

A LOGARITMIKUS RATEMETERREL KAPCSOLATOS SZTOCHASZTIKUS FOLYAMATRÓL

VARGA LÁSZLÓ¹

Bevezetés

Tekintsünk egy ξ_t sztochasztikus folyamatot a $0 \leq t < \infty$ időpontokban. ξ_t lehetséges értékei legyenek 0 és 1, és tegyük fel, hogy az egyes állapotokban való tartózkodások időtartamai jobbról nyitottak (1. ábra). Feltesszük, hogy az egymást követő különböző állapotok időtartamai független pozitív valószínűségi változók közös

$$(1) \quad \begin{aligned} F(x) &= 1 - e^{-\lambda x}, & 0 \leq x; \\ &= 0, & x < 0; \end{aligned}$$

eloszlásfüggvénnyel. Ekkor, mint ismeretes, a $(0, t]$ időközben előforduló átmenetek v_t száma homogén Poisson folyamatot követ λ eseménysűrűséggel. Defináljuk a ξ_t által származtatott η_t folyamatot a következőképpen:

$$(2) \quad \eta_t = (2\xi_t - 1) \int_0^t A(t-x) d\xi_x,$$

ahol $A(t)$ a $0 \leq t < \infty$ intervallumban korlátos variációjú folytonos függvény.

Az η_t folyamat például részecskeszámlálásnál fordul elő. Tegyük fel élhetünk azzal a megközelítéssel, hogy a számlálócső által szolgáltatott impulzusok időpontjai λ eseménysűrűségű homogén Poisson folyamatot követnek. Ezeket az impulzusokat egy kétállapotú feszültségforráshoz visszük, amely a hozzá érkező impulzusok időpontjában a ξ_t folyamat szerint változtatja feszültségét. Ha a ξ_t folyamat szerint változó feszültséget egy lineáris áramkör bemenő kapcsaira kötjük, akkor a rövidre zárt kimenő kapcsok között folyó áram $(2\xi_t - 1)$ -szerese egy tetszőleges $t \geq 0$ időpontban η_t , ahol $A(t)$ azt az áramot jelenti, amelyet az egységgel egyenlő állandó feszültség kelt a bekapcsolástól számított t idő múlva.

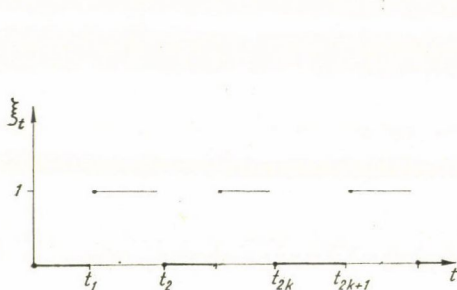
Az η_t folyamattal írható le a logaritmikus ratemeter kimenő árama. A logaritmikus ratemetert gyakran használják részecskeszámlálásra. Lényegében véve ez egy speciális lineáris áramkör (2. ábra), amelyhez egy árammérő csatlakozik $\eta_t = 0$ esetén (a) és $\xi_t = 1$ esetén (b) módon. A feszültséget az előbb említett módon szolgáltatja egy kétállapotú feszültségforrás. Az árammérő az η_t kimenő áram átlagát méri, amely az eseménysűrűségnek logaritmikus függvénye.

¹ Optikai és Finommechanikai Központi Kutatólaboratórium.

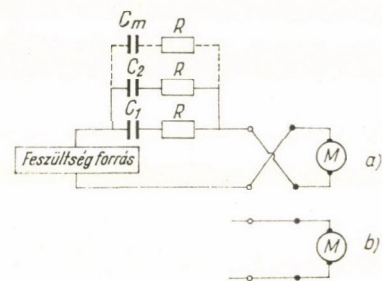
Dolgozatunkban az η_t folyamat vizsgálatával kívánunk foglalkozni. Meghatározzuk az η_t folyamat első és második momentumát, az η_t és η_s folyamatok korrelációs tényezőjét, valamint az

$$(3) \quad \bar{\eta}_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \eta_x dx$$

folyamat első és második momentumát. Végül alkalmazásképpen a logaritmikus ratemeter besabályozásával foglalkozunk.



1. ábra. A ξ_t folyamat ábrája



2. ábra. A logaritmikus ratemeter áramköre

Momentumok meghatározása

Jelölje η_t első momentumát egy tetszőleges $t \geq 0$ időpontban $M_1(t)$ és $(2\xi_t - 1)\xi_x$ első momentumát $m_1(x, t)$, ahol $0 \leq x < t$. Így (2)-ből

$$(4) \quad M_1(t) = \int_0^t A(t-x) dm(x, t).$$

Jelölje $P(t)$ annak a valószínűségét, hogy $\xi_t = 1$. Könnyen belátható hogy

$$(5) \quad P(t) = \frac{1}{2} [1 - e^{-2\lambda t}].$$

Ugyanis $\xi_t = 1$ akkor áll fenn, ha a $(0, t]$ időközben páratlan számú esemény következett be. Ez több egymást kizáró módon jöhet létre: $v_t = 1, 3, 5, \dots$, ámde Poisson folyamat esetén

$$\mathbf{P}\{v_t = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},$$

és így

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{v_t = 2k+1\} = \frac{1}{2} [1 - e^{-2\lambda t}].$$

A várható érték definíciója alapján

$$(6) \quad m_1(x, t) = 2 P(x) [1 - P(t - x)] - P(x) = \frac{1}{2} [e^{-2\lambda(t-x)} - e^{-2\lambda t}].$$

Így

$$(7) \quad M_1(t) = \lambda \int_0^t A(x) e^{-2\lambda x} dx.$$

Az $A(t)$ függvény korlátos voltából következik, hogy létezik az első momentum $t = \infty$ helyen vett határértéke: $M_1 = \lambda \alpha(2\lambda)$, ahol $\alpha(s)$ az $A(x)$ függvény Laplace transzformáltját jelöli.

Az η_t integrálközepének várható értékére igaz, hogy

$$(8) \quad \mathbf{M}\{\bar{\eta}_T\} = \frac{1}{T} \int_0^T M_1(t+x) dx.$$

Igy a $t \rightarrow \infty$ határátmenet esetén $\lim \mathbf{M}\{\bar{\eta}_T\} = M_1$ egyenlőségre jutunk. Az M műszer (2. ábra) mutatója tehát hosszú idő múlva ($t \rightarrow \infty$) M_1 -el árányos kitérés körül fog ingadozni.

A második momentum meghatározása céljából írjuk fel η_t^2 -et kettős integrál formában:

$$(9) \quad \eta_t^2 = \int_0^t \int_0^t A(t-x) A(t-y) d(\xi_x \xi_y).$$

Jelölje az η_t folyamat második momentumát egy tetszőleges $t > 0$ időpontban $M_2(t)$. Mivel

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{\xi_x \xi_y\} &= P(x) [1 - P(y-x)], & x \leq y; \\ &= P(y) [1 - P(x-y)], & x \geq y; \end{aligned}$$

(5)-ből és (9)-ből kapjuk, hogy

$$(10) \quad M_2(t) = \frac{1}{4} \int_0^t \int_0^t A(x) A(y) d(e^{-2\lambda|y-x|}) = -\lambda \int_0^t A(x) dB(x),$$

ahol

$$B(x) = \int_x^t A(y) e^{-2\lambda(y-x)} dy.$$

Parciális integrálással (10) a következő formára hozható

$$M_2(t) = A(0) M_1(t) + \lambda \int_0^t B(x) dA(x).$$

Feltevésünk értelmében az $A(t)$ függvény korlátos variációjú, ezért létezik a második momentum $t = \infty$ helyen vett határértéke:

$$(11) \quad M_2 = A(0) M_1 + \lambda \int_0^\infty \bar{B}(x) dA(x),$$

ahol

$$\bar{B}(x) = \int_0^\infty A(x+y) e^{-2\lambda y} dy.$$

Megemlítjük itt, hogy

$$\mathbf{M} \left\{ \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \eta_x^2 dx \right\} = \frac{1}{T} \int_0^T M_2(t+x) dx$$

egyenlőség alapján az η_t áram átlagteljesítménye hosszú idő múlva ($t \rightarrow \infty$) M_2 -vel lesz egyenlő, ha egységnyi ellenálláson vezetjük keresztül.

A következőkben a korrelációs tényező meghatározásával foglalkozunk. Legyen $\mathbf{M}\{\eta_t \eta_s\} = M(\tau, t)$, ahol $s = t + \tau$, $\tau > 0$. Írjuk fel az $\eta_t \eta_s$ szorzatot a következő felbontásban:

$$(12) \quad \eta_t \eta_s = (-1)^{v_s - v_t} \int_0^t \int_0^t A(t-x) A(s-y) d(\xi_x \xi_y) + \\ + \int_0^t \int_t^s A(t-x) A(s-y) d[(2\xi_t - 1)\xi_x (2\xi_s - 1)\xi_y].$$

A Poisson folyamat homogén és additív voltából következik, hogy $v_s - v_t$ különbség független a v_u értékétől, valahányszor $u < t$ és így független ξ_u -tól is. Ebből következik, hogy (12) egyenlőség jobboldalán álló első tag két független valószínűségi változó (az integrál és annak előjele) szorzata. A második tagnál felhasználva az

$$\mathbf{M}\{(2\xi_t - 1)\xi_x (2\xi_s - 1)\xi_y\} = \\ = P(x)[1 - 2P(s-y)][1 - P(t-x) - P(y-t)], \quad (0 < x < t < y < s),$$

egyenlőséget (12) várható értékére a következőt kapjuk:

$$(13) \quad M(\tau, t) = -\frac{\lambda}{2} e^{-2\lambda\tau} \int_0^t A(x+\tau) dC(x) + M_1(t) M_1(\tau),$$

ahol

$$C(x) = \int_x^t A(y) e^{-2\lambda(y-x)} dy - \int_0^x A(y) e^{-2\lambda(x-y)} dy.$$

A (11)-nél alkalmazott megfontolás szerint létezik $M(\tau, t)$ -nek a $t = \infty$ helyen vett határértéke:

$$(14) \quad M(\tau) = -\frac{\lambda}{2} e^{-2\lambda\tau} \int_0^\infty A(x+\tau) d\bar{G}(x) + M_1 M_1(\tau),$$

ahol

$$\bar{G}(x) = \int_0^\infty A(x+y) e^{-2\lambda y} dy - \int_0^x A(y) e^{-2\lambda(x-y)} dy.$$

A korrelációs tényező:

$$(15) \quad R(\tau, t) = \frac{M(\tau, t) - M_1(t) M_1(t+\tau)}{D(t) D(t+\tau)},$$

ahol

$$D^2(t) = M_2(t) - M_1^2(t).$$

Az η_t folyamat integrálközepének második momentumára írhatjuk, hogy

$$(16) \quad \mathbf{M} \left\{ \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \eta_x dx \right]^2 \right\} = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^y \mathbf{M} \{ \eta_{t+y} \eta_{t+x} \} dx dy = \\ = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^y M(y-x, t+x) dx dy.$$

Az integrálközep második momentuma tehát $t \rightarrow \infty$ esetén a következő lesz:

$$(17) \quad \bar{M}(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left\{ \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \eta_x dx \right]^2 \right\} = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^y M(y-x) dx dy.$$

Alkalmazás: a logaritmikus ratemeter átskálázása

Legyen a ratemeter áramköre a 2. ábra szerinti, ahol a kapacitások megválasztása a következő: $C_i = C_1 10^{i-1}$. Ekkor

$$(18) \quad A(t) = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^m e^{-\frac{t}{RC_k}},$$

ahol m a párhuzamosan kötött soros RC tagok száma.

Ha élhetünk azzal a feltevessel, hogy a logaritmikus ratemeterhez érkező impulzusok száma homogén Poisson folyamatot követ λ esemény-sűrűséggel, akkor (7) szerint

$$(19) \quad M_1(t) = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^m \lambda \frac{1 - e^{-(2\lambda + \alpha_k)t}}{2\lambda + \alpha_k},$$

ahol $\alpha_k = (RC_k)^{-1}$. Így

$$(20) \quad M_1 = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^m \frac{\lambda RC_k}{1 + 2\lambda RC_k}.$$

A második momentum $t = \infty$ helyen vett határértéke (11) szerint

$$(21) \quad M_2 = \frac{1}{R^2} \sum_{k=1}^m \frac{\lambda RC_k}{1 + 2\lambda RC_k} \beta_k;$$

ahol

$$\beta_k = \sum_{i=1}^m \frac{C_i}{C_i + C_k}.$$

Mivel (14) szerint

$$(22) \quad M(\tau) = M_1^2 + \sum_{k=1}^m \gamma_k e^{-(2\lambda + \alpha_k)\tau},$$

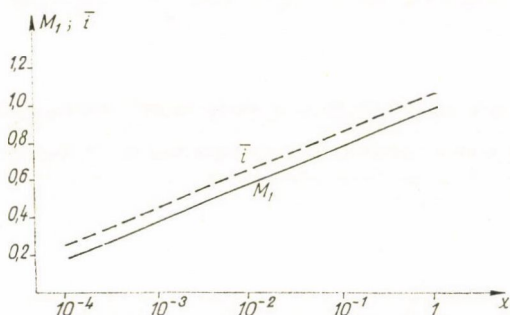
ahol

$$\gamma_k = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1}{1 + 2\lambda RC_k} \cdot \sum_{i=1}^m \frac{C_k}{C_k + C_i} \cdot \frac{\lambda RC_i}{1 + 2\lambda RC_i},$$

az $\bar{\eta}_T$ integrálközép szórásnégyzete aszimptotikusan a következő lesz:

$$(23) \quad D^2\{\bar{\eta}_T\} = \frac{2}{T^2} \sum_{k=1}^m \frac{\gamma_k}{2\lambda + \alpha_k} \left[T + \frac{e^{-(2\lambda + \alpha_k)T} - 1}{2\lambda + \alpha_k} \right].$$

A logaritmikus ratemeter mutatója tehát a bekapcsolástól számított elég hosszú idő múlva (20)-al arányos kitérés körül fog ingadozni.



3. ábra. A logaritmikus ratemeter kimenő árama: $\bar{i}$ egyenlő időközönként érkező jelek esetén. M_1 Poisson folyamat szerint érkező jelek esetén. $x = \lambda RC_1$

A műszerskála elkészítése azonban impulzusgenerátor által szolgáltatott, azaz egyenlő időközönként érkező impulzusok segítségével történik. Ha a műszert Poisson folyamat szerint érkező impulzusok számlálására kívánjuk felhasználni, úgy az előbbi módon készített skálát módosítani kell.

Könnyen meghatározhatjuk egyenlő időközönként érkező f másodpercenkénti impulzusszámhoz tartozó átlagáramot. A (2)-es formula alapján (18) figyelembevételével stacionárius esetben az átlagáram:

$$(24) \quad \bar{i} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \eta(x) dx = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^m f RC_k \operatorname{th} \left(\frac{1}{2f RC_k} \right).$$

A 3. ábra a kétféle átlagáram értékét mutatja az $f RC_1 = x$ ill. $\lambda RC_1 = x$ függvényében $m = 4$ esetén. A szabályos időközönként érkező f eseményssűrűségű jelekre a logaritmikus ratemeter nagyobb áramot szolgáltat, mint ugyanilyen eseményssűrűséggel Poisson eloszlást követő jelekre. A $\lambda = 2, 3f$ megfeleltetés esetén a kétféle átlagáram a $10^{-4} \leq x \leq 1$ inter-

vallumban dolgozó műszerre megegyezik. Az impulzusgenerátor által szolgáltatott jelekre beszabályozott műszer tehát a $\lambda = 2,3f$ skálamódosítás után mutatja helyesen a Poisson folyamat szerint érkező impulzusok számát.

Végül köszönetemet fejezem ki MOGYORÓDI JÓZSEFnek a dolgozat olvasása közben tett értékes megjegyzéseiről.

(Beérkezett: 1962. február 2.)

ON A STOCHASTIC PROCESS CONCERNING THE LOGARITHMIC COUNTING RATE METER

L. VARGA

Abstract

This paper deals with the following stochastic process:

$$\eta_t = (2\xi_t - 1) \int_0^t A(t-x) d\xi_x,$$

where $A(t)$ is a continuous and of bounded variation in $(0, \infty)$; ξ_t is a secondary process generated by means of a homogeneous Poisson process: $\xi_t = 0$ if the numbers of events are, occurring in the time interval $(0, t]$, even and $\xi_t = 1$ otherwise. In the present paper the mean value, the dispersion and the correlation function of the η_t is given. Finally an adjustment problem of the logarithmic counting rate meter is treated.

О СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ, СВЯЗАННЫМ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ИЗМЕРИТЕЛЕМ СКОРОСТИ СЧЁТА

L. VARGA

Резюме

Предмет статьи — стохастический процесс

$$\eta_t = (2\xi_t - 1) \int_0^t A(t-x) d\xi_x,$$

где $A(t)$ непрерывная функция с ограниченным изменением, определенная в интервале $(0, \infty)$, а ξ_t вторичный процесс, порождаемый однородным Пуассоновым процессом: $\xi_t = 0$ если в промежутке времени $(0, t]$ число событий четное; $\xi_t = 1$ в остальных случаях. Автор определяет ожидаемое значение, дисперсию и корреляционную функцию процесса η_t . В качестве приложения он показывает, как надо переюстировать логарифмического измерителя скорости счёта урегулированного для импульсов, прибывающих в одинаковых промежутках времени, если мы хотим его использовать для подсчета частиц.