BEMERKUNG ZUR CHARAKTERISIERUNG DES GAUSS'SCHEN FEHLERGESETZES

von

E. VINCZE[1]

1. In der Literatur finden sich auch mehrere Arbeiten, in denen die *charakteristische Funktion* der normalen Verteilung durch die Funktionalgleichung

$$(1') \qquad \varphi(x) = \varphi(ax)\,\varphi(bx)$$

charakterisiert ist. Vor allem sind zu diesem Problem die Arbeiten von Ю. В. Линник [3] und G. Baxter [2] (vgl. [4], S. 182) zu erwähnen. Ein ähnliches Verfahren enthält auch das Buch von A. Rényi [5]. Die Gleichung (1′) hat auch J. Aczél [1] (S.96) unter stärkeren Bedingungen gelöst.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir dieselbe Gleichung auflösen, *ohne* jedoch voraussetzen, dass $\varphi(x)$ eine charakteristische Funktion ist.

2. Wir betrachten die komplexe Funktionalgleichung

$$(1) \qquad \varphi(x) = \varphi(ax)\,\varphi(bx) \qquad (a, b > 0\,; a^2 + b^2 = 1),$$

in welcher a, b *feste* Konstanten bezeichnen, weiter diese und auch x reell sind. Es gilt der folgende

Satz. *Die einzige komplexe, nicht identisch konstante und an der Stelle $x = 0$ zweimal derivierbare Lösung der Funktionalgleichung* (1) *ist*

$$\varphi(x) = e^{mx^2},$$

wobei $m(\neq 0)$ eine beliebige komplexe Konstante bezeichnet.

Beweis. Aus (1) geht hervor, dass $\varphi(x) \equiv 0$ und $\varphi(x) \equiv 1$ je eine Lösung von (1) darstellen; im weiteren sollen diese trivialen Lösungen ausgeschlossen bleiben.

Wir können annehmen, dass $a \geqq b$ ist. Mit $x = 0$ ergibt sich aus (1)

$$\varphi(0)\,[1 - \varphi(0)] = 0,$$

d.h. $\varphi(0) = 0$ oder $\varphi(0) = 1$. Falls nun $\varphi(0) = 0$, dann ist $\varphi(x) \equiv 0$, denn die Funktion $\varphi(x)$ ist an der Stelle $x = 0$ stetig, es gilt also

$$(2) \qquad |\varphi(x)| < \varepsilon, \text{ wenn } |x| \leqq \delta.$$

[1] Technische Universität für Schwerindustrie, Miskolc—Egyetemváros.

Aus (1) ergibt sich ferner

$$\tag{3} \begin{cases} \varphi(x) = \varphi(ax)\,\varphi(bx) = \varphi(a^2 x)\,\varphi(abx)^2\,\varphi(b^2 x) = \ldots \\ \ldots = \prod\limits_{\nu+\mu=n} \varphi(a^\nu b^\mu x), \end{cases}$$

worin die Anzahl der Faktoren des Produktes 2^n beträgt. Da $0 < b \leqq a < 1$, lässt sich zu jedem Wert $x = x_0$ durch entsprechende Wahl von n erreichen, dass

$$\tag{4} a^\nu b^\mu x_0 \leqq a^n x_0 \leqq \delta .$$

Mit den Gleichungen (2) und (3) erhalten wir nun

$$|\varphi(x_0)| = \prod_{\nu+\mu=n} |\varphi(a^\nu b^\mu x_0)| < \varepsilon^{2^n},$$

und da wir den Wert ε beliebig klein wählen können, ist für jeden beliebigen Wert x_0 $\varphi(x_0) = 0$, also $\varphi(x) \equiv 0$.

Besitzt also die Gleichung (1) eine nicht identisch verschwindende Lösung, so ist $\varphi(0) = 1$.

Hieraus geht ferner hervor, dass $\varphi(x) \not\equiv 0$. Da nämlich die Funktion $\varphi(x)$ an der Stelle $x = 0$ stetig ist, kann man $\delta > 0$ so angeben, dass

$$\tag{5} |\varphi(x) - 1| < 1 \qquad\qquad |x| \leqq \delta$$

wird. Auch bei beliebigem Wert $x = x_0$ können wir durch entsprechende Wahl von n stets erreichen, dass (4) gültig wird. Dann gilt (5) für $\varphi(a^\nu b^\mu x_0)$, also ist $\varphi(a^\nu b^\mu x_0) \neq 0$ und wegen (3) ist $\varphi(x_0) \neq 0$ für jeden beliebigen Wert x_0.

Suchen wir jetzt die Lösung der Funktionalgleichung (1) in der Form

$$\varphi(x) = p(x)\, e^{ir(x)},$$

wo $p(x)$ (> 0) und $r(x)$ reelle Funktionen bezeichnen, dann erhalten wir aus (1)

$$p(x)\, e^{ir(x)} = p(ax)\, e^{ir(ax)}\, p(bx)\, e^{ir(bx)},$$

$$\tag{6} p(x) = p(ax)\, p(bx),$$

$$\tag{7} r(x) \equiv r(ax) + r(bx) \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Wir betrachten zuerst die Gleichung (6) für $x \geqq 0$. Führen wir die Bezeichnung

$$\psi_1(x^2) \overset{\text{def}}{=} \log p(x) \qquad\qquad [x \geqq 0; p(x) > 0]$$

ein, dann kann man statt (6) die Gleichung

$$\tag{8} \begin{cases} \psi_1(\xi) = \psi_1(\alpha\xi) + \psi_1(\beta\xi), \\ \xi = x^2,\ 0 < b^2 = \beta \leqq \alpha = a^2 < 1,\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

schreiben. Es sei hier bemerkt, dass die Substitution $\psi_1(x^2) = \log p(x)$ wegen der Bedingung $x \geqq 0$ *umkehrbar* ist. Die triviale Lösung $\psi_1(\xi) \equiv 0$ [d.h. $p(x) \equiv 1$, $x \geqq 0$] kann ausser acht bleiben.

Durch Induktion ergibt sich

$$\psi_1(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi_1(\alpha^{n-k} \beta^k \xi) . \tag{9}$$

Für $n = 1$ geht diese Gleichung in (8) über und aus den Gleichungen

$$\psi_1(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \psi_1(\alpha^{n-1-k} \beta^k \xi) , \tag{9a}$$

$$\psi_1(\alpha^{n-1-k} \beta^k \xi) = \psi_1(\alpha^{n-k} \beta^k \xi) + \psi_1(\alpha^{n-1-k} \beta^{k+1} \xi)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

folgt tatsächlich, dass

$$\psi_1(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} [\psi_1(\alpha^{n-k} \beta^k \xi) + \psi_1(\alpha^{n-1-k} \beta^{k+1} \xi)] =$$
$$= \binom{n-1}{0} \psi_1(\alpha^n \beta^0 \xi) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] \psi_1(\alpha^{n-k} \beta^k \xi) +$$
$$+ \binom{n-1}{n-1} \psi_1(\alpha^0 \beta^n \xi) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi_1(\alpha^{n-k} \beta^k \xi) .$$

Aus (8) ergibt sich $\psi_1(0) = 0$. Wir beweisen, dass auch die Funktion $\psi_1(\xi)$ an der Stelle $\xi = 0$ derivierbar ist, falls man die Funktion $\varphi(x)$ und damit auch $p(x)$ an der Stelle $x = 0$ zweimal derivieren kann. Wegen

$$p''(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{p'(x) - p'(0)}{x - 0} \tag{10}$$

existiert $p'(x)$ in einer (kleinen) Umgebung der Stelle $x \geqq 0$, also lässt sich aus (6) die Gleichungen

$$p'(x) = ap'(ax)\, p(bx) + bp'(bx)\, p(ax) \qquad (x \geqq 0) ,$$

$$p'(0) = (a + b)\, p'(0)$$

schreiben, woraus $p'(0) = 0$ folgt. Wenn $\psi_1'(0)$ existiert, dann ist

$$\psi_1'(0) = \lim_{\xi \to 0} \frac{\psi_1(\xi) - \psi_1(0)}{\xi - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\log p(x)}{x^2} .$$

Da wegen (10) und $p'(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\log p(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{2\, p(x)} \frac{p'(x)}{x} = \frac{1}{2} p''(0)$$

gilt, existiert $\psi_1'(0)$ tatsächlich und ist

$$\psi_1'(0) = \frac{1}{2} p''(0) = m_1 .$$

Diese Formel bedeutet auch, dass $\delta > 0$ für beliebige $\varepsilon > 0$ so existiert, dass die Ungleichung

$$(11) \qquad (m_1 - \varepsilon)\,\xi \leqq \psi_1(\xi) \leqq (m_1 + \varepsilon)\,\xi \qquad 0 \leqq \xi \leqq \delta$$

gültig ist. Da $0 < \beta \leqq \alpha < 1$, folgt bei entsprechender Wahl von n für beliebigen Wert x_0 die Ungleichung

$$\alpha^{n-k} \beta^k \xi_0 \leqq \alpha^n \xi_0 \leqq \delta ,$$

wir können also auf Grund von (11) die Ungleichung

$$(m_1 - \varepsilon) \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k \xi_0 \leqq \binom{n}{k} \psi_1(\alpha^{n-k} \beta^k \xi_0) \leqq (m_1 + \varepsilon) \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k \xi_0$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n)$$

schreiben. Addieren wir diese Ungleichungen und beachten wir die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \beta^k = (\alpha + \beta)^n = 1 ,$$

dann ergibt sich

$$(m_1 - \varepsilon)\,\xi_0 \leqq \psi_1(\xi_0) \leqq (m_1 + \varepsilon)\,\xi_0 \qquad (\varepsilon > 0).$$

Da man den Wert ε beliebig klein wählen kann und diese Ungleichung für jedes $\xi = \xi_0$ gilt, ist $\psi_1(\xi) = m_1 \xi$ $(m_1 \neq 0)$, also erhalten wir im Falle $x \geqq 0$

$$p(x) = e^{m_1 x^2} \qquad (m_1 \neq 0, \text{konst.}).$$

Gleichfalls erhalten wir aus (6) für $x \leqq 0$ die Lösung

$$p(x) = e^{m_1' x^2} \qquad (m_1' \neq 0, \text{konst.}),$$

aber wegen

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{p'(x)}{x} = p''(0) = \lim_{x \to 0-0} \frac{p'(x)}{x}$$

müssen m_1 und m_1' übereinstimmen.

Bei der Funktionalkongruenz (7) können wir wegen der Existenz $\varphi''(0)$ annehmen, dass die Funktion $r(x)$ in (einer kleinen Umgebung) $|x| < \delta$ stetig ist, also folgt aus (7)

$$r(x) = r(ax) + r(bx) \qquad |x| < \delta .$$

Diese Gleichung können wir ebenso auflösen, wie (6) und wir erhalten aus (7) für beliebiges x

$$r(x) = m_2 x^2 + 2\,k(x)\,\pi,$$

wo $k(x)$ stets eine ganze Zahl ist [in $|x| < \delta$ $k(x) \equiv 0$].

Damit ist tatsächlich

$$\varphi(x) = e^{(m_1+im_2)x^2}$$

und der Beweis ist vollendet.

3. Man kann die Frage aufwerfen, ob es genügt, für $\varphi(x)$ statt der zweimaligen Derivierbarkeit an der Stelle $x = 0$ weniger voraussetzen, so aber, dass die Lösung von (1) noch dieselbe Funktion bleibe. Die Frage muss verneint werden, wie dies ein interessantes Beispiel von J. ACZÉL (briefliche Mitteilung) zeigt:

Es seien $q(x)$ eine beliebige nach ω periodische Funktion und $\log a = r_1 \omega$, $\log b = r_2 \omega$ *(r_1, r_2 ganz), dann ist*

$$\varphi(x) = \exp\left[x^2 q(\log|x|)\right]$$

eine einmalig derivierbare Funktion, die der Gleichung (1) *genügt.*

(Eingegangen: 25. August, 1959; in veränderter Form: 18. April, 1962.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] ACZÉL, J.: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen.* Basel—Stuttgart, 1961.

[2] BAXTER, G.: „On a characterization of the normal law." *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **41** (1955) 383—385.

[3] ЛИННИК, Ю. В. *Разложения вероятностных законов.* Ленинград, 1960.

[4] LUKÁCS, E.: *Characteristic functions.* London, 1960.

[5] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás.* Budapest, 1954.

ЗАМЕЧАНИЕ К ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ФУНКЦИИ ОШИБКИ ГАУССА

E. VINCZE

Резюме

Статья примыкает к работам Ю. В. Линника [3], G. BAXTER [2] (сравн.: E. LUKÁCS [4] и A. RÉNYI [5]) которые пользуются функциональным уравнением

$$\varphi(x) = \varphi(ax)\,\varphi(bx); \qquad (a^2 + b^2 = 1) \tag{1'}$$

для характеризации *характеристической функции* нормального распределения. Уравнение (1') решается для комплексных значений функции, однако в процессе решения не обуславливается, что $\varphi(x)$ является характеристической функцией. Автор иллюстрирует при помощи одного примера (сообщённого ему письменно J. ACZÉL), что условия дальше ослаблять уже нельзя. Полученная теорема является по существу, обобщением одной теоремы J. ACZÉL [1] (стр. 96).