EGY OLAJVEZETÉK TELEPÍTÉSI SZÉLSŐÉRTÉK FELADAT

HEINEMANN ZOLTÁN[1] és HOSSZÚ MIKLÓS[1]

1. Olajvezeték építésével kapcsolatban merül fel a következő probléma: adott n darab olajkút; hová telepítsük a tartályállomást, hogy a csővezeték építési költsége a legkisebb legyen. A feladatnak természetesen más megfogalmazás is adható. Az ilyen műszaki problémák csak egyszerűsítő feltevések mellett oldhatók meg matematikai eszközökkel, mivel számos tényezőtől függnek (pl. meglevő ipari létesítményektől, domborzati viszonyoktól stb.), így a megoldás végső soron a valóságos viszonyokat csupán megközelítő modellen alapszik. E bizonytalanság csökken, ha a telepítési szempontok egy része elhanyagolható. Pl. egy adott olajmező esetében a földgömb görbültségétől eltekinthetünk; azonkívül, minthogy az olajmező általában nem hegyvidéken helyezkedik el, közelítőleg sík terepet vehetünk alapul.

Ennek alapján egyszerűsítsük le a fent említett problémát a következőre: adott a síkban n darab pont; határozzuk meg azon pontot a síkban, melyre nézve az adott pontoktól mért távolságok súlyozott összege minimum. A probléma megoldására gyakran használt súlypont nem elégíti ki ezt a feltételt; ott a távolságok négyzetének súlyozott összege minimális. Súlynak a vezeték méterenkénti építési költségét kell választanunk. Ha az üzemeltetési költségeket is figyelembe kívánjuk venni, akkor már más jellegű problémára jutunk.

Egy síkbeli derékszögű koordináta rendszert választva, az adott pontok legyenek az $\boldsymbol{a}_k = x_k \boldsymbol{i} + y_k \boldsymbol{j}$, egy tetszőleges pont pedig az $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ helyzetvektor végpontjában. Egy tetszőleges pontra a költség az elmondottak értelmében az

$$(1) \qquad S = p_1 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_1| + \ldots + p_n |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_n| = \sum_{k=1}^{n} p_k \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$$

értékkel arányos, ahol $p_1, \ldots, p_n$ az adott pontokhoz tartozó súlyok.

Ebben a dolgozatban az $S(x, y)$ függvény szélsőértékét vizsgáljuk. A dolgozat nem használ fel az analízis elemein túlmenő matematikai ismereteket.

2. A $Z = S(x, y)$ kétváltozós függvény minimumának meghatározása céljából vizsgáljuk a függvény által az x, y, z koordináta rendszerben meghatározott felület geometriai tulajdonságait. A következő észrevételeket tehetjük:

---

[1] Miskolc, Nehézipari Műszaki Egyetem Matematikai Tanszék.

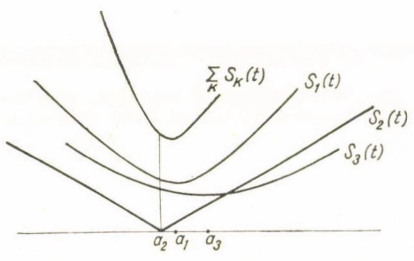
I. $z = S_k(x, y) = p_k \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_k \mid$ egy olyan kúpfelület egyenlete, melynek csúcsa az $\boldsymbol{a}_k$ vektor végpontjában van, tengelye párhuzamos a z tengellyel, fél nyílásszöge arc tg p_k (1. ábra), és a $z = 0$ sík fölött helyezkedik el.

II. A

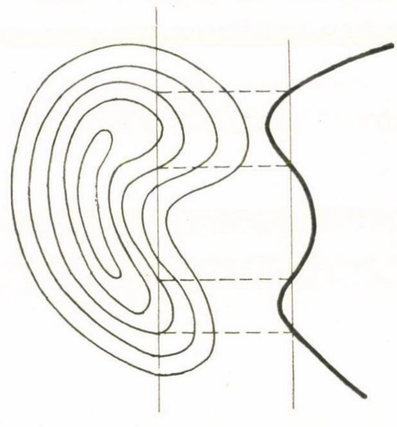
$$Z = S(x, y) = \sum_{k=1}^{n} S_k(x, y)$$

felület z-vel párhuzamos valamely (függőleges) síkmetszete, mint a kúpok tengelyeivel párhuzamos szelet: hiperbola ágak és egyenes szakaszok szuperpozíciója, alulról konvex, és feltéve, hogy az $\boldsymbol{a}_k$ vektorok végpontjai nem esnek egy egyenesbe, szigorúan konvex[2] (1. ábra).

III. A $z = S(x, y)$ felület $z = c$ síkmetszetei (szintvonalai) zárt, szigorúan konvex görbék, vagy elfajult esetben egyenes szakasz.



1. ábra



2. ábra

A magasságvonalak zártsága nyilvánvaló annak alapján, hogy $\boldsymbol{r}$ abszolút értéke növekedésével $\sum_{k=1}^{n} p_k \mid \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_k \mid$ bizonyos határon túl biztosan nagyobb, mint akármilyen megadott c érték. Ha a pontok nem esnek mindannyian egy egyenesre, akkor a szigorú konvexitás úgy látható be, hogy ellenkező esetben lehetne találni olyan húrt, amely a magasságvonalat kettőnél több pontban metszené (2. ábra), tehát az erre a húrra illesztett függőleges metszősík sem lehetne alulról szigorúan konvex, ellentétben a II. megállapítással.

[2] Egy görbe alulról konvex, ha bármely két pontja közti íve nem megy a két pontot összekötő húr fölé; alulról szigorúan konvex, ha bármely két pontja közti ív mindig a húr alatt van. Egy síkbeli zárt görbe konvex, ha bármely két pontján át fektetett húr a görbe által bezárt tartománynak csak belső vagy határpontjait tartalmazza; szigorúan konvex, ha bármely egyenes legfeljebb két pontban metszi a görbét. Nyilván, két alulról konvex függvény összege is ugyanilyen; egy alulról konvex és egy alulról szigorúan konvex függvény összege szigorúan konvex.

Elfajult esetben is csak úgy lehet a szintvonal egyenes szakasz, ha II. alapján a pontok mindannyian egy egyenesre esnek, és az illető szintvonal éppen szélsőérték (3. ábra).

IV. A $z = S(x, y)$ felületnek a következő típusú minimum pontjai lehetnek:

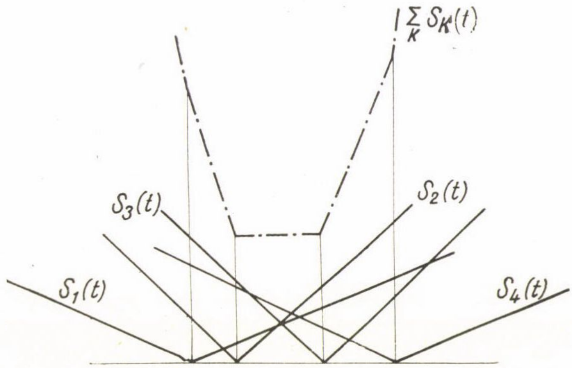
a) egyetlen, az $\boldsymbol{a}_k$ végpontoktól különböző pont felett;

b) az $\boldsymbol{a}_k$ vektorok valamelyikének végpontjánál;

c) két pontot összekötő egyenes szakaszon.

3. Vegyük sorra az *a)—c)* eseteket, és vizsgáljuk meg külön-külön, hogyan lehet a szélsőértéket meghatározni.

Legritkábban *c)* fordulhat elő: csak akkor, ha a pontok valamennyien egy egyenesre esnek, és pl. a páronként egyező súlyú pontok összekötő szaka-



3. ábra

szainak van közös része. E megjegyzés rögtön irányt is szab a minimum pontok meghatározására: az $S = \sum_{k=1}^{n} p_k \mid x - x_k \mid$ törtvonal függvény alsó pontját, illetve pontjait kell kijelölni (3. ábra).

Az *a)* esetben az $S(x, y)$ függvény minimum helyét a

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x} &= \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{x - x_k}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_n)^2}} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{y - y_k}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}} = 0 \end{aligned}\right.$$

egyenletek biztosan létező (és egyetlen) megoldása határozza meg.

A megoldás általános esetben egyszerű eszközökkel nem határozható meg, ezért közelítő módszerekre vagyunk utalva.

A nem lineáris egyenletrendszerek közelítő megoldása általában sok számítási munkát követel meg, ezért nehézkes és számunkra gyakorlatilag nem használható. Ebben a dolgozatban a későbbiek során a numerikus számítást lerövidítő eljárást tárgyalunk. A módszer hatékonysága lényegében a szintvonalak és függőleges síkmetszetek szigorú konvexitásán alapszik.

Az $S(\boldsymbol{r})$ skalár függvény a sík minden pontjához egy skalár értéket rendel, pontosabban $S(\boldsymbol{r})$ a síkban értelmezett potenciál függvény. Szintvonalai az S = konstans görbék és a legnagyobb változás irányát a grad S vektor adja.

Ennek értéke (1)-ből:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{grad} S = p_1(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_1)^\circ + \ldots + p_n(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_n)^\circ ,$$

ahol $-(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_k)^\circ$ a tetszőleges $\boldsymbol{r}$ pontból az $\boldsymbol{a}_k$-ba mutató egységvektort jelenti. A minimumot adó pontot (2)-nek megfelelően a

$$\text{(2a)} \qquad \operatorname{grad} S = \frac{\partial S}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial S}{\partial y}\boldsymbol{j} = 0$$

feltétel jelöli ki.

grad S a sík minden $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{a}_k$ vektorának végpontjában értelmezve van.

Az eddig elmondottakból megoldási lehetőségként egy mechanikai modell kínálkozik. Fúrjunk lyukakat egy vízszintesen elhelyezett lapon adott (arányosan zsugorított) vektorok végpontjain, és vezessük rajta keresztül egy csomópontból kiinduló zsinórokat. Terheljük az egyes szálakat az egyes pontoknak megfelelő p_k súllyal. A csomópontban ébredő erők ekkor éppen $-$grad S erőt adnak. Az ellenállásoktól mentesített rendszer csomópontja ez irányban elmozdulni igyekezvén (2a)-nak megfelelő helyzeten kerül egyensúlyba.[3]

grad S az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_k$ pontokban határozatlanná válik, az $\boldsymbol{a}_k$ pontok a sík szinguláris pontjai.

E matematikai modell alapján tárgyalható a *b)* eset is:

Tegyük fel, hogy a csomópont az $\boldsymbol{a}_k$ pontok közül az m-edikben van, onnan indul, vagy valami módon oda kerül.

Ha $\boldsymbol{a}_m$-et az $\boldsymbol{a}_k$ pontok közül kizárjuk, akkor a

$$\boldsymbol{q} = -\sum_{k \neq m} p_k(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_k)^\circ$$

erő hatására, annak irányában elmozdul a zsinegek csomópontja. Tetszőlegesen kicsiny elmozdulás hatására azonban $p_m\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_m)^0$ már meghatározott irányt nyer. Ha az $\boldsymbol{a}_m$ végpontjának van olyan környezete, melyben

$$\text{(5)} \qquad p_m = |p_m(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_m)^\circ| > \Big|\sum_{k \neq m} p_k(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_k)^\circ\Big| = |\boldsymbol{q}|$$

érvényes, akkor a $\boldsymbol{q}$ és $-p_m\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_m)^\circ$ erők együttes hatására az $\boldsymbol{r}$ végpontja $\boldsymbol{a}_m$ végpontja irányába közeledve mozdul el; ebben az esetben $S(\boldsymbol{a}_m)$ az $S(\boldsymbol{r})$-nek minimuma, míg az ellenkező esetben biztosan nem az.

Minthogy $\boldsymbol{q}$ az $\boldsymbol{r}$-nek folytonos függvénye az $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_m$ hely környezetében is, $\boldsymbol{r}$ kicsiny változásával keveset változik, tehát a *b)* esetben végső megállapításként leszűrhetjük a következőt: A

$$\text{(5')} \qquad p_m > \Big|\sum_{k \neq m} p_k(\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_m)^\circ\Big|$$

egyenlőtlenség teljesülése szükséges és elegendő ahhoz, hogy éppen az $\boldsymbol{a}_m$ vektor végpontján legyen S minimális.

---

[3] A modell alapján a súrlódás ellenállások, valamint a csomópont merevsége miatt a gyakorlatban szükséges pontosságú eredményt adó analóg gép nem készíthető.

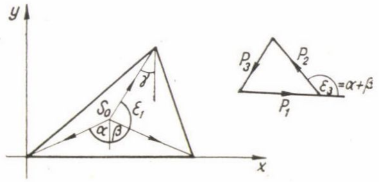
4. Nézzük most (2) megoldását egy jól ismert példán pl. három pont esetében. A koordináta rendszert válasszuk úgy, hogy a háromszög egyik csúcsa a kezdőpontba essék és egyik oldalával az x tengelyen feküdjön (4. ábra). Ekkor az

$$S(x,y) = p_1\sqrt{x^2+y^2} + p_2\sqrt{(x-x_2)^2+y^2} + p_3\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}$$

súlyfüggvény minimumát a

$$\frac{\partial S}{\partial x} = p_1\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + p_2\frac{x-x_2}{\sqrt{(x-x_2)^2+y^2}} + p_3\frac{x-x_3}{\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^3}},$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = p_2\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + p_2\frac{y}{\sqrt{(x-x_2)^2+y}} + p_3\frac{y-y_3}{\sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_2)^2}}$$



4. ábra

egyenletnek elegettevő pontban kell keresni. Az ábrán látható jelölések szerint

$$p_1 \sin\alpha - p_2 \sin\beta + p_3\cos\gamma = 0\,,$$

$$p_2\cos\alpha - p_2\cos\beta + p_3\sin\gamma = 0\,;$$

négyzetre emelés, majd összeadás után

$$p_3^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\,,$$

vagyis

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{p_3^2 - p_1^2 - p_2^2}{2p_1p_2} = \cos\varepsilon_3\,, \quad \varepsilon_3 = \alpha + \beta$$

érvényes. Itt ε_3 a p_1, p_2, p_3 oldalakkal szerkesztett háromszög p_3-mal szemben fekvő szögének kiegészítő szöge (4. ábra); ugyanilyen módon számítható, ill. szerkeszthető ε_1 és ε_2[4]. Az adott háromszög oldalai fölé ezen szögekkel

---

[4] RAISZ Iván felhívta a figyelmünket, hogy az ε_k szögek minden levezetés nélkül egyszerűbben nyerhetők a $p_k(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_k)$ erővektorok (2a) záródási feltételéből, melynek alapján a rögtön a 4. ábrán szereplő háromszöget kapjuk. Különleges esetek részletes vizsgálatával itt nem foglalkozunk, azt elvégezte FORRAI Sándor [3]. Ő hozta tudomásunkra e kérdés megoldásának fontosságát a bányászatban és a bányászati szakirodalomban ezirányban fellelhető [1], [2] eredményeket. Az említett dolgozatok közül [2] bizonyítás nélkül egy közelítő eljárást ad (2) megoldására; [1] egy tartományra tudja leszűkíteni a síknak azt a részét, melyen belül az $S^m = \sum_{k=1}^{n} p_k\,|\,\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_k\,|^m$ függvény szélsőértékét adó vektorok egyáltalán lehetnek. Itt megjegyezzük, hogy módszerünkkel is nemcsak $m = 1$ esetén lehetséges a szélsőérték tetszőleges pontossággal való megközelítése.

szerkesztett látókörök metszéspontja adja a keresett, (2)-t kielégítő pontot, melyben, ha a háromszög belsejébe esik, S értéke nyilván minimális. Ha a látókörök egymást nem belső pontban metszik, akkor a háromszög egyik csúcspontjában a legkisebb S értéke, éspedig amelyiken (5′) teljesül.

Négy pont esetében, ha $p_1 = p_3$, $p_2 = p_4$, a négyszög P_1P_3, P_2P_4 átlóinak metszéspontja adja a (2)-t kielégítő pontot, feltéve, hogy ez a négyszög belsejébe esik. Ez nyilvánvaló amiatt, hogy $p_1 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_1| + p_3 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_3|$ minimuma a P_1P_3 vonalszakasz felett van, míg $p_2 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_2| + p_4 |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_4|$-é P_2P_4 felett, és itt külön-külön mindegyik függvény állandó.

5. Ezek után rátérünk a már jelzett numerikus módszer tárgyalására. Ennek alapját az ismertetett mechanikai modell szolgáltatja. Választunk tetszőleges $\boldsymbol{r}_1$ kezdeti pontot. Mivel ezen pontban a minimum feltétel általában nem elégül ki, a potenciáltér hatására $-\text{grad}\, S(\boldsymbol{r}_1)$ irányában elmozdulás következik be: $-\lambda_1 \,\text{grad}\, S(\boldsymbol{r}_1)$ elmozdulás után $\boldsymbol{r}_2$ pontba kerülünk, innen $-\lambda_2 \,\text{grad}\, S(\boldsymbol{r}_2)$ után az $\boldsymbol{r}_3$ pontot nyerjük.

Vizsgáljuk, milyen feltétel mellett konvergál az

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{k+1} = \boldsymbol{r}_k - \lambda_k \,\text{grad}\, S_k, \; S_k = S(\boldsymbol{r}_k) \\ k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{6}$$

sorozat a $\text{grad}\, S = 0$ feltételt kielégítő pontba.

A $-\text{grad}\, S_k$ alacsonyabb szintvonalak felé mutat, és a $k+1$-edik pontra biztosan fennáll $S_{k+1} < S_k$, ha a $-\lambda_k \,\text{grad}\, S_k$ elmozdulás nem metszette mégegyszer az $S = S_k$ szintvonalat. Határozzuk meg tehát az

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_k - \lambda \,\text{grad}\, S_k, \qquad 0 \leqq \lambda \leqq \infty \tag{7}$$

egyenesnek az $S = S_k$ szintvonallal baló másik metszéspontját! Az $\boldsymbol{r}$ ezen kifejezését $S(\boldsymbol{r})$-be helyettesítve, egy

$$S(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i \sqrt{\alpha\lambda^2 + \beta_i\lambda + \gamma_i}, \quad \alpha = (\text{grad}\, S_k)^2, \; \beta_i = -2(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i)\,\text{grad}\, S_k, \; \gamma_i = (\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i)^2 \tag{8}$$

alakú kifejezést nyerünk. A (7) paraméteres egyenlet mutatja, hogy

$$S_k = S(\boldsymbol{r}_k) = S(\lambda)|_{\lambda=0} = \sum_{i=1}^{n} p_i \sqrt{\gamma_i}.$$

A metszéspont számítása céljából becsüljük meg felülről $S(\lambda)$-t. Minthogy mindegyik

$$S_i(\lambda) = p_i \sqrt{\alpha\lambda^2 + \beta_i\lambda + \gamma_i} = p_i \sqrt{\gamma_i} \left[1 + \left(\frac{\alpha}{\gamma_i}\lambda^2 + \frac{\beta_i}{\gamma_i}\lambda\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

hiperbola metszethez a $\lambda = 0$ pontban a binomiális sorfejtés alapján nyert

$$P_i(\lambda) = p_i \sqrt{\gamma_i} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\gamma_i}\lambda^2 + \frac{\beta_i}{\gamma_i}\lambda\right)\right]$$

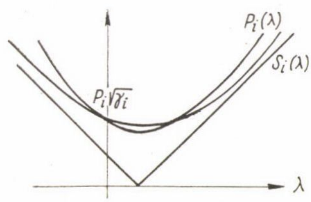
simuló parabola jó felső korlát (5. ábra), ezért nyilván[5]

$$S(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} S_i(\lambda) \leqq \sum_{i=1}^{n} P_i(\lambda) = P(\lambda)\,,$$

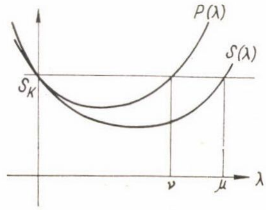
ahol az értelmezés folytán $P(0) = S(0) = S_k$.

Az $S = S_k$ szintvonallal való másik metszés tehát olyan μ paraméternél következik be, mely alulról megbecsülhető a $P(\lambda)$ függvénynek az S_k magasságú egyenessel való metszéspontjához tartozó ν paraméterrel (6. ábra), melyre tehát fennáll

$$P(\nu) = S(\mu) = S_k\,, \qquad \nu \leqq \mu\,.$$



5. ábra



6. ábra

Itt azonban ν könnyen számítható a $P(\nu) = S_k$ ill. részletesen: a

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sqrt{\gamma_i}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\gamma_i}\nu^2 + \frac{\beta_i}{\gamma_i}\nu\right)\right] + \sum_{i=1}^{n} p_i \sqrt{\gamma_i}$$

egyenlet

$$\nu = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \beta_i/\sqrt{\gamma_i}}{\alpha \sum p_i/\sqrt{\gamma_i}} = \frac{2\,\mathrm{grad}\, S_k \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \dfrac{\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|}}{(\mathrm{grad}\, S_k)^2 \sum\limits_{i=1}^{n} p_i/\sqrt{\gamma_i}} = \frac{2}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i/\sqrt{\gamma_i}}$$

gyökeként. Megjegyzendő, hogy

$$\boldsymbol{r}_k \neq \boldsymbol{a}_i$$

esetén (8) alapján $\gamma_i \neq 0$, következőleg $\nu(>0)$ számítható a kapott képlettel.

Minthogy végül az $S = S_k$ szintvonal belsejében biztosan kisebb S értéke S_k-nál, a

(9) $$\lambda_k = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i/\sqrt{\gamma_i}}$$

[5] Itt felhasználtuk azt a szemléletes, könnyen igazolható tényt, hogy az $S_i(\lambda)$ hiperbolát a $P_i(\lambda)$ parabola a $\lambda = 0$ és $\lambda = -\beta_i/\alpha$ pontokban érinti, de egyébként felette helyezkedik el (5. ábra).

paraméter választással (a húr felezőpontján) biztosan olyan vektorhoz jutunk a (6) sorozatban, melyre

$$S_{k+1} = S(\lambda) = S(\boldsymbol{r}_{k+1}) < S_k$$

fennáll.

Így a (6)—(9) alapján nyert sorozat monoton csökkenő. Alulról korlátos, monoton csökkenő sorozatnak azonban van határértéke. Ehhez az S_0 határértékhez tartozó szintvonalon a gradiens nem lehet 0-tól különböző, mert különben a megfelelő α, γ_i-vel képezett $P(\lambda)$ húrjának $\nu/2 \neq 0$ abszcisszájú felezőpontján lehetne találni S_0-nál kisebb S-et. Szóval az $S = S_0$ szintvonal csak egyetlen pontot tartalmaz, a keresett minimum pontot.

Ezen eljárás csupán az *a)* esetben alkalmazható.

A módszer előnye, hogy a (6) sorozat konvergenciája nem túlságosan érzékeny a grad S_k számítási pontosságára; így aztán pl. grafikus eljárással is könnyen lehet az $\boldsymbol{r}_k$ vektorhoz alkalmas, a grad S_k-tól nem sokban különböző vektort szerkeszteni, éspedig úgy, hogy $\boldsymbol{r}_k$ végpontjából az $\boldsymbol{a}_i$ vektorok végpontja felé p_i hosszúságú vektorokat rajzolunk, és szerkesztjük a kapott vektorok összegét.[6]

6. Minthogy (6), (8), (9) alapján

$$\boldsymbol{r}_{k+1} = \boldsymbol{r}_k - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i/\sqrt{\gamma_i}} \operatorname{grad} S_k = \boldsymbol{r}_k - \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|}} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i)}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|},$$

$$\boldsymbol{r}_{k+1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|}} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|} \boldsymbol{a}_i, \tag{10}$$

ezért az eljárás úgy is értelmezhető, hogy az $\boldsymbol{r}_{k+1}$ közelítés az $\boldsymbol{a}_i$ vektorok végpontjában elhelyezett $\frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|}$ súlyú pontok tömegközéppontja. Lásd [1, 5, 6]. VINCZE István hívta fel figyelmünket, hogy ennek alapján az $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots$ sorozat konvergenciája az

$$S(\boldsymbol{r}_{k+1}) < S(\boldsymbol{r}_k)$$

reláció következménye, mely igen egyszerűen bizonyítható a következő módon:[7] $\boldsymbol{r}_{k+1}$ éppen a

$$\varphi_k(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|} (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}_i)^2$$

---

[6] 50 kútból álló gázmező esetében, a szokásos telepítési viszonyok mellett 5—9 lépésben már megfelelő jó százalékos pontosság érhető el. A számítás menete digitális számológépre könnyen programozható.

[7] lásd: WEISZFELD [6].

összeg minimum helye (a súlypont ismert tulajdonsága alapján), tehát

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|} (\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{a}_i)^2 \leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|} (\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i)^2 = S(\boldsymbol{r}_k),$$

másrészt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|} (\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{a}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|} [|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i| + (|\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{a}_i| - |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|)]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i| + 2 \sum_{i=1}^{n} p_i |\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{a}_i| - 2 \sum p_i |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{(|\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{a}_i| - |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|)^2}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|} = 2\, S(\boldsymbol{r}_{k+1}) - S(\boldsymbol{r}_k) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{(|\boldsymbol{r}_{k+1} - \boldsymbol{a}_i| - |\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|)^2}{|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{a}_i|},$$

s e kettőt összehasonlítva valóban teljesül $S(\boldsymbol{r}_{k+1}) \leqq S(\boldsymbol{r}_k)$, ahol $\boldsymbol{r}_{k+1} \neq \boldsymbol{r}_k$ esetén nem állhat fenn egyenlőség.

VINCZE István [5] ezzel az eljárással határozta meg általánosabb ponthalmazok (görbék, tartományok) esetén a távolság hatványának bizonyos súlyfüggvénnyel képezett integráljának minimum helyét.

Megjegyzések. 1. Az S potenciáltér nívóvonalainak ortogonális trajektoriái azon vonalak, melyek mentén a grad S erő hatására az elmozdulás történik (esésvonalak). Ezek differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{\partial S}{\partial y} \Big/ \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

A grad $S = 0$-nak megfelelő pontban

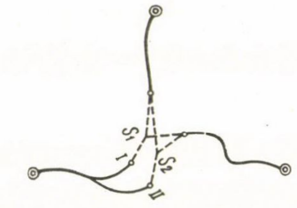
$$P(x, y) = Q(x, y) = 0$$

áll fenn. Az egyenletnek tehát itt szinguláris pontja van.

Gradiens módszernek nevezik a függvény szélsőértékének az esésvonalak csomópontjaként történő meghatározását. A fent vázolt módszer tehát lényegében a gradiens módszernek egy közelítő eljárással való összekapcsolása.

2. A cikkben nem fektettünk súlyt arra, hogy eredményeink alkalmazási területét konkrétan megvilágítsuk. Ezt a hiányt kívánjuk pótolni néhány sorban. Természetesen vázlatosan, teljességre nem törekszünk, és jelenleg nem is törekedhetünk.

a) Hosszabb csővezetékek általában nem vezethetők egyenes vonalban. Ezzel azonban nem szűnt meg a módszer alkalmazási lehetősége. Ha az egyenestől csak kicsit kell eltérnünk, az optimális egyenes a kitűzésnél éppen úgy irányt szab, mint ideális esetben. Megtörténhet azonban, hogy az eltérés igen nagy. Pl. meg kell kerülni a Balatont, mint a zalai olajvezeték építésekor 20 évvel ezelőtt elő is fordult. A vezetéket ezután három irányba kellett elágaztatni. Ilyen esetekben kijelölhető minden vezeték utolsó kötött pontja. Ezt a pontot és az idáig vezető utat a földrajzi adottságok szabják meg. Az elágaztatás helye ezen pontok alapján már számítható.



7. ábra

Lehetséges, hogy egyik vezetékszál lefektetése két úton oldható meg. Mindkét lehetőségre elvégzendő az elágaztatás helyének megállapítása, és a kevesebb összköltségűt kell megvalósítani (7. ábra).

b) Gázkutakhoz tankállomást kívánunk telepíteni. Számítjuk az S_0 pontot, majd egymáshoz közel eső kutak csöveit egyesítjük. Az így nyert csomópontok alapján S_0 korrigálható.

A súlyok mindig a vezetékek Ft/m költségét jelentik.

Főleg gázvezetékek tervezésénél látjuk az alkalmazás lehetőségét. Olajvezetékeknél az üzemeltetési költségek nagyobb súlya szab korlátot.

Összefoglalás

A dolgozat olajvezeték gazdaságos építésével kapcsolatban egy síkban n db. adott ponthoz olyan pont megkeresésével foglalkozik, melynek az adott pontoktól $p_1, \ldots, p_n$ súllyal vett távolság összege minimális. Ha a pontok valamennyien egy egyenesbe esnek, akkor föléjük p_i iránytangesű $S_i = p_i \mid t - t_i \mid$ egyenletű törtvonalakat szerkesztve, ezek $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$ szuperpozícióján a legalsó pont jelöli ki a minimumot.

Ha a pontok nem esnek egy egyenesbe, de valamelyik indexű pontban az (5') egyenlőtlenség teljesül, akkor ott a legkisebb a súlyzott távolságösszeg.

Ha az előző esetek egyike sem áll fenn, akkor egy tetszőleges $\boldsymbol{r}_1$ vektor végpontjából, mely az adott pontok mindegyikétől különbözik, a (6), (8), (9) illetve (10) előírás alapján olyan $\boldsymbol{r}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ sorozatot nyerhetünk, melynek határértéke a kívánt szélsőértéket adja, feltéve, hogy az $\boldsymbol{r}_k$ vektorok közül egyikük végpontja sem esik a megadott pontok valamelyikére. Ez utóbbi feltétel mindig teljesíthető úgy, hogy ellenkező esetben a megfelelő λ_k értékét a (9) alattinál valamivel kisebbnek választjuk, s ezáltal elkerüljük azt, hogy az $\boldsymbol{r}_{k+1}$ végpontja éppen valamely megadott pontra essen, ahol grad S_{k+1} értelmét veszítené.

(Beérkezett: 1960. szeptember 22.)

IRODALOM

[1] Крупинский, Б.: *Основы проектирования шахт*, Москва, 1956.

[2] Воронков, И. М.: „К задаче об отыскании положения точки, соответствующей наименьшему значению суммы n-ных степеней расстояний." Научные труды, Моск. горн. инст. имени И. В. Сталина. Вып. № 8. Москва, 1950.

[3] Forrai Sándor: „Bányászati telepítések különleges problémáinak analitikai megoldásához". *MTA VI. Oszt. Közleményei*, sajtó alatt.

[4] ZAMBÓ János: *Bányászati telepítések analitikája.* Budapest, 1960.
[5] VINCZE, I.: „Über die Schwerpunkte der konvexen Kurven bei speziellen Gelegungen". *Acta Math. Szeged* **9** (1938) 52—59.
[6] WEISZFELD, E.: „Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum." *The Tohoku Mathematical Journal* **43** (1937) 356—386.
[7] BRINK, E. L. — de CANI, J. S.: „An analogue Solution of the Generalized Transportation Problem with Specific Application to Markating Location." International Conference on Operational Research, Oxford, 1957.

EIN MINIMUM PROBLEM DER ÖLBEFÖRDERUNG

Z. HEINEMANN und M. HOSSZÚ

Zusammenfassung

Der Aufsatz befasst sich, im Zusammenhang mit dem rentablen Bau von Ölleitungen, mit dem Aufsuchen eines punktes in einer Ebene, dessen mit den Gewichten $p_1, \ldots, p_n$ genommene Entfernung von n gegebenen, in derselben Ebene liegenden Punkten, summiert ein Minimum ergeben.

Liegen alle Punkte auf einer Geraden, so konstruierten wir über ihr gebrachene Linien mit der Richtungstangente p_i, die die Gleichung $S_i = p_i \mid t - t_i \mid$ haben. Auf ihrer Superposition $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$ gibt der unterste Punkt das Minimum an.

Wenn die Punkte nicht auf einer Geraden liegen aber in einem Punkt, der den Index m hat, die Ungleichheit (5') erfüllt wird, so ist die gewogene Entfernungssumme dort die kleinste.

Ist auch das nicht der Fall, so kann aus dem Endpunkt eines beliebigen Vektors $\boldsymbol{r}_i$, der von allen gegebenen Punkten verschieden ist, auf Grund der Vorschriften (6), (8), (9) (Bzw. (10)) eine Reihe von Vektoren $\boldsymbol{r}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ gewonnen werden, deren Grenzwert den gewünschten Extremwert liefert, vorausgesetzt, dass keiner der Vektoren $\boldsymbol{r}_k$ mit einem der gegebenen Punkte zusemmenfällt. Letztere Bedingung kann man immer erfüllen, wenn man den Wert des entsprechenden λ_k etwas kleiner wählt, als das in (9) angegeben ist. Dadurch vermeiden wir, dass der Endpunkt von $\boldsymbol{r}_{k+1}$ gerade mit einem gegebenen Punkt zusammenfällt, wo grad S_{k+1} seinen Sinn verlieren würde.

ОДНА ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ТРАНСПОРТИРОВКЕ НЕФТА

Z. HEINEMANN и M. HOSSZÚ

Резюме

Авторы занимаются в задачей экономичной постройки нефтепроводов, а именно отысканием такой точки, связанной с данными в одной плоскости точками n, которая имеет минимальную сумму расстояний, принятых весами $p_1, \ldots, p_n$ от данных точек. Если все точки располагаются на одной и той же прямой, то построив над ним ломанные линии, имеющие угловые коэффи-

циенты касательных p_i уравнения $S_i = p_i\,|t - t_i|$, низшая точка на суперпозиции $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$ этих линий определяет место минимума.

Если точки не располагаются на одной прямой, но в некоторой точке индексом m выполняется неравенство (5'), то там находится наименьшая сумма свешенных расстояний.

Если не имеет место ни одного предыдущих случаев, то из конечного пункта произвольного вектора, $\boldsymbol{r}_1$ отличающегося от всех данных точек, можем получить последовательность $\boldsymbol{r}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ по правилам (6), (8), (9), предел которой даёт требуемый экстремум, полагая, что ни одной из конечных точек векторов $\boldsymbol{r}_k$ не совпадает с одной из заданных точек. Последное условие может быть выполнено всегда, если мы выберем значение соответственного λ_k немного меньше чем значения (9), и поэтому мы избегаем, что конечный пункт, $\boldsymbol{r}_{k+1}$ располагался бы на некоторой заданной точке, где выражение grad S_{k+1} не имело бы смысла.