ÜBER DIE REKURSIVITÄT EINIGER ÜBERSETZUNGS-TRANSFORMATIONEN

II. MITTEILUNG: VERWENDUNG EINER LINEARISIERUNGSWEISE DES KANTOROWITSCH-SCHEN AUSDRUCKS-GRAPHEN

von

RÓZSA PÉTER

1. In den Folgenden handelt es sich um Ausdrücke, die aus Variablen (von welchen eine abzählbare Folge zur Verfügung steht) mit Hilfe von 1- und 2-gliedrigen Operationen aufgebaut werden. Dabei werden verschiedene Einklammerungsweisen, und auch klammernfreie Bezeichnungsweisen benutzt. Wenn man einen Ausdruck von gewissen Variablen ausgehend so aufbaut, dass sooft man auf einen inzwischen auftretenden Teilausdruck $\mathfrak{a}_1 \Theta \mathfrak{a}_2$, wo Θ eine zweigliedrige Operation ist, wieder eine Operation anzuwenden hat, $\mathfrak{a}_1 \Theta \mathfrak{a}_2$ immer zwischen Klammern setzt, erhält man jene Form des Ausdruckes, die ich kurz seine *»volleingeklammerte Form«* nennen werde (diese ist etwas abweichend von der in der I. Mitteilung gebrauchten Form; aber auch damit gingen die folgenden Betrachtungen, nur nicht so einheitlich).

In der Praxis werden meistens Zwischenstufen zwischen der volleingeklammerten und der klammernfreien Bezeichungsweise gebraucht. Man nimmt gewisse Konventionen in Betracht, nach welchen eine Operation »stärker bindet« als die andere (z. B. bindet die Multiplikation stärker als die Addition, und die Negation stärker als die zweigliedrigen logischen Operationen; bereits im vorhin erwähnten »volleingeschachtelten« Fall werden die eingliedrigen Operationen stärker bindend als die zweigliedrigen betrachtet). Ferner wird bei gleich stark bindenden Operationen üblicherweise die Reihenfolge von links nach rechts gemeint (vor Kenntnis von Klammern bedeutet für ein Schulkind z.B. die Aufgabe $8 - 3 + 2$, dass 3 aus 8 abzuziehen, und 2 zum Ergebnis zu addieren ist). Die Bezugnahme solcher Konventionen führen zu einer Form eines Ausdrucks, die ich seine *»konventionelle Form«* nennen werde.

Aber am üblichsten wird vielleicht eine *»nicht-konsequent-konventionelle Form«* der Ausdrücke benutzt, wobei neben den in der konventionellen Form notwendigen Einklammerungen auch überflüssige Einklammerungen verwendet werden dürfen, aber nicht müssen (z.B. wird in der Programmierungssprache »Algol 60« mit einem Ausdruck $\mathfrak{a}$ grosszügig immer auch $(\mathfrak{a})$ als Ausdruck betrachtet).

Es kommt nun darauf an, die verschiedenen Formen eines Ausdrucks aufeinander zu übersetzen (auf die »halbeingeklammerte Form« von KALMÁR komme ich nach seiner Publikation zurück).

In der I. Mitteilung dieser Arbeit[1] wurde die Primitiv-Rekursivität der Übersetzungstransformationen zwischen der volleingeschachtelten und der

---

[1] *Ebanda* **7** (1962) S. 69—78.

LUKASIEWICZschen klammernfreien Form auf einer geeigneten Wortemenge gezeigt. In einer Arbeit, die im Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae im Erscheinen ist[2], habe ich dasselbe auch für andere klammernfreie Bezeichnungsweisen gezeigt, wobei als Hilfsmittel eine Linearisierung des KANTOROWITSCH-schen Ausdrucks-Graphen verwendet wurde. Derselbe Hilfsmittel eignet sich für alle solche Übersetzungstransformationen; so auch zwischen volleingeklammerten, konventionellen und nicht-konsequent-konventionellen Formen der Ausdrücke, worum es sich in dieser Arbeit handelt.

2. Betrachten wir z.B. den folgenden logischen volleingeklammerten Ausdruck (kurz »*v-Ausdruck*«):

$$(x \vee (y \,\&\, z)) \vee (u \rightarrow \neg v).$$

Da hier das Hauptoperationszeichen $\vee$ ist, und die beiden Glieder der Hauptoperation die (durch Weglassen der äussersten Klammern erhaltenen) »Enthüllten« der beiden Seiten dieses Zeichens:

$$x \vee (y \,\&\, z) \quad \text{und} \quad u \rightarrow \neg v,$$

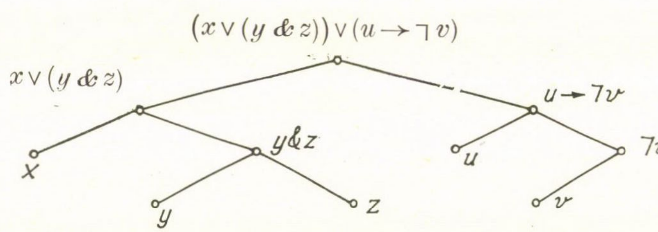
mit den Hauptoperationszeichen $\vee$ bzw. $\rightarrow$ sind, wo zum ersten

$$x \quad \text{und} \quad y \,\&\, z,$$

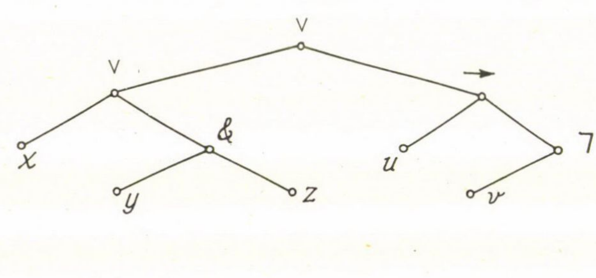
zum zweiten

$$u \quad \text{und} \quad \neg v$$

als Glieder gehören, wobei das Hauptoperationszeichen von $y \,\&\, z$ natürlich $\&$ ist, mit den Gliedern y und z, und die Hauptoperation von $\neg v$ natürlich $\neg$ ist, mit dem einzigen Glied v, so kann unserem Ausdruck der folgende Hilfsgraph zugeordnet werden:



Werden nun diejenigen der in den Knotenpunkten stehenden Teilausdrücke, welche auch Operationszeichen enthalten, durch ihre Hauptoperationszeichen ersetzt, so entsteht im wesentlichen der KANTOROWITSCH-sche Graph:



In meiner in Fussnote[2] zitierten Arbeit habe ich die derartigen Graphen (die gerichtete Wurzelbäume sind, mit einer gegebenen Reihenfolge der aus je einem Knotenpunkt hinauslaufenden Kanten) folgenderweise durch Paarenmengen linearisiert: Den Knotenpunkten sollen Variationen gewisser Elemente entsprechen — hier, wo höchstens zweigliedrige Operationen vorkommen, genügen dazu zwei Elemente a und b — und zwar so, dass dem Ausgangspunkt (dem Wurzelpunkt) die mit Λ bezeichnete »leere Variation« (»Variation 0-ter Klasse«) entspricht, und falls einem Knotenpunkt, dem ein 1- bzw. 2-gliedriges Operationszeichen zugeordnet ist, die Variation v entspricht, so dem Endpunkt der aus diesem Knotenpunkt hinauslaufenden Kante die Variation va entspricht, bzw. den Endpunkten der aus ihm hinauslaufenden beiden Kanten der Reihe nach die Variationen va und vb entsprechen. So gehört dann zu jedem Knotenpunkt ein Paar aus einem Operationszeichen und einer Variation, und die Menge dieser Paare charakterisiert den Ausdrucks-Graphen vollständig. Die Paarenmenge unseres Beispiels besteht aus folgenden Paaren:

$$(\vee, \Lambda),\ (\vee, a),\ (\rightarrow, b),\ (x, aa),\ (\&, ab),\ (u, ba),\ (\neg, bb),$$

$$(y, aba),\ (z, abb),\ (v, bba).$$

Diese Reihenfolge, wobei eine Variation höherer Klasse immer später an die Reihe kommt, und die Variationen derselben Klasse in der üblichen Reihenfolge stehen, werde ich, wie in meiner in der Fussnote[2] zitierten Arbeit, mit (P) bezeichnen; die so geordnete Paarenmenge werde ich kurz »Paarenfolge« des Ausdrucks nennen. Damit hat man eine Linearisierung des KANTOROWITSCH-schen Graphen.

3. In einem Ausdruck in konventioneller Form (kurz *»k-Ausdruck«)* kommen keine überflüssige äussere Klammern vor; ein k-Ausdruck ist seine eigene »Enthüllte«. In einem nicht-konsequent-konventionellen Ausdruck (kurz *»n-k-k-Ausdruck«)* — unter diesem Begriff fallen als Späzialfälle auch die Begriffe des v-Ausdrucks und des k-Ausdrucks — können dafür sogar mehrere überflüssige äussere Klammernpaare vorkommen; man enthüllt einen solchen Ausdruck durch sukzessive Streichung dieser Klammernpaare. Beginnt ein Ausdruck $\mathfrak{a}$ mit keinem (-Zeichen, so gilt für seine *Enthüllte* $^*\mathfrak{a}$ natürlich $^*\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Dasselbe gilt auch, falls $\mathfrak{a}$ mit (beginnt, aber noch bevor von links nach rechts gehend sein letztes Zeichen erreicht ist, die Anzahl der (- und) - Zeichen ausgeglichen wird. Wenn dies *nur* dann geschieht, wenn das letzte Zeichen von $\mathfrak{a}$ erreicht wird, dann hat man, um $^*\mathfrak{a}$ zu erhalten, das äusserste Klammernpaar wegzulassen, und dieses Verfahren auf den übrigbleibenden Teilausdruck so oft wie möglich zu iterieren.

4. Um das Hauptoperationszeichen eines Ausdrucks herauszufinden, hat man den Aufbau der Ausdrücke näher zu betrachten.

Nehmen wir an, dass eine unendliche Folge $\mathfrak{V}$ von Variablen gegeben ist, ferner endlich viele von diesen abweichende Zeichen

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_r$$

für eingliedrige Operationen, die gleich stark binden, aber stärker als eine

[2] Über die Primitiv-Rekursivität einiger den Aufbau von Formeln charakterisierenden Wortfunktionen. (Eingegangen am 24. Mai, 1962.)

zweigliedrige Operation, ferner endlich viele, von diesen und von den Variablen verschiedene Zeichen

$$\begin{array}{l} \Theta_1^{(1)}, \Theta_2^{(1)}, \ldots, \Theta_{r_1}^{(1)}, \\ \Theta_1^{(2)}, \Theta_2^{(2)}, \ldots, \Theta_{r_2}^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Theta_1^{(l)}, \Theta_2^{(l)}, \ldots, \Theta_{r_l}^{(l)}, \end{array}$$

für zweigliedrige Operationen, von welchen die mit demselben oberen Index gleich stark binden, und $\Theta_{i_1}^{(j_1)}$ bei jedem i_1 und i_2 für $j_1 < j_2$ stärker als $\Theta_{i_2}^{(j_2)}$ bindet.

Ein beliebiger Ausdruck (worunter hier nur eine aus Variablen, Operationszeichen und Klammern bestehende Zeichenreihe verstanden wird) soll »*auf j-ter Stufe abgeschlossen*« genannt werden, wenn darin vor jedes vorkommende Zeichen $\Theta_{i'}^{(j')}$ mit $j' > j$ mehr Anfangsklammern als Endklammern stehen.

Unter der »*abgeschlossenen Hülle j-ter Stufe*« $\mathfrak{a}^{j*}$ eines Ausdrucks $\mathfrak{a}$ soll für auf j-ter Stufe angeschlossenes $\mathfrak{a}$ dieses $\mathfrak{a}$ selbst, und sonst $(\mathfrak{a})$ verstanden werden.

Ein Ausdruck heisst abgeschlossen, falls darin vor jedes vorkommende Zeichen Θ_i^j mehr Anfangsklammern als Endklammern stehen. Die abgeschlossene Hülle $\mathfrak{a}^*$ eines Ausdrucks $\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{a}$ selbst, falls $\mathfrak{a}$ abgeschlossen ist, und $(\mathfrak{a})$ sonst.

Es ist klar, dass ein Ausdruck $\mathfrak{a}$ dann und nur dann auf j-ter Stufe bzw. schlechthin abgeschlossen ist, falls $\mathfrak{a}^{j*} = \mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$ gilt.

Mit diesen Begriffen kann der Begriff »*n-k-k-Ausdruck*« wie folgt definiert werden:

1) Jede Variable ist ein n-k-k-Ausdruck.

2) Ist $\mathfrak{a}$ ein n-k-k-Ausdruck, so ist für jedes $1 \leqq i \leqq r$ auch $\Delta_i\, \mathfrak{a}^*$ ein n-k-k-Ausdruck.

3) Sind $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ n-k-k-Ausdrücke, so ist für jedes $1 \leqq j \leqq l$; $1 \leqq i \leqq r_j$ auch $\mathfrak{a}_1^{j*}\, \Theta_i^{(j)}\, \mathfrak{a}_2^{(j-1)*}$ ein n-k-k-Ausdruck.

4) Mit $\mathfrak{a}$ ist auch $(\mathfrak{a})$ ein n-k-k-Ausdruck.

5) Alle n-k-k-Ausdrücke entstehen durch endlichmalige Verwendung von 1), 2), 3) und 4).

Wenn 4) weggelassen, und für »n-k-k-Ausdruck« überall »k-Ausdruck« gesetzt wird, so geht diese Definition in die Definition der k-Ausdrücke über.

Bei dem Aufbau der v-Ausdrücke werden alle zweigliedrigen Operationen als gleich stark bindend betrachtet (so hat es keinen Sinn, diese mit oberen Indizes zu versehen), und es wird auch keine Reihenfolge ihrer Verwendung ausgezeichnet. Hier ist also jedes $\mathfrak{a}^{j*}$ mit $\mathfrak{a}^*$ gleichbedeutend, und so wird aus der Definition der k-Ausdrücke die Definition der v-Ausdrücke, wenn für $\mathfrak{a}^{j*}$ und $\mathfrak{a}^{(j-1)*}$ darin $\mathfrak{a}^*$, und für »k-Ausdruck« überall »v-Ausdruck« gesetzt wird.

5. Nun erhält man das Hauptoperationszeichen eines beliebigen n-k-k-Ausdrucks $\mathfrak{a}$ aus seiner Enthüllten $^*\mathfrak{a}$ wie folgt:

(1) Ist diese der Form

$$^*\mathfrak{a} = \Delta_i\, \mathfrak{a}',$$

wobei $\mathfrak{a}'^* = \mathfrak{a}'$ ist, so ist dieses Δ_i das Hauptoperationszeichen von $\mathfrak{a}$.

(2) Sonst (angenommen natürlich, dass $\mathfrak{a}$ überhaupt Operationszeichen enthält) hat man zunächst in $*\mathfrak{a}$ jene $\Theta_i^{(j)}$-Zeichen mit möglichst grösstem oberen Index zu suchen, deren beide Seiten je genau so viele (-Zeichen als)-Zeichen enthalten. (Für einen v-Ausdruck enthält $*\mathfrak{a}$ einen einzigen solchen Zeichen.) Das Hauptoperationszeichen von $\mathfrak{a}$ ist dann dasjenige dieser Zeichen, welches von rechts nach links gehend zuerst an die Reihe kommt.

Im Fall (1) ist das einzige Glied der Hauptoperation die Enthüllte des nach dem Hauptoperationszeichen Δ_i stehenden Ausdrucks.

Im Fall (2) sind die Glieder des Hauptoperations die Enthüllten der beiden Seiten des Hauptoperationszeichens $\Theta_i^{(j)}$.

6. Man erhält nun folgenderart die Paarenfolge eines beliebigen n-k-k-Ausdrucks:

Erst bildet man eine Hilfsfolge (im Sinne des Anfangs von Nr. 2). Das erste Paar davon ist $(*\mathfrak{a}, \Lambda)$. Angenommen, dass die ersten n Paare schon als Paare von Enthüllten gewisser n-k-k-Ausdrücke und Variationen der Elemente a und b gebildet sind, bildet man das $n+1$-te Paar wie folgt: Ist bisher ein Paar $(*\mathfrak{a}_1', v)$ vorgekommen, wo $*\mathfrak{a}'$ auch Operationszeichen enthält, und entweder I. die Variation va in keinem bisherigen Paar vorkommt, oder II. das Hauptoperationszeichen von $\mathfrak{a}'$ zweigliedrig ist, und va in einem bisherigen Paar vorkommt, aber vb in keinem, dass sei $(*\mathfrak{a}_1', v_1)$ das erste solche Paar; besteht dafür Fall I, dann sei der erste Komponent des $n+1$-ten Paars das erste (oder einzige) glied des Hauptoperations von $\mathfrak{a}_1'$, und sein zweiter Komponent $v_1\,a$; besteht für $(*\mathfrak{a}_1', v_1)$ Fall II, dann sei der erste Komponent des $n+1$-ten Paars das zweite Glied der Hauptoperation von $\mathfrak{a}_1'$, und sein zweiter Komponent $v_1\,b$. Nach endlich vielen Schritten wird schon kein Paar mit I oder II vorhanden sein; dann ist die Bildung der Hilfsfolge beendet. Nun hat man die ersten Komponenten der Paare durch ihre Hauptoperationszeichen zu ersetzen. (Es empfiehlt sich das Verfahren am Beispiel von Nr. 2 auszuprobieren.)

Wie man aus klammernfreien Ausdrücken ihre Paarenmengen (und umgekehrt) — und durch verschiedene Anordnungen dieser Mengen auch ihre unmittelbare Übersetzungen auf einander — erhält, das habe ich in meiner in Fussnote[2] zitierten Arbeit gezeigt.

7. Aus der Paarenfolge (in der Reihenfolge (P)) eines Ausdrucks erhält man dann ihre konventionelle oder volleingeklammerte Form (auf die man übersetzen will) wie folgt:

Wir ersetzen die Folge Schritt für Schritt durch eine andere. Bei jedem Schritt suchen wir in der gerade vorhandenen Folge von rechts nach links das erste solche Paar $(\mathfrak{v}, v)$, worin $\mathfrak{v}$ ein Operationszeichen ist. Ist darin $\mathfrak{v}$ ein Δ_i, dann soll $\mathfrak{v}$ durch $\mathfrak{v}\mathfrak{k}^*$ ersetzt werden, wo $\mathfrak{k}$ der erste Komponent des Paars mit dem zweiten Komponent va ist (ein solches Paar gibt es unbedingt). Ist $\mathfrak{v} = \Theta_i^{(j)}$, dann gibt es unbedingt Paare $(\mathfrak{k}_1, va)$ und $(\mathfrak{k}_2, vb)$, und $\mathfrak{v}$ soll durch $\mathfrak{k}_1^{j*}\ \Theta_i^{(j)}\mathfrak{k}_2^{(j-1)*}$ bzw. durch $\mathfrak{k}_1^*\ \Theta_i^{(j)}\ \mathfrak{k}_2^*$ ersetzt werden, je nachdem man die konventionelle oder die volleingeschachtelte Form des Ausdrucks erhalten will. Die anderen Paare bleiben dabei unberührt. Nach endlich vielen Schritten kommt man so zu einer Folge, in welcher schon kein Paar mit einem blossen Operationszeichen als erster Komponent vorkommt. Dann ist der erste Komponent des ersten Paars der Folge die gesuchte Form des Ausdrucks. (Man prüfe dies am Beispiel der Nr. 2 nach.)

8. Nun kommt es darauf an, zu zeigen, dass die dargestellten Übersetzungs-Algorithmen auf einer geeigneten Wortemenge primitiv-rekursiv sind. Ich zähle hier erst auf, was ich aus der rekursiven Theorie der Wortemengen über den in der I. Mitteilung Verwendeten, deren Kenntnis ich hier voraussetze, noch benutzen werde.[3] Betreffs der Kenntnisse über zahlentheoretische rekursive Funktionen berufe ich mich auf mein Buch.[4]

Zuerst möchte ich an die folgenden, auch in der I. Mitteilung erwähnten Tatsachen erinnern:

1) Für ein Wort $x = a_1 a_2 \ldots a_n$, wo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Buchstaben sind, ist $o(x) = n$.

2) Die natürlichen Zahlen

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots$$

können etwa mit

$$\Lambda, \quad (, \quad ((, \ldots$$

identifiziert werden ((wird unter den Buchstaben unseres Alphabets vorkommen). Alle primitiv-rekursive zahlentheoretische Funktionen können zu primitiv-rekursive Funktionen einer bebliebigen Wortemenge erweitert werden.

3) In jeder Wortemenge gibt es primitiv-rekursive Funktionen

$$e_i(x), \quad l_i(x), \quad {}^{-i}x, \quad x^{-i},$$

die für eine natürliche Zahl $i \leq o(x)$ der Reihe nach: das aus den ersten bzw. letzten i Buchstaben von x bestehende Wort, den Rest von x nach Weglassung von $e_i(x)$ vom Anfang, bzw von $l_i(x)$ vom Ende von x bedeuten.

4) Es ist y ein Vorgänger von x, in Zeichen $y \leq x$, falls y ein Abschnitt (ein zusammenhängender Bestandteil) von x ist.

5) Einer Wortefolge $x_0, x_1, \ldots, x_n$ kann in jeder Wortemenge ein Wort $c_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ als für festes n primitiv-rekursive Funktion derart zugeordnet werden, dass mit primitiv-rekursivem $k_i(x)$ und long (x) für $i = 0, 1, \ldots, n$

$$x_i = k_i(c_n(x_0, \ldots, x_n)) \qquad \text{und} \qquad n = \operatorname{long}(c_n(x_0, \ldots, x_n))$$

gilt.

Ausser den in der I. Mitteilung aufgezählten Kenntnissen werde ich hier noch die Primitiv-Rekursivität in einer beliebigen Wortemenge der folgenden Funktionen gebrauchen:

6) $b_i(x)$, das für eine natürliche Zahl i den i-ten Buchstaben von x bedeutet.

7) $h^{(b)}(x)$, für einen beliebigen festen Buchstaben b, das die Anzahl des Auftretens von b in x angibt.

8) subst (x, y, z), welches für $y \neq \Lambda$ das aus x entstehende Wort bedeutet, wenn darin von rechts nach links gehend jedes vorkommen von y durch z ersetzt wird, vorausgesetzt, dass dies kein neues Vorkommen von y in x zustandebringt.

---

[3] Näheres darüber siehe (neben[2]): R. PÉTER, Über die Verallgemeinerung der Theorie der rekursiven Funktionen für abstrakte Mengen geeigneter Struktur als Definitionsbereiche, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, I. Teil **12** (1961) S. 271–314; II. Teil **13** (1962) S. 1–24.

[4] R. PÉTER, Rekursive Funktionen (Budapest, 1957), 2-te Auflage.

9) Mit einer Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ ist immer auch eine solche Funktion von $x_1, \ldots, x_n, i$ primitiv-rekursiv, die für eine natürliche Zahl i die i-te Iteration der Funktion an der Stelle $x_1, \ldots, x_n$ angibt.

10) Mit einer Funktion $\bar{f}(x_1, \ldots, x_n, y)$ ist auch die Funktion

$$c^{\bar{f}}(x_1, \ldots, x_n, y) = c_{o(y)}(\bar{f}(x_1, \ldots, x_n, 0), \bar{f}(x_1, \ldots, x_n, 1), \ldots, \bar{f}(x_1, \ldots, x_n, o(y)))$$

primitiv-rekursiv.

9. Das Alphabet $\mathfrak{A}$ unserer Wortmenge $\mathfrak{M}$ enthält also die Elemente der Variablenmenge $\mathfrak{V}$, die Zeichen Δ_i und $\Theta_i^{(j)}$ der 1- und 2-gliedrigen Operationen, die — als Buchstaben des Alphabets fettgedruckten — Klammerzeichen, und die von all diesen verschiedenen Buchstaben a und b. Man sieht leicht, wie in der I. Mitteilung, dass die charakteristischen Funktionen

$$f_{\mathfrak{V}}(x), \quad f_{\Delta}(x), \quad f_{\Theta}(x), \quad f_{\Theta^{(j)}}(x)$$

der Beziehungen: »eine Variable, bzw. eines der Δ, bzw. eines der Θ, bzw. eines der $\Theta^{(j)}$ zu sein« primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$ sind.

Die Enthüllte $^*x$ eines Wortes x kann nach Nr. 3 z. B. durch die $o(x)$-te Iterierte der Hilfsfunktion

$$h(x) = \begin{cases} ({}^{-1}x)^{-1}, \text{ falls } o(x) = \mu_i \left[i \leq o(x) \,\&\, h^{(\mathbf{(})}(e_i(x)) = h^{(\mathbf{)})}(e_i(x))\right], \\ x \text{ sonst} \end{cases}$$

als in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive Funktion definiert werden.

Auch die Beziehungen $B_{Ag}(x)$, $B_{Ag}^{(j)}(x)$: »abgeschlossen, bzw. auf j-ter Stufe abgeschlossen zu sein«, und die Funktionen x^*, x^{j*} (die abgeschlossene Hülle, bzw. die abgeschlossene Hülle j-ter Stufe von x) sind primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$, da sie der Reihe nach wie folgt definiert werden können (siehe Nr. 4):

$$B_{Ag}(x) \equiv (i)\left[i \leq o(x) \rightarrow (f_{\Theta}(b_i(x)) = \Lambda \rightarrow h^{(\mathbf{)})}(e_i(x)) \prec h^{(\mathbf{(})}(e_i(x)))\right],$$

$$B_{Ag}^{(j)}(x) \equiv (i)\,(j')\Big[i \leq o(x) \rightarrow \Big(j' \leq l \rightarrow \big(f_{\Theta^{(j)}}(b_i(x)) = \Lambda \rightarrow (j \prec j' \rightarrow$$

$$\rightarrow h^{(\mathbf{)})}(e_i(x)) \prec h^{(\mathbf{(})}(e_i(x)))\big)\Big)\Big],$$

$$x^* = \begin{cases} x, & \text{falls } B_{Ag}(x) \\ \mathbf{(}x\mathbf{)} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$x^{j*} = \begin{cases} x, & \text{falls } B_{Ag}^{(j)}(x) \\ \mathbf{(}x\mathbf{)} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hiernach ist auch die Beziehung $B_{n-k-k}(x)$ »ein n-k-k-Ausdruck zu sein« (und ähnlich auch die Beziehungen $B_k(x)$ und $B_v(x)$ »ein k-Ausdruck bzw. ein v-Ausdruck zu sein«) primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$, laut der Definition ihrer charakteristischen Funktion $f_{n-k-k}(x)$ (siehe Nr. 4):

$$f_{n-k-k}(\Lambda) = \Lambda$$

und für $c \in \mathfrak{B}$

$$f_{n-k-k}(xc) = \begin{cases} \Lambda, \text{ falls } f_{\mathfrak{B}}(xc) = \Lambda \vee (f_\Delta(b_1(x)) = \Lambda \mathbin{\&} B_{Ag}({}^{-1}(xc)) \mathbin{\&} \\ \quad \mathbin{\&} f_{n-k-k}({}^{-1}(xc)) = \Lambda) \vee (Ey_1)(Ey_2)(Ey)(Ej)\,[y_1, y \leqq x \mathbin{\&} \\ \quad \mathbin{\&} y_2 \leqq {}^{-1}(xc) \mathbin{\&} j \leqq l \mathbin{\&} B^{(j)}_{Ag}(y_1) \mathbin{\&} B^{(j \dot{-} 1)}_{Ag}(y_2) \mathbin{\&} \\ \quad \mathbin{\&} f_{n-k-k}(y_1) = f_{n-k-k}(y_2)\, f_{\Theta^{(j)}}(y) = \Lambda \mathbin{\&} x = y_1 y y_2] \vee \\ \quad \vee (Ey)\,[y \leqq x \mathbin{\&} f_{n-k-k}(y) = \Lambda \mathbin{\&} x = \mathbf{(}\, y\, \mathbf{)}] \\ \mathbf{(} \text{ sonst,} \end{cases}$$

die eine Wertverlaufsrekursion ist (das zeigt man wie in den ähnlichen Fällen der I. Mitteilung).

10. Nach dieser Definition sind für ein n-k-k-Ausdruck folgende drei Fälle zu unterscheiden:

1) x enthält keine Operationszeichen, d.h. es besteht die Beziehung:

$$B_{\mathfrak{B}}(x) \equiv f_{\mathfrak{B}}(^*x) = \Lambda .$$

2) Das Hauptoperationszeichen von x ist ein Δ-Zeichen d.h. es besteht nach Nr. 5 die Beziehung

$$B_\Delta(x) \equiv f_\Delta(b_1(^*x)) = \Lambda \mathbin{\&} ({}^{-1}(^*x))^* = {}^{-1}(^*x) .$$

3) Wenn keines dieser Beziehungen besteht, diese Eigenschaft soll mit $B_\Theta(x)$ bezeichnet werden (diese Beziehung ist mit den vorangehenden auch primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$), da in diesem Fall das Hauptoperationszeichen von x ein Θ-Zeichen ist.

In Fall 3) brauchen wir nach Nr. 5 zur Definition des Hauptoperationszeichens von x die folgenden Hilfsdefinitionen:

Sei $B_{O_p}(j, i, x)$ die Beziehung: »der i-te Buchstabe von $^*x$ ist ein $\Theta^{(j)}$-Zeichen, dessen beide Seiten genau so viele (- als)-Zeichen enthalten«. Dann ist

$$B_{Op}(j, i, x) \equiv f_{\Theta^{(j)}}(b_i(^*x)) = \Lambda \mathbin{\&} h^{(()}(e_i(^*x)) = h^{())}(e_i(^*x)) \mathbin{\&} h^{(()}({}^{-i}(^*x)) = \\ = h^{())}({}^{-i}(^*x)),$$

und das grösste j, zu welchem es ein solches i gibt, ist

$$j(x) = \mu_j \left[j \leqq l \mathbin{\&} (Ei)\,[i \leqq o(^*x) \mathbin{\&} B_{0_p}(j, i, x)] \mathbin{\&} (j')\, j' \leqq l \rightarrow (j < j' \rightarrow \right.$$
$$\left. \rightarrow (i)\,[i \leqq o(^*x) \rightarrow \neg\, B_{0_p}(j', i, x)])\right] ;$$

endlich ist das grösste (von rechts nach links gehend das erste) solche i, für welches mit diesem $j(x)$ die Beziehung $B_{O_p}(j(x), i, x)$ besteht:

$$i(x) = \mu_i \left[i \leqq o(^*x) \mathbin{\&} B_{0_p}(j(x), i, x) \mathbin{\&} (i')\left[i' \leqq o(^*x) \rightarrow (i < i' \rightarrow \right.\right.$$
$$\left.\left. \rightarrow \neg\, B_{0_p}(j(x), i', x))\right]\right] .$$

Dann lautet die Definition des Hauptoperationszeichens Hop(x) eines n-k-k-Ausdrucks x (die für keine Operationszeichen enthaltende Ausdrücke

x belanglos ist):

$$\mathrm{Hop}(x) = \begin{cases} \Lambda, \text{ falls } B_{\mathfrak{B}}(x) \\ b_1(^*x), \text{ falls } B_\Delta(x) \\ b_{i(x)}(^*x) \text{ sonst}, \end{cases}$$

daher ist diese eine in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive Funktion, und mit ihr auch die Glieder der Hauptoperationen, da diese nach Nr. 5 durch

$$Gl_1(x) = \begin{cases} {}^{-1}(^*x), \text{ falls } B_\Delta(x) \\ {}^*e_{i(x)\dot{-}1}(^*x), \text{ falls } B_\Theta(x) \\ \Lambda \text{ sonst} \end{cases}$$

und

$$Gl_2(x) = \begin{cases} {}^*({}^{-i(x)}(^*x)), \text{ falls } B_\Theta(x) \\ \Lambda \text{ sonst} \end{cases}$$

definirt werden können.

11. Nach Nr. 6 definiert man die Paare der Hilfsfolge zur Paarenfolge eines n-k-k-Ausdrucks wie folgt: Sei

$$f(x, \Lambda) = c_1(^*x, \Lambda)$$

und für $d \in \mathfrak{A}$, falls mit

$$B_1(x, y, y_1) \equiv \neg\, B_{\mathfrak{B}}(k_0(f(x, y_1)))\; \&\; (y_2)\,[y_2 \leqq y \rightarrow k_1(f(x, y_2)) \neq$$
$$\neq k_1(f(x, y_1))\, a]$$

und

$$B_2(x, y, y_1) \equiv B_\Theta(k_0(f(x, y_1)))\; \&\; (Ey_2)\,[y_2 \leqq y \,\&\, k_1(f(x, y_2)) =$$
$$= k_1(f(x, y_1))\, a]\; \&\; (y_2)\,[y_2 \leqq y \rightarrow k_1(f(x, y_2)) \neq k_1(f(x, y_1))\, b]$$

$$B(x, y, y_1) \equiv B_1(x, y, y_1) \vee B_2(x, y, y_1)$$

und

$$y_1(x, y) = \mu_{y_1}[y_1 \leqq y \,\&\, B(x, y, y_1)$$

gesetzt wird,

$$f(x, yd) = \begin{cases} c_1\Big(Gl_1\big(k_0(f(x, y_1(x, y)))\big),\; k_1(f(x, y_1(x, y)))\, a\Big), \\ \qquad \text{falls } B_1(x, y, y_1(x, y)) \\ c_1\Big(Gl_2\big(k_0(f(x, y_1(x, y)))\big),\; k_1(f(x, y_1(x, y)))\, b\Big), \\ \qquad \text{falls } B_2(x, y, y_1(x, y)) \\ \Lambda \text{ sonst.} \end{cases}$$

Man sieht leicht, dass dies eine Wertverlaufsrekursion ist. Die Werte der damit auch in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursiven Funktion

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), \text{ falls } B_{\mathfrak{B}}(k_0(f(x,y))) \\ \text{subst}\big(f(x, y), k_0(f(x, y)), \text{Hop}\,(k_0(f(x, y)))\big) \text{ sonst} \end{cases}$$

liefern die Paare der zu x gehörigen Paarenfolge; man hat nur noch die Anzahl dieser Paare zu bestimmen. Es ist klar, dass soviele Paare gebildet werden, wieviele Operationszeichen und Variablen in x vorhanden sind, wie lang also das durch Streichung der Klammern aus x übrigbleibende Wort ist. Diese Anzahl ist also

$$m(x) = o(\text{subst}(\text{subst}(x, \mathbf{(}, \Lambda), \mathbf{)}, \Lambda).$$

Daher ist das zur Paarenfolge vom n-k-k-Ausdruck x gehörige Wort

$$c^{\bar{f}}(x, m(x)),$$

also eine in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive Funktion von x.

12. Sei nun umgekehrt x das der Paarenfolge eines n-k-k-Ausdrucks zugeordnete Wort. Dann verfolgen wir den Gedankengang von Nr. 7.

Sei $B_o(x)$ die Beziehung: »die zu x gehörige Folge enthält ein Glied, worin der erste Komponent ein Operationszeichen ist«:

$$B_o(x) \equiv (E_i)\left[i \leqq \text{long}\,(x)\ \&\big(f_\Delta(k_0(k_i(x))) = \Lambda \vee f_\Theta(k_0(k_i(x))) = \Lambda\big)\right].$$

Von rechts nach links gehend geschieht das zum erstemal mit $i_1(x)$, wo

$$i_1(x) = \mu_i\Big[i \leqq \text{long}\,(x)\ \&\big(f_\Delta(k_0(k_i(x))) = \Lambda \vee f_\Theta(k_0(k_i(x))) = \Lambda\big)\,\&$$

$$\&\,(i')\Big[i' \leqq \text{long}\,(x) \rightarrow \Big(i < i' \rightarrow \Big(\neg\,\big(f_\Delta(k_0(k_i(x))) = \Lambda\big)\,\&\,\neg\,\big(f_\Theta(k_0(k_i(x))) = \Lambda\big)\Big)\Big)\Big]\Big]$$

Wir brauchen noch die Hilfsfunktionen

$$j(x) = \mu_j\,[j \leqq l\,\&\,f_{\Theta^{(j)}}(k_0(k_{i_1(x)}(x))) = \Lambda]$$

und

$$i_2(x, z) = \mu_i\,[i \leqq \text{long}\,(x)\,\&\,k_1(k_i(x)) = k_1(k_{i_1(x)}\,(x))\,z].$$

Dann sei

$$g(x, \Lambda) = x$$

und für $c \in \mathfrak{A}$

$$g(x, yc) = \begin{cases} \text{subst}\,\Big(g(x, y), k_0(k_{i_1{}'g(x,y))}(g(x, y))), \\ \qquad k_0(k_{i_1{}'g(x,y))}(g(x, y)))\,k_0^*(k_{i_2{}'g(x,y),a)}(g(x, y)))\Big), \\ \quad \text{falls } B_o(g(x, y))\,\&\,f_\Delta\big(k_0(k_{i_1{}'g(x,y)}(g(x, y)))\big) = \Lambda \\ \text{subst}\,\Big(g(x, y), k_0(k_{i_1(x,y)}(g(x, y))), \\ \qquad k_0^{j*}(k_{i_2{}'g(x,y),a)}(g(x, y)))\,k_0(k_{i_1{}'g(x,y))}(g(x, y))) \\ \qquad k^{(j\dot{-}1)*}(k_{i_2{}'g(x,y),b)}(g(x, y)))\Big), \\ \quad \text{falls } B_o(g(x, y))\,\&\,f_{\Theta^{(j)}}\big(k_0(k_{i_1(g(x,y))}(g(x, y)))\big) = \Lambda \\ g(x, y) \text{ sonst} \end{cases}$$

wo j für $j(g(x, y))$ steht (will man die volleingeschachtelte Form des Ausdrucks erhalten, dann soll hier statt $\Theta^{(j)}$ einfach Θ, statt beiden von $\mathfrak{k}_0^{j*}$ und $\mathfrak{k}_0^{(j-1)*}$ einfach $\mathfrak{k}_0^*$ stehen.

Wird für y eine mindestens so grosse Zahl gesetzt, wieviele Operationszeichen in x enthalten sind, z.B. $o(x)$, so erhält man immer dasselbe Wort: das der Hilfsfolge der solchen Paare zugeordnete Wort, deren erste Komponenten die den betreffenden Ausdruck aufbauenden Teilausdrücke sind. Der erste Komponent des ersten Gliedes dieser Folge ist der gesuchte k-Ausdruck (bzw. v-Ausdruck). Dieser ergibt sich daher als

$$k_0\bigl(k_0(g(x, o(x)))\bigr),$$

also, da die Definition von $g(x, y)$ eine primitive Rekursoin in $\mathfrak{M}$ ist, als eine in $\mathfrak{M}$ primitiv-rekursive Funktion.

13. So ergeben sich die hier betrachteten Übersetzungs-Algorithmen primitiv-rekursiv in $\mathfrak{M}$, da nach Nr. 11 die Paarenfolge eines n-k-k-Ausdrucks x (der speziell auch ein v-Ausdruck oder ein k-Ausdruck sein kann) primitiv-rekursiv von x abhängt, und nach Nr. 12 von der Paarenfolge sich sowohl die volleingeschachtelte als auch die konventionelle Form auf primitiv-rekursive Weise herstellen lässt.

Es würde keine neue Schwierigkeit bedeuten, wenn auch rechtsseitig zu setzende eingliedrige Operationszeichen (wie z.B. $n!$ in der Arithmetik) anzuwenden, und verschiedene Bindungskonventionen für eingliedrige Operationen zu berücksichtigen wären.

(Eingegangen: 15. August, 1962.)

О РЕКУРСИВНОСТИ ПЕРЕВОДНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. II-ОЕ СООБЩЕНИЕ: ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОГО МЕТОДА ЛИНЕАРИЗАЦИИ ГРАФА-ВЫРАЖЕНИЯ КАНТОРОВИЧА

R. PÉTER

Резюме

В первом сообщении [1] автор занималась переводом выражений «полностью скобочного» («volleingeschachtelt») вида в безскобочный вид Лукашевича и обратно. В одной, после этого написанной, еще не появившейся другой статье [2] автор дала для етих переводов и для переводов иных безскобочных выражений путём некоторой линеаризации графа-выражения Канторовича такой переводный алгорифм, который является примитивно-рекурсивным на одном подходящем множестве слов. Автор применяет в настоящем 11-ом сообщении этот метод в переводе некоторых «полностью скобочных», «конвенциональных» и «не консеквентно конвенциональных» видов выражений. В «конвенциональном» способе применения

скобок принимается во внимание, что некоторые операции по соглашению «связывают сильнее», чем другие и что однаково сильно связывающие операции принято выполнять идя слева направо. В наиболее часто встречающемся «неконсеквентно конвенциональном» способе применения скобок можно, но не обязательно нужно удалить любую из пар скобок становившейся излишными вследствие соглашения. Автор дает к каждому из этих трёх видов выражений алгорифм, преобразующий их в упомянутый линеаризованный вид графа-выражения; далее она также задаёт такой алгорифм, который преобразует линеаризованный вид некоторого графа-выражения будь то в полностью скобочный или в конвенциональный вид этого выражения. Таким образом, автор получает все переводные преобразования рассматриваемых видов и показывает, что они являются примитивно-рекурсивными на подходящем множестве слов.