1\,, x_2\,, x_3\,, x_4) \tag{5}$$

und setzen $x_1 = x_3$ ein. So sehen wir, dass

$$F(x_1\,, x_2\,, x_1\,, x_4) = 0$$

ist. Nach dieser Feststellung dividieren wir beide Seiten von (5) durch $x_3 - x_1$:

$$\begin{aligned} &\frac{f(x-x_1)-f(x-x_3)}{x_3-x_1}\,\frac{1}{f(x-x_2)-f(x-x_3)}\,\frac{f(x-x_2)-f(x-x_4)}{f(x-x_1)-f(x-x_4)} = \\ &= \frac{F(x_1, x_2, x_3, x_4)-F(x_1, x_2, x_1, x_4)}{x_3-x_1}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Wir setzen $f(x)$ *als differenzierbar voraus* (hier und im folgenden wird *Differenzierbarkeit mit Ausnahme von sich im endlichen nicht häufenden singulären Stellen* — die also höchstens *eine ins Unendliche divergierende Folge* bilden — *vorausgesetzt).* Dann hat die linke Seite von (6) bei Nähern von x_3 zu x_1 einen Grenzwert, also auch die rechte, so dass die partielle Ableitung $F'_{x_3}(x_1, x_2, x_1, x_4)$ existiert. Wir wählen etwa $x_1 = 0$ und erhalten

$$\frac{f'(x)}{f(x-x_2)-f(x)}\,\frac{f(x-x_2)-f(x-x_4)}{f(x)-f(x-x_4)} = F'_{x_3}(0, x_2, 0, x_4)\,. \tag{7}$$

Durch Einsetzen von $x_4 = x_2$ folgt hieraus wieder

$$F'_{x_3}(0, x_2, 0, x_2) = 0$$

und so folgt aus (7) durch Division mit $x_4 - x_2$

$$\begin{aligned} &\frac{f'(x)}{f(x-x_2)-f(x)}\,\frac{f(x-x_2)-f(x-x_4)}{x_4-x_2}\,\frac{1}{f(x)-f(x-x_4)} = \\ &= \frac{F'_{x_3}(0, x_2, 0, x_4)-F'_{x_3}(0, x_2, 0, x_2)}{x_4-x_2}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Wegen der Differenzierbarkeit von $f(x)$ hat die linke Seite einen Grenzwert bei $x_4 \to x_2$, also auch die rechte, so dass auch $F''_{x_3x_4}(0, x_2, 0, x_2)$ existiert und so wird aus (8)

$$-\frac{f'(x)\, f'(x-x_2)}{\big(f(x)-f(x-x_2)\big)^2} = -\, F''_{x_3x_4}(0, x_2, 0, x_2)$$

und mit $x - x_2 = y,\, h(t) = -\, F''_{x_3x_4}(0, t, 0, t)$ wird

$$\frac{f'(x)\, f'(y)}{\big(f(x)-f(y)\big)^2} = h(x-y)\,. \tag{9}$$

Aus

$$z = h(x-y)$$

folgt aber

$$z_x + z_y = 0,$$

so dass aus (9) mit

$$z = \frac{f'(x)\, f'(y)}{\big(f(x)-f(y)\big)^2}$$

sich das Bestehen von

$$\big(f(x)-f(y)\big)\big(f''(x)\,f'(y) + f'(x)\,f''(y)\big) = 2\, f'(x)\,f'(y)\,\big(f'(x)-f'(y)\big) \quad \big(f(x) \neq f(y)\big) \tag{10}$$

ergibt, falls $f(x)$ *zweimal differenzierbar ist.*

§ 3. Setzen wir in (10) einen konstanten Wert y_0 für y ein ($f'(y_0) \neq 0$: ein solches y_0 existiert, denn sonst wäre $f'(y) \equiv 0$, also $f(y)$ konstant, was ausgeschlossen wurde), so erhalten wir für $u = f(x)$ eine Gleichung der Gestalt

$$au'' + bu' + cuu' + (uu'' - 2\,u'^2) = 0\,. \tag{11}$$

Setzen wir voraus, dass $f(x)$ *fünfmal differenzierbar ist*, so ergibt dreimaliges Differenzieren und Elimination der Konstanten a, b, c (die fünfte Ableitung von u fällt heraus):

$$\begin{vmatrix} u'' & u' & uu' & uu'' - 2\,u'^2 \\ u''' & u'' & uu'' + u'^2 & uu''' - 3\,u'u'' \\ u^{\mathrm{IV}} & u''' & uu''' + 3\,u'u'' & uu^{\mathrm{IV}} - 2\,u'u''' - 3\,u''^2 \\ u^{\mathrm{V}} & u^{\mathrm{IV}} & uu^{\mathrm{IV}} + 4\,u'u''' + 3\,u''^2 & uu^{\mathrm{V}} - u'u^{\mathrm{IV}} - 8\,u''u''' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u'' & u' \\ u''' & u'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3\,u'u'' & -3\,u''^2 \\ 4\,u'u''' + 3\,u''^2 & u'u^{\mathrm{IV}} - 8\,u''u''' \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} u'' & u' \\ u^{\mathrm{IV}} & u''' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u'^2 & -u'u'' \\ 4\,u'u''' + 3\,u''^2 & u'u^{\mathrm{IV}} - 8\,u''u''' \end{vmatrix} =$$

$$= (u'^2 u^{\mathrm{IV}} - 4\,u'u''u''' + 3\,u''^3)^2 = 0$$

d.h.

$$0 = u'^2 u^{\mathrm{IV}} - 4\,u'u''u''' + 3\,u''^3 = \frac{u'^3}{2}\left(\frac{2\,u'u''' - 3\,u''^2}{u'^2}\right)'.$$

Da $u' = 0$ auf Punktmengen mit Häufungspunkt im endlichen ausgeschlossen wurde, muss (höchstens mit Ausnahme von sich im endlichen nicht häufenden singulären Stellen) der zweite Faktor verschwinden. Das Integrieren ergibt

$$\frac{2\,u'\,u''' - 3\,u''^2}{u'^2} = 4\,K \qquad \text{(konstant)}. \tag{12}$$

Man bemerkt, dass auf der linken Seite eben die sogen. *Schwarzsche Ableitung* steht.

Schreiben wir (12) in die Gestalt

$$\frac{2\,u'\,u''\,u''' - 3\,u''^2}{u'^4} = 4\,K\,\frac{u''}{u'^2}$$

und integrieren, so erhalten wir

$$\frac{u''^2}{u'^3} = -\,4\,K\,\frac{1}{u'} + C$$

d. h.

$$\left(\frac{du'}{dx}\right)^2 = C\,u'^3 - 4\,K\,u'^2 \qquad (C \neq 0)$$

($C = 0$ würde $K = 0$, $u'' = 0$, $u = ax + b$ ergeben, was in der Endformel (13) auch enthalten sein wird) und durch nochmaliges Intergrieren ($Cu' - 4K = t^{-2}$)

$$x - x_0 = \int \frac{du'}{u'\sqrt{C\,u' - 4\,K}} = -\,2\int \frac{dt}{1 + 4\,K\,t^2} =$$

$$= \begin{cases} -\,2\,t & (K = 0) \\ -\,\dfrac{1}{k}\operatorname{arc\,tg} 2\,kt & (K = k^2 > 0) \\ -\,\dfrac{1}{k}\operatorname{ar\,th} 2\,kt & (K = -\,k^2 < 0) \end{cases},$$

$$t = \begin{cases} -\,\dfrac{x - x_0}{2} \\ -\,\dfrac{1}{2\,k}\operatorname{tg} k(x - x_0) \\ -\,\dfrac{1}{2\,k}\operatorname{th} k(x - x_0) \end{cases},$$

$$u' = \frac{4K}{C} + \frac{1}{Ct^2} = \begin{cases} -\dfrac{B}{(x-x_0)^2} \\ -\dfrac{B}{\sin^2 k(x-x_0)} \\ -\dfrac{B}{\operatorname{sh}^2 k(x-x_0)} \end{cases} \quad (B \neq 0)\,.$$

Integrieren wir noch einmal, so erhalten wir schon — höchtens mit Ausnahme einer ins Unendliche divergierenden Folge von singulären Stellen — *die allgemeine (fünfmal differenzierbare) Lösung*

$$f(x) = u = \begin{cases} A + B(x-x_0)^{-1} = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ A + B \operatorname{ctg} k(x-x_0) = \dfrac{a \operatorname{tg} kx + b}{c \operatorname{tg} kx + d} \\ A + B \operatorname{cth} k(x-x_0) = \dfrac{a \operatorname{th} kx + b}{c \operatorname{th} kx + d} \end{cases} \quad (ad - bc \neq 0) \tag{13}$$

der Funktionalgleichung (2). (Natürlich bleiben diese auch an den vorher ausgeschlossenen singulären Stellen gültig — überall, wo $f(x)$ stetig ist.)

§ 4. Man kann aber (10) (oder (11)) auch *ohne Voraussetzung der Existenz von Ableitungen höherer Ordnung als der zweiten* lösen. Besonders einfach gestalten sich die Rechnungen, wenn wir in Betracht nehmen, dass zusammen mit $f(x)$ auch alle $g(x)$ von der Gestalt (4) die Funktionalgleichung (2) und damit auch (10) erfüllen:

$$\begin{aligned} &\big(g(x)-g(y)\big)\big(g''(x)\,g'(y)+g'(x)\,g''(y)\big) = \\ &= 2\,g'(x)\,g'(y)\big(g'(x)-g'(y)\big) \quad \big(g(x)\neq g(y)\big). \end{aligned} \tag{14}$$

So können die in (4) figurierenden Konstanten a, b, c, d so gewählt werden, dass $g(y_0) = 0$, $g'(y_0) = 1$, $g''(y_0) = 0$ sei. Tatsächlich wird das bei

$$a = 2f'(y_0), \quad b = -2f(y_0)f'(y_0), \quad c = f''(y_0), \quad d = 2f'(y_0)^2 - f(y_0)f''(y_0)$$

eintreffen. Hier ist

$$ad - bc = 4f'(y_0)^3 \neq 0$$

falls $f'(y_0) \neq 0$ ist, und ein solches y_0 gibt es immer, da laut Voraussetzung $f'(x) \not\equiv 0$ war. Im folgenden können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $y_0 = 0$ setzen, also gilt

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 1, \quad g''(0) = 0 \tag{15}$$

für

$$g(x) = 2f'(0)\frac{f(x)-f(0)}{f''(0)f(x) + 2f'(0)^2 - f(0)f''(0)}\,. \tag{16}$$

Setzen wir in (14) $y = 0$ ein, so erhalten wir für $u = g(x)$ die Differentialgleichung

$$uu'' = 2\,u'(u' - 1)\,, \tag{17}$$

ein bekannter Typus (x kommt äusserlich nicht vor). Division durch u^3 (für $u \neq 0$)

$$\frac{u^2 u'' - 2\,u\,u'(u' - 1)}{u^4} = 0$$

und Integration ergibt

$$\frac{u' - 1}{u^2} = K$$

d. h.

$$\frac{du}{dx} = 1 + Ku^2,$$

(was wegen (15) schon auch für $x = 0$, $u = 0$ gültig ist) und nach nochmaliger Integration (wegen $u(0) = 0$)

$$x = \int\limits_0^u \frac{du}{1 + ku^2} = \begin{cases} u & (K = 0) \\ \dfrac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} ku & (K = k^2 > 0)\,, \\ \dfrac{1}{k} \operatorname{ar\,th} ku & (K = -k^2 < 0) \end{cases}$$

$$u = g(x) = \begin{cases} x \\ \dfrac{1}{k} \operatorname{tg} kx\,. \\ \dfrac{1}{k} \operatorname{th} kx \end{cases} \tag{18}$$

Wegen (4) (oder (16)) *sind* also tatsächlich (13) *die allgemeinen (zweimal differenzierbaren) Lösungen von* (2). — Der scheinbare Widerspruch, dass in der durch (15) (scheinbar sogar über-) bestimmten Lösung (18) der Differentialgleichung zweiter Ordnung (17) noch eine beliebige Konstante k figuriert, erklärt sich dadurch, dass $u(0) = 0$ eine singuläre Stelle der rechten Seite von

$$u'' = \frac{2\,u'(u' - 1)}{u}$$

ist.

§ 5. Wenn man nun nur *die Existenz einer stetigen ersten Ableitung* von $f(x)$ voraussetzen will, so kann man von (9) ausgehen. Wieder ist es zweckmässig statt $f(x)$

$$g(x) = f(x) - f(0) \tag{19}$$

zu betrachten, die im Sinne von (4) der Funktionalgleichung (2) und damit auch der Funktionaldifferentialgleichung (9) ebenfalls genügt:

$$\frac{g'(x)\, g'(y)}{\big(g(x) - g(y)\big)^2} = h(x - y)\,, \tag{20}$$

für die aber schon

$$g(0) = 0$$

gilt. (Wäre eben 0 eine singuläre Stelle von f, so kann man einen beliebigen anderen konstanten Wert von x wählen, die bezüglichen Betrachtungen bleiben mit kleinerer Modifikation auch so gültig.) So folgt aus (20) mit $y = 0$

$$h(x) = \frac{g'(x)\, g'(0)}{g(x)^2}\,. \tag{21}$$

Ist $g'(0) = 0$, so wird $h(x) \equiv 0$ und wegen (19) und (20) $f'(x) \equiv g'(x) \equiv 0$, was ausgeschlossen war. Also ist

$$g'(0) \neq 0\,. \tag{22}$$

Aus (20) wird wegen (21)

$$g'(0)\,\frac{\big(g(x) - g(y)\big)^2}{g'(x)\, g'(y)} = \frac{g(x - y)^2}{g'(x - y)} \tag{23}$$

(ausser für die Nullstellen der Nenner). Nehmen wir die Quadratwurzel des Betrages beider Seiten, so erhalten wir

$$\frac{g(x - y)}{\sqrt{|g'(x - y)|}} = \frac{g(x)}{\sqrt{|g'(x)|}} \sqrt{\left|\frac{g'(0)}{g'(y)}\right|} - \frac{g(y)}{\sqrt{|g'(y)|}} \sqrt{\left|\frac{g'(0)}{g'(x)}\right|}\,,$$

so dass für

$$s(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{|g'(x)|}}\,, \qquad c(x) = \sqrt{\left|\frac{g'(0)}{g'(x)}\right|} \tag{24}$$

die Funktionalgleichung

$$s(x - y) = s(x)\, c(y) - s(y)\, c(x)$$

besteht. Die (in einem Punkte) stetigen Lösungen dieser Gleichung sind aber (vgl. etwa [8] und [1] Nr. 3.2.3.) ausser $s(x) \equiv 0$ (was wegen (19) und (24) ausgeschlossen ist)

$$\begin{aligned} s(x) &= Bx\,, & c(x) &= cx + 1 \\ s(x) &= B \sin kx\,, & c(x) &= c \sin kx + \cos kx \\ s(x) &= B \operatorname{sh} kx\,, & c(x) &= c \operatorname{sh} kx + \operatorname{ch} kx\,, \end{aligned}$$

so dass (24) (mit $A = B\sqrt{|g'(0)|} \neq 0$)

$$g(x) = \frac{s(x)}{c(x)}\sqrt{|g'(0)|} = \begin{cases} \dfrac{Ax}{cx+1} \\ \dfrac{A\operatorname{tg} kx}{c\operatorname{tg} kx+1} \\ \dfrac{A\operatorname{th} kx}{c\operatorname{th} kx+1} \end{cases}$$

ergibt, d. h. mit (19) *sind*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{cx+1} \\ \dfrac{a\operatorname{tg} kx+b}{c\operatorname{tg} kx+1} \\ \dfrac{a\operatorname{th} kx+b}{c\operatorname{th} kx+1} \end{cases} \qquad (a - bc \neq 0)$$

die allgemeinen (stetig differenzierbaren) Lösungen von (2). — (In den bisherigen Betrachtungen wurden die Vorzeichen der Quadratwurzeln nicht präzisiert, da in §§ 7—8 ohnehin exakte Untersuchungen unter schwächeren Bedingungen folgen.)

§ 6. Ja, *es genügt sogar die Existenz einer in Umgebung eines einzigen Punktes existierenden und stetigen Ableitung der stetigen Funktion $f(x)$ vorauszusetzen.* — Wir könnten dies auch von (2) (bzw. (5)) direkt ableiten, wir wollen aber (2) zuerst auf eine andere, äquivalente Gestalt bringen, die auch im weiteren vorteilhaft sein wird. (5) geht nämlich mit $x - x_i = t_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ in

$$(25) \qquad \frac{f(t_1) - f(t_3)}{f(t_2) - f(t_3)}\,\frac{f(t_2) - f(t_4)}{f(t_1) - f(t_4)} = F(x - t_1,\ x - t_2,\ x - t_3,\ x - t_4)$$

oder mit $x = t_1$, $F(0, x_2, x_3, x_4) = G(-x_2, -x_3, -x_4)$ in

$$(26) \qquad \frac{f(t_1) - f(t_3)}{f(t_2) - f(t_3)}\,\frac{f(t_2) - f(t_4)}{f(t_1) - f(t_4)} = G(t_2 - t_1,\ t_3 - t_1,\ t_4 - t_1)$$

(vgl. auch (1)) über. Setzen wir in (26) $t_1 = 0$, so haben wir

$$G(t_2, t_3, t_4) = \frac{f(0) - f(t_3)}{f(t_2) - f(t_3)}\,\frac{f(t_2) - f(t_4)}{f(0) - f(t_4)},$$

also

$$G(t_2 - t_1, t_3 - t_1, t_4 - t_1) = \frac{f(0) - f(t_3 - t_1)}{f(t_2 - t_1) - f(t_3 - t_1)}\,\frac{f(t_2 - t_1) - f(t_4 - t_1)}{f(0) - f(t_4 - t_1)},$$

so dass (26) in

$$\frac{f(t_1) - f(t_3)}{f(t_2) - f(t_3)}\,\frac{f(t_2) - f(t_4)}{f(t_1) - f(t_4)} = \frac{f(0) - f(t_3 - t_1)}{f(t_2 - t_1) - f(t_3 - t_1)}\,\frac{f(t_2 - t_1) - f(t_4 - t_1)}{f(0) - f(t_4 - t_1)}$$

übergeht. Daher gilt bei fixem $t_4 = t_0$ (wo die Nenner nicht verschwinden)

$$\frac{f(t_3) - f(t_1)}{f(t_3) - f(t_2)} = H(t_1, t_2) \frac{f(t_3 - t_1) - f(0)}{f(t_3 - t_1) - f(t_2 - t_1)} \tag{27}$$

$$\left(H(t_1, t_2) = \frac{f(t_2 - t_1) - f(t_0 - t_1)}{f(0) - f(t_0 - t_1)} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{f(t_2) - f(t_0)}\right)$$

d.h.

$$\frac{f(t_3) - f(t_1)}{t_3 - t_1} \frac{1}{f(t_3) - f(t_2)} = H(t_1, t_2) \frac{f(t_3 - t_1) - f(0)}{t_3 - t_1} \frac{1}{f(t_3 - t_1) - f(t_2 - t_1)}. \tag{28}$$

Bei dem Grenzübergang $t_3 \to t_1$ $(t = t_3 - t_1 \to 0)$ sieht man, dass

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = f'(0) \tag{29}$$

existiert, falls

$$\lim_{t_3 \to t_1} \frac{f(t_3) - f(t_1)}{t_3 - t_1} = f'(t_1) \tag{30}$$

für *ein* t_1 existiert, und umgekehrt, wenn schon (29) existiert, so existiert auch (30) für *alle* t_1. Also ist $f(x)$ (höchstens mit Ausnahme von sich im endlichen nicht häufenden — isolierten — singulären Stellen) *überall differenzierbar und die Ableitung ist in einem Punkte stetig*. So können wir den Gedankengang in § 5 verwenden und erhalten wieder (13) als allgemeine Lösung.

Man kann übrigens (23) auch hieraus ableiten: Falls der in Rede stehende Grenzübergang $t_3 \to t_1$ durchführbar ist, wird aus (28)

$$\frac{f'(t_1)}{f(t_1) - f(t_2)} = H(t_1, t_2) \frac{f'(0)}{f(0) - f(t_2 - t_1)}. \tag{31}$$

Ebenso folgt aus (27) durch Multiplikation mit $t_3 - t_2$ und Grenzübergang $t_3 \to t_2$

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{f'(t_2)} = H(t_1, t_2) \frac{f(t_2 - t_1) - f(0)}{f'(t_2 - t_1)}. \tag{32}$$

Dividieren wir (32) mit (31), wo die Nenner nicht verschwinden, (aus (31) ist $H(t_1, t_2) f'(0) \neq 0$ — abgesehen von isolierten Stellen — ersichtlich), so erhalten wir

$$\frac{(f(t_2) - f(t_1))^2}{f'(t_1) f'(t_2)} = \frac{(f(t_2 - t_1) - f(0))^2}{f'(0) f'(t_2 - t_1)}$$

d.h. mit der Bezeichnung (19) eben die Gleichung (23).

§ 7. Endlich *setzen wir* schon *gar keine Differenzierbarkeit voraus*. — Wir setzen aber natürlich auch weiter voraus, dass $f(x)$ *höchstens in einer Punktmenge ohne endlichen Häufungspunkten* — d.h. in einer ins Unendliche divergierenden Punktfolge — *nicht definiert (unendlich) und höchstens auf solchen Punktmengen konstant ist*. Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass $f(0)$ einen Sinn hat (endlich ist). Laut Voraussetzung gibt es eine Stelle x_0, wo $f(x_0), f(-x_0), f(2x_0)$ endlich und

$$f(x_0) \neq f(0), \quad f(-x_0) \neq f(0), \quad f(2x_0) \neq f(0)$$

sind. Denn würde in jedem Punkte entweder $f(x) = f(0)$ oder $f(-x) = f(0)$ oder $f(2x) = f(0)$ gelten, so würde $f(x)$ auf einer Menge mit endlichem Häufungspunkt konstant sein. Wieder kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass $x_0 = 1$ ist, also

$$f(1) \neq f(0), \quad f(-1) \neq f(0), \quad f(2) \neq f(0).$$

— Im Sinne von (4) bleibt (2) — und damit auch (25) — auch für die Funktion

$$g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{f(x) - f(0)} \qquad \left(f(x) = \frac{f(0)\,g(x) - f(1)}{g(x) - 1}\right) \tag{33}$$

mit

$$g(1) = \frac{f(1) - f(1)}{f(1) - f(0)} = 0, \quad \frac{1}{g(0)} = \frac{f(0) - f(0)}{f(0) - f(1)} = 0, \quad g(-1),\ g(2) \text{ endlich} \tag{34}$$

gültig:

$$\frac{g(t_1) - g(t_3)}{g(t_2) - g(t_3)}\,\frac{g(t_2) - g(t_4)}{g(t_1) - g(t_4)} = F(x - t_1, x - t_2, x - t_3, x - t_4). \tag{35}$$

Mit $x = 0$ folgt hieraus

$$F(-t_1, -t_2, -t_3, -t_4,) = \frac{g(t_1) - g(t_3)}{g(t_2) - g(t_3)}\,\frac{g(t_2) - g(t_4)}{g(t_1) - g(t_4)}$$

d.h.

$$F(x - t_1, x - t_2, x - t_3, x - t_4) = \frac{g(t_1 - x) - g(t_3 - x)}{g(t_2 - x) - g(t_3 - x)}\,\frac{g(t_2 - x) - g(t_4 - x)}{g(t_1 - x) - g(t_4 - x)},$$

so dass (35) in

$$\frac{g(t_1) - g(t_3)}{g(t_2) - g(t_3)}\,\frac{g(t_2) - g(t_4)}{g(t_1) - g(t_4)} = \frac{g(t_1 - x) - g(t_3 - x)}{g(t_2 - x) - g(t_3 - x)}\,\frac{g(t_2 - x) - g(t_4 - x)}{g(t_1 - x) - g(t_4 - x)} =$$

$$= \frac{1 - \dfrac{g(t_3 - x)}{g(t_1 - x)}}{1 - \dfrac{g(t_4 - x)}{g(t_1 - x)}}\,\frac{g(t_2 - x) - g(t_4 - x)}{g(t_2 - x) - g(t_3 - x)} \tag{36}$$

übergeht. Wegen (34) wird aus (36) für $x = t_1$, $t_2 = t_1 + 1$

$$\frac{g(t_1) - g(t_3)}{g(t_1 + 1) - g(t_3)}\,\frac{g(t_1 + 1) - g(t_4)}{g(t_1) - g(t_4)} = \frac{g(t_4 - t_1)}{g(t_3 - t_1)}. \tag{37}$$

Aus (37) folgt einerseits mit $t_1 = 1$, $t_3 = 0$ wegen (34)

$$\frac{g(t_4) - g(2)}{g(t_4)} = \frac{g(t_4 - 1)}{g(-1)}$$

($g(-1) \neq 0$ wie wir gleich sehen werden) d.h. mit

$$g(-1) = K\,, \quad g(2)\,K = C \tag{38}$$

für $t_4 = t$

$$g(t-1) = K - \frac{C}{g(t)} \tag{39}$$

und für $t - 1 = s$ auch

$$g(s+1) = \frac{C}{K - g(s)} \tag{40}$$

(bei $g(t) \neq 0$, $g(s) \neq K$), wobei $C \neq 0$ ist, (denn sonst wäre $g(x)$ konstant) und wegen (38) und (34) auch $K \neq 0$. Anderseits folgt aus (37) mit $t_3 = 1$ wegen (34) und (40)

$$\begin{aligned} g(t_4 - t_1) &= g(1-t_1)\,\frac{g(t_1)}{g(t_1+1)}\,\frac{g(t_1+1) - g(t_4)}{g(t_1) - g(t_4)} = \\ &= g(1-t_1)\,\frac{g(t_1)}{C}\,\frac{C - g(t_4)\big(K - g(t_1)\big)}{g(t_1) - g(t_4)}\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Das Spezialisieren $t_4 = t_1 - 1$ ergibt wegen (38) und (39)

$$\begin{aligned} K &= g(1-t_1)\,\frac{g(t_1)}{C}\,\frac{C - \left(K - \dfrac{C}{g(t_1)}\right)\big(K - g(t_1)\big)}{g(t_1) - K + \dfrac{C}{g(t_1)}} = \\ &= g(1-t_1)\,\frac{g(t_1)}{C}\,\frac{Kg(t_1)^2 - K^2 g(t_1) + CK}{g(t_1)^2 - Kg(t_1) + C} = g(1-t_1)\,\frac{g(t_1)}{C}\,K\,, \end{aligned} \tag{42}$$

(da $K \neq 0$ ist und $g(t_1) = 0$ bzw. $g(t_1)^2 - Kg(t_1) + C = 0$ höchstens auf einer Menge ohne Häufungspunkt im endlichen gelten kann), d.h.

$$g(1-t_1)\,\frac{g(t_1)}{C} = 1 \tag{43}$$

(höchstens mit Ausnahme von sich im endlichen nicht häufenden singulären Stellen), so dass (41) mit $t_4 = x$, $t_1 = y$ in

$$g(x-y) = \frac{g(x)\,g(y) - Kg(x) + C}{g(y) - g(x)} \tag{44}$$

übergeht.

Nun kann man einerseits bemerken, dass *alle etwa in einem Punkte stetige (oder messbare) Lösungen* einer Funktionalgleichung der Gestalt (44) *auch (beliebig oft) differenzierbar sind* (vgl. etwa [2] und [1] Abschn. 2.2), *so dass die in* §§ 2—6 *gegebenen Lösungsmethoden dieselben allgemeinen Lösungen* (13) *von* (2) *auch unter so allgemeinen Bedingungen ergeben.*

Anderseits lässt sich (44) auch direkt lösen: Man setze

$$g(x) = \frac{h(x) + AK}{2A} \tag{45}$$

($A \neq 0$ eine später zu bestimmende Konstante) in (44):

$$\frac{h(x-y) + AK}{2A} = \frac{\bigl(h(x) + AK\bigr)\bigl(h(y) + AK\bigr) - 2AK\bigl(h(x) + AK\bigr) + 4A^2C}{2A\bigl(h(y) - h(x)\bigr)}$$

um

$$h(x-y) = \frac{h(x)\,h(y) + A^2(4C - K^2)}{h(y) - h(x)} \tag{46}$$

zu erhalten. Zur Lösung von (46) (vgl. [3] und [1] Kap. 2) treffe man die Fallunterscheidung

1. $4C - K^2 = 0$,
2. $4C - K^2 > 0$,
3. $4C - K^2 < 0$.

Im Falle 1 führe man in

$$h(x-y) = \frac{h(x)\,h(y)}{h(y) - h(x)} \tag{47}$$

die neue Funktion

$$h(x) = \frac{1}{k(x)} \tag{48}$$

ein, so dass (47) in

$$k(x-y) = k(x) - k(y)$$

oder

$$k(y+z) = k(y) + k(z) \tag{49}$$

($z = x - y$) übergeht, und die allgemeine, etwa in einem Punkte stetige Lösung dieser Funktionalgleichung ist

$$k(x) = kx$$

(k eine Konstante), so dass wegen (48)

$$h(x) = \frac{1}{kx} \tag{50}$$

besteht.

Im Falle 2 wähle man in (46) $A^2 = \dfrac{1}{4C - K^2}$

$$h(x-y) = \frac{h(x)\,h(y) + 1}{h(y) - h(x)}\,. \tag{51}$$

Mit

$$h(x) = \operatorname{ctg} \bar{k}(x) \tag{52}$$

wird aus (51)

$$\operatorname{ctg} \bar{k}(x-y) = \operatorname{ctg}\bigl(\bar{k}(x) - \bar{k}(y)\bigr) \text{ d. h. } \bar{k}(x-y) \equiv \bar{k}(x) - \bar{k}(y) \pmod{\pi}$$

oder

$$\bar{k}(y+z) \equiv \bar{k}(y) + \bar{k}(z) \pmod{\pi}. \tag{53}$$

Die allgemeine (etwa in einem Punkte stetige) Lösung dieser Funktionalkongruenz (vgl. [6]) ist

$$k(x) \equiv kx \pmod{\pi},$$

so dass wegen (52)

$$h(x) = \operatorname{ctg} kx \tag{54}$$

besteht.

Endlich wählt man im Falle 3 in (46) $A^2 = -\dfrac{1}{4C - K^2}$;

$$h(x-y) = \frac{h(x)\,h(y) - 1}{h(y) - h(x)}. \tag{55}$$

Mit

$$h(x) = \operatorname{cth} k(x) \tag{56}$$

wird aus (55)

$$\operatorname{cth} k(x-y) = \operatorname{cth}\bigl(k(x) - k(y)\bigr)$$

d.h.

$$k(y+z) = k(y) + k(z). \tag{49}$$

So folgt auch hier (für in einem Punkte stetige $k(x)$)

$$k(x) = kx$$

und mit (56)

$$h(x) = \operatorname{cth} kx. \tag{57}$$

(50), (54) und (57) ergeben mittels (45) und (33) *höchstens mit Ausnahme einer ins Unendliche divergierenden Punktfolge*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a + b/x}{c + d/x} = \dfrac{ax + b}{cx + d} \\[2ex] \dfrac{a + b \operatorname{ctg} kx}{c + d \operatorname{ctg} kx} = \dfrac{a \operatorname{tg} kx + b}{c \operatorname{tg} kx + d} \\[2ex] \dfrac{a + b \operatorname{cth} kx}{c + d \operatorname{cth} kx} = \dfrac{a \operatorname{th} kx + b}{c \operatorname{tg} kx + d} \end{cases}$$

als *die allgemeinen in einem Punkte stetigen Lösungen von* (2).

Wir hätten (50), (54) und (57) auch so aus (47) bzw. (51) bzw. (55) erhalten können, dass wir $f_0(x) = \dfrac{1}{x}$ bzw. $f_0(x) = \operatorname{ctg} x$ bzw. $f_0(x) = \operatorname{cth} x$ als Lösungen dieser Gleichungen erkennen und bemerken, dass die allgemeinen (etwa messbaren oder in einem Punkte stetigen) Lösungen von Gleichungen wie (47), (51) und (55) durch

$$f(x) = f_0(kx)$$

angegeben sind, wo $f_0(x)$ eine partikuläre Lösung ist (vgl. etwa [3] und [1] Abschn. 2.2). — Bei der obigen Beweisanordnung enthalten aber (48), (52) und (56) auch überall unstetige (nichtmessbare) Lösungen von (47) bzw. (51) bzw. (55), *falls für* $\bar{k}(x)$ *auch die überall unstetigen (nichtmessbaren) Lösungen der Funktionalkongruenz* (53) *bzw. falls für* $k(x)$ *auch die unstetigen (nichtmessbaren) Lösungen der Funktionalgleichuxg* (49) *in betracht genommen werden; dann enthält*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ak(x)+b}{ck(x)+d} \\ \dfrac{a \operatorname{tg} \bar{k}(x)+b}{c \operatorname{tg} \bar{k}(x)+d} \\ \dfrac{a \operatorname{th} k(x)+b}{c \operatorname{th} k(x)+d} \end{cases}$$

auch die überall unstetigen (nichtmessbaren) Lösungen von (2).

§ 8. Die folgende Umformung führt (2) auf einen allgemeinen Funktionalgleichungstypus (1) zurück, der auch in sich interessant zu sein scheint.

(5) lässt sich auch in die Gestalt

$$\begin{aligned} \frac{f(x+y_1)-f(x+y_3)}{f(x+y_2)-f(x+y_3)} \frac{f(x+y_2)-f(x+y_4)}{f(x+y_1)-f(x+y_4)} &= \\ = F(-y_1, -y_2, -y_3, -y_4) &= \\ = \frac{f(y_1)-f(y_3)}{f(y_2)-f(y_3)} \frac{f(y_2)-f(y_4)}{f(y_1)-f(y_4)} \end{aligned} \tag{58}$$

(vgl. (1)) schreiben, was mit $y_1 = y$, $y_3 = 0$, und $y_2 = y_0$, $y_4 = x_0$ (beide konstant) in

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{f(x+y)-f(x+x_0)} = \frac{f(x+y_0)-f(x)}{f(x+y_0)-f(x+x_0)} \frac{f(y_0)-f(x_0)}{f(y_0)-f(0)} \frac{f(y)-f(0)}{f(y)-f(x_0)}$$

oder mit

$$\begin{gathered} k(x) = f(x+x_0), \; h(x) = \frac{f(x+y_0)-f(x)}{f(x+y_0)-f(x+x_0)} \frac{f(y_0)-f(x_0)}{f(y_0)-f(0)}, \\ g(y) = \frac{f(y)-f(0)}{f(y)-f(x_0)} \end{gathered} \tag{59}$$

in

$$f(x+y) - f(x) = \big(f(x+y) - k(x)\big)\, h(x)\, g(y)$$

übergeht. Also gilt

$$f(x+y)=\frac{f(x)-g(y)\,h(x)\,k(x)}{1-g(y)\,h(x)}. \tag{60}$$

Wir nehmen (59) in betracht:

$$g(y)=\frac{f(y)-f(0)}{f(y)-f(x_0)},$$

so dass (60) in eine Gleichung von der Gestalt

$$f(x+y)=\frac{a(x)\,f(y)+b(x)}{c(x)\,f(y)+d(x)} \tag{61}$$

übergeht. Dies ist eine Verallgemeinerung der auch in [5] betrachteten Funktionalgleichung

$$f(x+y)=a(x)\,f(y)+b(x)$$

(s. auch [1] Nr. 3.1.3). — Die Lösung der allgemeineren Funktionalgleichung (61) ist unserer Meinung nach eine interessante, aber ohne Spezialisierung der Funktionen $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ schwierigere Aufgabe als die von (2).

Der hier folgende Gedankengang leistet eine starke Reduktion, die auf leicht lösbare Fälle führt und zeigt zugleich die Verwandtschaft der obigen Umformung mit dem im § 7 gefolgten Lösungsweg.

Ähnlich wie im § 7 gibt es zwei Werte z_0 und x_0 derart, dass $f(z_0)$ und $f(x_0)$ $f(-x_0)$, $f(2x_0)$ endlich sind und,

$$f(x_0)\neq f(z_0),\quad f(-x_0)\neq f(z_0),\quad f(2\,x_0)\neq f(z_0)$$

besteht und man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $z_0=0$, $x_0=1$ nehmen. Also wird

$$f(1)\neq f(0),\ f(-1)\neq f(0),\ f(2)\neq f(0).$$

Im Sinne von (4) bleibt wieder (2) — und damit auch (58) auch für

$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{f(x)-f(1)}\qquad\left(f(x)=\frac{f(1)\,g(x)-f(0)}{g(x)-1}\right) \tag{62}$$

(vgl. (59)) mit

$$g(0)=0,\frac{1}{g(1)}=0,\ g(-1)\neq 0 \text{ und } g(2)\neq 0 \tag{63}$$

gültig:

$$\frac{g(x+y_1)-g(x+y_3)}{g(x+y_2)-g(x+y_3)}\,\frac{g(x+y_2)-g(x+y_4)}{g(x+y_1)-g(x+y_4)}=$$

$$=\frac{g(y_1)-g(y_3)}{g(y_2)-g(y_3)}\,\frac{g(y_2)-g(y_4)}{g(y_1)-g(y_4)}=\frac{g(y_1)-g(y_3)}{g(y_2)-g(y_3)}\,\frac{\dfrac{g(y_2)}{g(y_4)}-1}{\dfrac{g(y_1)}{g(y_4)}-1}.$$

Wegen (63) wird hieraus mit $y_1 = y$, $y_2 = z$, $y_3 = 0$, $y_4 = 1$

$$\frac{g(x+y)-g(x)}{g(x+z)-g(x)}\,\frac{g(x+z)-g(x+1)}{g(x+y)-g(x+1)} = \frac{g(y)}{g(z)}. \tag{64}$$

Aus (64) folgt einerseits mit $x = 1$, $z = -1$ wegen (63)

$$\frac{g(2)}{g(2)-g(y+1)} = \frac{g(y)}{g(-1)}.$$

Hieraus folgt, dass weder $\frac{1}{g(2)} = 0$ noch $\frac{1}{g(-1)} = 0$ sein kann, da sonst $g(y) = g(-1)$ oder $g(2) = 0$ (oder $1 = 0$) wäre trotz (63) und dass

$$g(y) = \frac{C}{K-g(y+1)}, \quad g(y+1) = K - \frac{C}{g(y)} \tag{65}$$

gilt, wobei

$$g(2) = K, g(-1)\,K = C \quad (C \neq 0, K \neq 0), \qquad g(-1) = \frac{C}{K} \tag{66}$$

war (vgl. (63)). Andererseits folgt aus (64) mit $z = 1 - x$ wegen (63)

$$\frac{g(x+y)-g(x)}{g(x+y)-g(x+1)} = \frac{g(y)}{g(1-x)}. \tag{67}$$

Das Spezialisieren $y = -1$ ergibt wegen (65) und (66)

$$\frac{C}{Kg(1-x)} = \frac{g(-1)}{g(1-x)} = \frac{g(x-1)-g(x)}{g(x-1)-g(x+1)} = \frac{\dfrac{C}{K-g(x)} - g(x)}{\dfrac{C}{K-g(x)} - K + \dfrac{C}{g(x)}} = \frac{g(x)}{K}$$

d.h.

$$g(x)\,g(1-x) = C.$$

Hiermit und mit (65) geht (67) in

$$g(x+y) = \frac{g(x+1)\,g(y) - g(x)\,g(1-x)}{g(y)-g(1-x)} = \frac{\left(K - \dfrac{C}{g(x)}\right) g(y) - C}{g(y) - \dfrac{C}{g(x)}} = \tag{68}$$

$$= \frac{Kg(x)\,g(y) - Cg(x) - Cg(y)}{g(x)\,g(y) - C}$$

über und dies ist der gesuchte Spezialfall von (61).

Wieder sind alle etwa messbare Lösungen von (68) auch differenzierbar (vgl. etwa [2] und [1] Nr. 2.2.3, 2.2.4, wo eben solche Gleichungen behandelt werden), man kann andererseits um sie direkt zu lösen, in ihr

$$g(x) = \frac{2\,ACh(x)}{1 + AKh(x)} \tag{69}$$

($A \neq 0$ eine später zu bestimmende Konstante) setzen, damit man mit einer leichten Rechnung

$$h(x+y) = \frac{h(x)+h(y)}{1-A^2(4C-K^2)\,h(x)\,h(y)}$$

(auch Spezialfall von (61)) erhalte. Wir unterscheiden wieder die drei Fälle

1. $4C - K^2 = 0, \quad h(x+y) = h(x) + h(y)$,

2. $4C - K^2 > 0, A^2 = \dfrac{1}{4C-K^2}, \; h(x+y) = \dfrac{h(x)+h(y)}{1-h(x)\,h(y)}$,

3. $4C - K^2 < 0, A^2 = -\dfrac{1}{4C-K^2}, \; h(x+y) = \dfrac{h(x)+h(y)}{1+h(x)\,h(y)}$.

Dies sind noch allgemeiner bekannte Funktionalgleichungen als die Gleichungen (47), (51) und (55) (s. etwa [3] und [1] Nr. 2.2.8), ihre allgemeine etwa messbare (oder in einem Punkte stetige) Lösungen sind

$$h(x) = \begin{cases} kx \\ \operatorname{tg} kx\,, \\ \operatorname{th} kx \end{cases}$$

so dass wir mittels (69) und (62) wieder — *höchstens mit Ausnahme einer ins Unendliche dievrgierenden Punktfolge* —

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{cx+d} \\[2ex] \dfrac{a \operatorname{tg} kx + b}{c \operatorname{tg} kx + d} \\[2ex] \dfrac{a \operatorname{th} kx + b}{c \operatorname{th} kx + d} \end{cases} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

als *die allgemeinen*, etwa *messbaren (oder in einem Punkte stetigen) Lösungen von* (2) erhalten, während wieder

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ak(x)+b}{ck(x)+d} \\[2ex] \dfrac{a \operatorname{tg} \bar{k}(x) + b}{c \operatorname{tg} \bar{k}(x) + d} \\[2ex] \dfrac{a \operatorname{th} k(x) + b}{c \operatorname{th} k(x) + d} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (ad - bc \neq 0, k(x+y) = k(x) + k(y)) \\ (\bar{k}(x+y) \equiv \bar{k}(x) + \bar{k}(y) \pmod{\pi}) \end{array} \tag{70}$$

auch nichtmessbare (überall unstetige) Lösungen von (2) *enthält.* —

Alle unsere Betrachtungen lassen sich auch auf komplexe (die in §§ 7—8 mit Endergebnis (70) auch auf allgemeinere) Funktionen anwenden. Im Komplexen können natürlich die Fälle mit tg und mit th vereint werden.

In den obigen Betrachtungen können, wie man leicht sieht, die Mengen ohne endlichen Häufungspunkt durch beliebige Mengen mit der Eigenschaft E ersetzt werden. Dabei sagen wir von einer Menge, dass sie die Eigenschaft E hat, falls bei einer beliebigen Einteilung des unendlichen Grundbereiches (des Definitionsbereiches: etwa der Menge der rellen oder der komplexen Zahlen) in endlich viel Teilmengen (deren Vereinigung also der Grundbereich ist) wenigstens eine Teilmenge die Eigenschaft E nicht besitzt und Summen von endlich viel Mengen mit der Eigenschaft E auch die Eigenschaft E haben. U. a. haben auch die (im Grundbereich) nirgends dichten Mengen, die abzählbaren Mengen (bzw. die Mengen kleinerer Mächtigkeit als die des Grundbereiches) usw. die Eigenschaft E.

Die Funktionalgleichung (2) und die weitere (61) können auch durch eine von E. Vincze in [7] ausgearbeitete allgemeine Methode zur Lösung mehrerer Funktionalgleichungstypen behandelt werden.

(Eingegangen: 10 April, 1962.)

[1] Aczél, J.: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* Basel, Stuttgart und Berlin, 1961.

[2] Alt, W.: „Über die reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen, welche ein rationales Additionstheorem besitzen." *Deutsche Math.* **5** (1940), 1–12.

[3] Caccioppoli, R.: „L'equazione funzionale $f(x + y) = F(f(x), f(y))$." Giornale Mat. Battaglini **66** (1928), 69–74.

[4] Hosszú, M.: „Észrevételek a relativitáselméleti időfogalom Reichenbach-féle értelmezéséhez". *Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei* **9** (1963).

[5] Reichenbach, H.: *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre.* § 13. Braunschweig, 1924.

[6] Ridder, J.: „On the additive functional equation and an additive functional congruence." *Euklides* **18** (1941), 84–92.

[7] Vincze, E.: „Eine allgemeinere Methode in der Theorie der Funktionalgleichungen, I." *Publ. Math. Debrecen* **9** (1962), 149–163.

[8] Wilson, W. H.: „On certain related functional equations". *Bull. Amer. math. Soc.* **26** (1919–1920), 300–312.

РЕШЕНИЕ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ИМЕЮЩЕГО СВЯЗЬ С АНГАРМОНИЧЕСКИМ ОТНОШЕНИЕМ

J. ACZÉL, K. FLADT и M. HOSSZÚ

Резюме

В статье приведено несколько методов решения функционального уравнения (2) — при постепенно слабеющих условиях регулярности.

Наиболее общее непрерывное решение, соответственно наиболее общее решение (например, за исключением расходящейся последовательности точек) имеет вид (13), соотв. (70).

Это функциональное уравнение появилось в аксиоматическом построении по Райхенбаху теории относительности и его можно толковать и так, что геометрическое ангармоническое отношение должно быть инвариантным относительно одновременной трансляции четырёх отметок на не обязательно линейно размеченной шкале.