

5/9-ES FRAKCIONÁLIS FAKTORIÁLIS KÍSÉRLET TERVE

BÁNKÖVI GYÖRGY és SARKADI KÁROLY

Bevezetés

A dolgozatunkban leírt kísérleti tervet a Nagynyomású Kísérleti Intézet megbízásából dolgoztuk ki 1961-ben.

A Nagynyomású Kísérleti Intézet munkatársai új eljárást próbáltak ki dieselolajak kéntelenítésére. Az egyik felmerülő feladat az volt, hogy a kén-telenítési hatásfoknak a beállítható műveleti tényezőktől (nyomás, hőmérséklet stb.) való függését megállapítsák (részletesen lásd [1]). Ezen feladat megoldása — tekintettel az elvégzendő kísérletek nagy számára — igen költséges és hosszú ideig elhúzódó munka lett volna.

A kísérletezés költségeinek és időtartamának jelentős csökkentése érhető el a matematikai statisztika alkalmazása által. A kísérletezés tervének matematikai alapon való kidolgozása — bizonyos egyszerű feltételek teljesülése esetén — lehetővé teszi, hogy a szükségesnek látszó kísérleteknek csak egy részét végezzék el, mert a kapott kísérleti eredményekből a többi (el nem végzett) kísérlet várható eredménye számítással igen pontosan becsülhető.

Dolgozatunk 1. és 2. §-ában röviden ismertetjük a faktoriális kísérletek, illetve a frakcionális faktoriális kísérletek alapelveit. A 3—6. §-okban az általunk kidolgozott, bizonyos tekintetben új kísérleti tervet írjuk le. A 7. § gyakorlati útmutatás a számítások elvégzéséhez.

Megjegyezzük, hogy a dolgozatunkban leírt és ehhez hasonló kísérleti tervek nemcsak a vegyiparban alkalmazhatók sikerrel, hanem számos egyéb iparágban, valamint a mezőgazdaságban is.

Magyarországon a faktoriális kísérleteket a mezőgazdaságban több mint egy évtizede alkalmazzák, s reméljük, dolgozatunk hozzájárul ahhoz, hogy ez a módszer az iparban is elterjedhessen. Tudomásunk szerint a magyar nyelvű irodalomban még nem jelent meg olyan mű, amely a frakcionális faktoriális kísérletek tervezésével foglalkoznék. Dolgozatunk megfogalmazásánál erre a körülményre tekintettel voltunk, és bár a közölt matematikai modell teljes megértése feltételezi az idézett szakirodalom ismeretét, a modell gyakorlati alkalmazása a 7. § útmutatása alapján alaposabb szakismeret nélkül is megvalósítható.

1. §. Faktoriális kísérletek

A mezőgazdasági és az ipari kísérleteknél igen gyakran előfordul, hogy a kísérletek eredményeit befolyásoló tényezők egy részét a kísérletező előre be tudja állítani bizonyos értékekre. A kísérletezés célja ilyenkor legtöbbször

az, hogy a jelenség lefolyásának a beállítható tényezőktől való függését megtalálják, ami különösen az optimális feltételek megválasztása szempontjából érdekes.

A matematikai tárgyalásban a kísérleti körülmények tudatos megválasztásánál szerepet játszó tényezőket *faktoroknak*¹ nevezik. A kísérletek során mindegyik faktor csak néhány kijelölt értéket vehet fel; ezeket az értékeket a faktor szintjeinek nevezik és általában 0-tól kezdődően számozzák.²

A faktoriális kísérletek eredményeinek kiértékelése speciális többváltozós regresszió-számítási feladat. A legegyszerűbb modellnél a következő feltevélezből indulnak ki:

$$(1) \quad y_{ij} = \mu + A_i + B_j + \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 0, 1)$$

ahol

i és j az első ill. a második faktor szintjei,

y_{ij} a kísérlet mért eredménye,

μ konstans,

A_i és B_j az első faktor i -edik, ill. a második faktor j -edik szinten való fellépésének tulajdonított hatás,

ε_{ij} normális eloszlású valószínűségi változó (véletlen hatás), $\mathbf{M}(\varepsilon_{ij}) = 0$, $\mathbf{D}^2(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$; továbbá az ε_{ij} -k összességükben független valószínűségi változók ($i, j = 0, 1$).

Az A_i és B_j mennyiségekre vonatkozóan nyilván feltételezhető a

$$(2) \quad \sum_{i=0}^1 A_i = 0, \quad \sum_{j=0}^1 B_j = 0$$

összefüggések fennállása (ha például $\sum_{i=0}^1 A_i = c \neq 0$ lenne, akkor az (1) összefüggést így írhatnánk:

$$y_{ij} = \mu' + A'_i + B_j + \varepsilon_{ij},$$

ahol

$$\mu' = \mu + \frac{c}{2}, \quad A'_i = A_i - \frac{c}{2} \quad (i = 0, 1),$$

és így $\sum_{i=0}^1 A'_i = 0$).

A (2) feltevés mellett

$$\mu = \frac{1}{4} \mathbf{M} \left(\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 y_{ij} \right)$$

a kísérletsorozat egyszeri végrehajtásánál.

¹ *Példa faktorokra.* Növénytermesztési kísérleteknél: öntözés, műtrágyázás; biológiai kísérleteknél: kísérleti állatok neme vagy életkora; ipari kísérleteknél: hőmérséklet, nyomás.

² Például, ha egy ipari eljárást 200° C, 300° C és 400° C hőmérsékleten próbálnak ki, akkor ezeket a hőfokokat a „hőmérséklet” faktor nulladik, első, illetve második szintjeinek tekintik. A faktor szintjei csak különböző beállítást, de nem feltétlenül mennyiségi változást jelentenek; így például a hím-, illetve nőstényállatok kísérleti alanyként való felhasználása a „kísérleti állatok neme” faktor nulladik, ill. első szintjének tekinthető.

Említettük, hogy modellünk konstansainak meghatározása speciális többváltozós regressziószámítási feladat. Ha összehasonlítjuk feladatunkat a regressziószámítás szokásos modelljével (l. pl. [9], 376–380 o.), akkor feltűnik, hogy míg az idézett helyen a meghatározandó állandók szorzói, az x_{ik} számok általában tetszőleges számok lehetnek, a mi esetünkben ezek csak 0 és az 1 értéket veszik fel (aszerint, hogy a kérdéses állandó az (1) megfelelő egyenletében szerepel vagy sem). Látszólagos különbséget jelent az, hogy a mi esetünkben az együtthatók között a (2) alatt feltüntetett összefüggések állnak fenn, ez a különbség azonban a felesleges állandók eliminálásával könnyen kiküszöbölhető és így feladatunk a regressziószámítási feladatok megoldásának smert módszerével, a legkisebb négyzetek módszerével is megoldható (a dolgozatunkban tárgyalt modell ezen az úton 33 ismeretlenes egyenletrendszerre vezet). Azonban, mint látni fogjuk, a faktoriális kísérleteknél fellépő szimmetriatulajdonságok megengedik, hogy ugyanehhez az eredményhez sokkal egyszerűbb számítással eljussunk.

Főhatások és interakciók. Az (1) képlet olyan modellt ír le, amelynél az egyik faktor különböző szinteken kifejtett hatásai nem függnak a másik faktor szintjétől.³ A modell továbbfejlesztése a következő formában írható fel:

$$(3) \quad y_{ij} = \mu + A_i + B_j + AB_{i+j} + \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 0, 1).$$

Az (1) képlettől való eltérést az AB_{i+j} tag bevezetése jelenti. (Az $i + j$ index mod 2 értendő.) Ezek a mennyiségek annak mérésére szolgálnak, hogy az első faktor hatásának megváltozását (a faktor szintje megváltoztatásának következményeként) a második faktor rögzített szintje mellett, mennyire befolyásolja a második faktor más szinten való rögzítése. (Ha a második faktor beállítása közömbös az első faktor hatása szempontjából, az AB_{i+j} mennyiségek nyilván 0-val egyenlők; ekkor jutunk az (1) képlethez.) Az AB jelölés nem szorzat, hanem egységes szimbólum, az AB_{i+j} mennyiségek, amelyeket a két faktor *elsőrendű interakcióinak* neveznek, célszerűen úgy értelmezhetők, hogy a faktorok sorrendjének semmi jelentősége se legyen.

(2)-höz hasonlóan feltehető, hogy

$$(4) \quad \sum_{r=0}^1 AB_r = 0.$$

Kettőnél több faktor esetén magasabbrendű interakciókról is beszélhetünk; így például, ha négy faktor mindegyike két szinten szerepel, az ABC_{i+j+k} , ABD_{i+j+l} , ACD_{i+k+l} , BCD_{j+k+l} *másodrendű interakciók* és az $ABCD_{i+j+k+l}$ *harmadrendű interakciók* is figyelembe vehetők (i, j, k és l az első, második, harmadik, illetve negyedik faktor szintjei, az indexek mod 2 értendők). Az interakciók összeszámlálásakor a csak alsó indexben különböző konstansokat általában nem szokták külön interakcióknak tekinteni, hanem azokat ugyanazon interakció különböző komponenseinek nevezik. Így például az AB_0 és AB_1 konstansokat az AB interakció komponenseinek nevezik. Ezt a terminológiát értelemszerűen főhatásoknál is alkalmazzák. Az eddig

³ Az A_i és B_j mennyiségeket az első, illetve a második faktor *főhatásainak* nevezik, amelyek a faktorok rögzített szinten kifejtett átlagos hatásának mérésére szolgálnak.

tárgyalt esetben, tehát amikor a faktorok szintjeinek száma 2, az interakciók is két-két komponenssel rendelkeznek.

Visszatérve arra az esetre, mikor a faktorok száma is csak 2, megfigyelhetjük, hogy az AB interakció az y_{ij} függvényeket két egyenlő osztályba osztja: az egyikben, ahol $i + j$ páros, az interakció a (3) egyenlet kifejezésében a 0 szinten szerepel, míg a másik osztályban az 1 szinten. Megjegyezzük továbbá, hogy a (3) egyenlet szerinti modell feltételezése — meghatározatlan konstansokkal — az y_{ij} változók várható értékeire semmi megszorítást sem jelent, a várható érték ismeretében a (2) és (4) összefüggések figyelembevételével a (3)-ban szereplő konstansok egyértelműen meghatározhatók. (Ezzel szemben az (1) egyenletnek megfelelő modell feltételezése esetén fennáll a várható értékek között az $\mathbf{M}(y_{11}) + \mathbf{M}(y_{22}) = \mathbf{M}(y_{12}) + \mathbf{M}(y_{21})$ reláció.)

Általában, több faktor esetén is, ha mindegyik faktor 2–2 szinten szerepel, ugyancsak érvényes, hogy mindegyik interakció két egyenlő osztályba sorolja a lehetséges szintkombinációk halmazát. Hasonlóképpen igaz az is, hogy az összes lehetséges interakciók szerepeltetése esetén (pl. 3 faktor (A, B, C) esetén az AB, AC, BC és ABC interakciók alkalmazása mellett) a változók várható értékeire semmilyen megszorítást nem jelent a modell.

Tekintsük most a három szint esetét. Legyen két faktorunk, mindegyik 3–3 szinten. Most is alkalmazhatjuk a (3) egyenlet által megadott modellt (ahol most i és j a 0, 1, 2 értékeket veszik fel), természetesen a (2) és a (4) képleteknek megfelelő relációkat is, csak ezekben 2-ig megy az összegezés, az AB indexei pedig mod 3 értendők. Könnyen meggyőződhetünk azonban róla, hogy most a (3) képlet nem jelenti a lehető legáltalánosabb modellt: hiszen a változók száma 9, a független konstansok száma pedig 7. Tehát itt, ha általánosabb modellt akarunk alkalmazni, még egy elsőrendű interakciót kell szerepeltetnünk. Ezt úgy definiáljuk, hogy az $i + 2j$ értékeinek megfelelően bontsa 3 osztályra az y_{ij} változók halmazát. Az új interakciót az AB^2 jellel jelezzük, komponensei: AB_0^2, AB_1^2, AB_2^2 , és az y_{ij} kísérletnek a modell az AB_{i+2j}^2 komponenti felelteti meg (az index itt is mod 3 értendő). Így tehát a modell a következő lesz:

$$y_{ij} = \mu + A_i + B_j + AB_{i+j} + AB_{i+2j}^2 + \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 0, 1, 2).$$

Az AB^2 szimbólumban a B felett álló 2 index a j együtthatójára utal.

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ez a modell a 2 faktoros 3 szintes faktoriális kísérlet legáltalánosabb modellje: éppen 9 független állandónk van, mert a főhatások és az interakciók 3–3 komponense mind 0-ra összegeződik. Önként felvetődik azonban a kérdés, hogy miért alkalmazzuk i -nek és j -nek ezt a két függvényét: az $i + j$ meg az $i + 2j$ függvényt interakciók definiálására? Ennek a magyarázata a következő: a 3-as modulusra vonatkozóan csak 4 különböző lineáris függvény van, amelyben pontosan 2 változó szerepel:

$$x_1 + x_2, \quad x_1 + 2x_2, \quad 2x_1 + x_2, \quad 2x_1 + 2x_2.$$

Ezek közül a második kettő az első kettőtől csak konstans faktorban különbözik:

$$2x_1 + x_2 \equiv 2(x_1 + 2x_2),$$

$$2x_1 + 2x_2 \equiv 2(x_1 + x_2).$$

Az egymástól csak konstans faktorban különböző lineáris függvények nem

alkalmasak külön-külön interakció definiálására, mert az így nyert interakciók ugyanazt a felosztást generálnák a kísérletek között és ezért egymástól megkülönböztethetetlenek volnának.

Továbbmenve 3 faktor esetére, hasonló elvek alapján építhetjük fel modellünket. Itt szerepelnek az A , B , C főhatások, az AB , AB^2 , AC , AC^2 , BC , BC^2 elsődrendű interakciók és az ABC , ABC^2 , AB^2C , AB^2C^2 másodrendű interakciók. Az interakciók indexei értelemszerűen úgy állapítandók meg, mint az előző esetben. Nem szerepeltetünk itt sem olyan interakciókat, amelynek szimbólumában az elsőnek álló betű felett hatványkitevő van.

4 faktor esetén a fenti modell értelemszerűen továbbfejleszthető; itt már harmadrendű interakciók is felléphetnek.

Megismételt kísérletek. Egyszerűség kedvéért térjünk vissza a (3) modell esetére. Említettük, hogy az y_{ij} változók várható értékei a modellben szereplő konstansokat egyértelműen meghatározzák. Tehát amennyiben a kísérletek eredményei véletlen hibától mentesek lennének, elég lenne a faktorok szintjeinek minden kombinációja mellett egy-egy kísérletet végrehajtani; az így kapott négy egyenletből a fenti ismeretlenek meghatározhatók. Ha azonban a véletlen hatása nem elhanyagolható, az egyenletek megoldása bizonytalanságot rejt magában (újabb kísérletsorozat esetén más értékeket kapnánk), és ezen bizonytalanság mértékére nézve nincs információnk. A szükséges információ megszerzése a kísérletek számának növelése útján történik.

A fenti példában a kísérletsorozat R -szeri ($R = 2, 3, \dots$) végrehajtása ($4R$ mérés) alapján $\sigma^2 4R - 4$ szabadságfokú kifejezéssel becsülhető; σ^2 ismeretében valószínűségi következtetések vonhatók le arra nézve, hogy a μ , A_1 , A_2 stb. kifejezések számított értékei mennyire térhetnek el valódi értékeiktől.

Blokkok. A faktoriális kísérleti modellek alapfeltevése, hogy a kísérleti eredmények — a véletlen ingadozást leszámítva — csak a figyelembe vett faktoroktól függenek, azaz a kísérletezés körülményei a szintek különbözőségétől eltekintve változatlanok. Ennek a feltevésnek a helyessége sok kísérlet elvégzése esetén erősen kétséges lehet; ezen hibaforrás kiküszöbölésére szolgál a kísérletnek kisebb csoportokba, ún. blokkokba való beosztása.⁴

A blokkbeosztást általában úgy szokták megszabni, hogy valamilyen magasabbrendű interakciót (interakciókat) választunk ki, (elsősorban olyant, amelyről feltételezzük, hogy eltűnik) és azok a kísérletek kerülnek azonos blokkba, amelyekben ez a kiválasztott interakció (interakciók) egyforma szinten szerepel. Ilyen módon természetesen a kiválasztott interakció a kísérletekből nem becsülhető meg, mert nem tudjuk szétválasztani a blokkhatástól: azt mondjuk, hogy az interakció *keveredik* a blokkhatással.

Ipari kísérleteknél azonban olykor — és ez így történik a mi esetünkben is — blokkonként egy-egy *kontrollkísérletet* is végeznek, annak érdekében, hogy a blokkhatást már a kísérletek végzése közben is szemmel tudják tartani és szükség esetén a berendezésen beállítást végezni. A kontrollkísérlet elvégzése mindegyik blokkban ugyanolyan beállítás mellett történik.

Kísérleti terv. A tudományos igényű kísérletezés a kísérleti terv elkészítésével kezdődik, amely faktoriális kísérletek esetén a következőkből áll:

⁴ Feladatunk megoldásánál számításba kellett vennünk, hogy a kísérleti berendezés működése bizonyos idő elteltével kísérletről kísérletre fokozatosan változik. Az időben közelebbi kísérleteknél ez a változás még nem jelentős, de a távolabb kísérleteknél nem hagyható figyelmen kívül.

- a) A kísérleti modell megválasztása (faktorok, szintek kijelölése, egyes hatások elhanyagolása (lásd 2. §), blokk terjedelmének meghatározása).
- b) A kísérleti elrendezés felírása (melyik szintkombinációt hányszor, milyen időrendben kell elvégezni; blokkbeosztás felírása, kontrollkísérletek).
- c) A kísérletek kiértékelésére szolgáló módszer kidolgozása.

2. §. Frakcionális faktoriális kísérletek

A faktoriális kísérleteknél a teljes kísérletsorozat (minden lehetséges szintkombináció) megismétlése nem mindig valósítható meg előnyösen. Ha az egyes szintkombinációkra vonatkozó kísérletek száma nem egyforma, *részleges ismétlésről* beszélünk. Ide soroljuk azt az esetet is, amikor egyes szintkombinációkra vonatkozóan egyáltalán nem hajtunk végre kísérletet.

Az olyan faktoriális kísérleti terveket, amelyeknél részleges ismétlés fordul elő, *frakcionális faktoriális* kísérleti terveknek nevezzük. A továbbiakban azokra a tervekre szorítkozunk, amelyeknél a kísérletek száma kisebb, mint az összes lehetséges szintkombinációk. Ezen kísérleti tervek jelentősége különösen akkor nagy, amikor a teljes kísérletsorozat igen sok kísérletből áll.

A frakcionális faktoriális kísérletek tervezése azon a feltételezésen alapszik, hogy a magasabbrendű interakciók elhanyagolhatóan kicsinyek (első közéletésben nullák) a főhatásokhoz és az alacsonyabbrendű interakciókhoz képest. Ez a feltevés önkényes, de a gyakorlati esetek nagy részében fenn áll. A kísérleti adatok birtokában a feltevés helyességére vonatkozóan utólagos vizsgálatok végezhetők. Az egyes interakciók elhanyagolása következtében csökken a becslendő ismeretlenek száma, és így az elvégzendő kísérletek száma is.

Azokra az esetekre vonatkozóan, amikor mindegyik faktor két szinten, illetve három szinten szerepel, az irodalomban a probléma elméleti tárgyalása mellett kidolgozott kísérleti elrendezések is találhatóak. A [2] dolgozat olyan kísérleti elrendezéseket közöl, ahol 4—10 faktor mindegyike három szinten szerepel és a teljes kísérletsorozatnak 3^p -edrésze hajtandó végre ($p = 1, 2, 3, 4, 5$).

Feladatunkban négy faktor mindegyike három értéket vehetett fel; a másod- és harmadrendű interakciókat elhanyagoltuk. Könnyen belátható, hogy a négyféle főhatás és tizenkétféle elsőrendű interakció (mindegyike három szinten) és a kísérleti átlag (μ) becslése legalább 33 mérést tesz szükségessé, ha a vizsgált hatásoknak egymással való keveredését el akarjuk kerülni; 27 kísérlet elvégzése az összes (81) helyett tehát nem minden szempontból kielégítő (lásd [2] 11. oldal). Ez a hiányosság kiküszöbölhető további kísérletek elvégzése által; vagyis a kísérleteket úgy tervezzük, hogy a végrehajtandó kísérletek száma nem lesz 3^p -edrésze az összes elvégzendő kísérletek számának. Az ilyen frakcionális kísérleteket, ahol az elvégzett kísérletek száma nem osztója az összes elvégezhető kísérlet számának, *irreguláris* frakcionális faktoriális kísérletnek nevezzük [8]. Az irreguláris frakció alkalmazása bizonyos előnyök feláldozását jelenti: a becslések, vagy legalábbis bizonyos becslések egymással korreláltak lesznek, a kísérlet tervezése és kiértékelése bonyolultabb, mint a szokásos kísérletek esetében. Az információ viszonylagos kihasználása gyengébb. Ezen kisebb hátrányokat bőven ellensúlyozza, hogy irreguláris frakció alkalmazása esetén az elvégzendő kísérletek számát — a becsülni kívánt főhatások és interakciók számának figyelembevételével —

közelióleg optimálisan tudjuk megválasztani. Az irodalomban található kétszintes irreguláris frakcionális kísérleti tervek (lásd [3], [8]). Viszont arra az esetre vonatkozóan amikor mindegyik faktor három szinten szerepel, tudomásunk szerint ilyen jellegű frakcionális faktoriális tervtáblázat nem jelent meg.

Dolgozatunkban egy konkrét kísérleti tervet ismertetünk a tervezés főbb lépéseinek felvázolásával. Ha a feladatban a faktorok, szintek, vagy az egy blokkba sorolandó kísérletek száma megváltozik, a konkrét kísérleti terv elkészítése a közölttől sokban különbözhet, néhány főbb elv azonban változatlan marad, és ezért joggal beszélhetünk tervezési módszerről.

A külső megbízásként kapott feladatban szereplő faktorokat és szintjeiket a megbízó fél állapította meg. Feladatunk négy faktor három-három szinten való változására vonatkozó olyan kísérleti terv kidolgozása volt, ahol nem kell az összes (81) kísérletet végrehajtani. A Nagynyomású Kísérleti Intézetben már elvégeztek egy 36 kísérletből álló sorozatot az 1959-ben általunk kidolgozott terv alapján (lásd [1]). A 36 kísérletet tartalmazó terv hátránya, hogy a kísérletezési hiba mindössze 3 szabadságfokú kifejezéssel becsülhető. A jelen dolgozatban ismertetett, 45 kísérletet tartalmazó kísérleti terv legfőbb előnye a fenti tervvel szemben az, hogy a kísérletezési hiba 12 szabadságfokú kifejezéssel becsülhető; a több információ miatt természetesen a kísérletek várható értékére vonatkozó becslések is pontosabbak.

3. §. A kísérletek elrendezése

Jelölje x_1, x_2, x_3, x_4 azt a szintkombinációt, amelyiknél az első faktor az x_1 -edik, a második az x_2 -edik, a harmadik az x_3 -edik, a negyedik az x_4 -edik szinten szerepel ($x_1, x_2, x_3, x_4 = 0, 1, 2$).

A 45 végrehajtandó szintkombináció kiválasztása és egyúttal a blokkbeosztás elvégzése az alábbi kongruenciarendszer alapján történt:

$$(5) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \equiv \alpha_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 \equiv \alpha_2 \end{cases} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, 2).$$

A kongruencia-jel itt és a dolgozat további részében mod 3 értendő.

A blokkbeosztást az 1. táblázat mutatja.

1. táblázat

Blokk	1	2	3	4	5
α_1	0	0	0	1	2
α_2	1	2	0	0	0

Az elvégzendő kísérleteket az (5) kongruenciarendszernek (az 1. táblázatban szereplő α_1, α_2 értékpárok mellett) eleget tevő szintkombinációk

határozzák meg; ezeket a szintkombinációkat — az 1. táblázat szerinti blokkbeosztásban — a 2. táblázat tartalmazza.⁵

2. táblázat

1. blokk	2. blokk	3. blokk	4. blokk	5. blokk
0001	0002	0000	0010	0020
0122	0120	0121	0101	0111
0210	0211	0212	0222	0202
1020	1021	1022	1002	1012
1111	1112	1110	1120	1100
1202	1200	1201	1211	1221
2012	2010	2011	2021	2001
2100	2101	2102	2112	2122
2221	2222	2220	2200	2210

A kísérletek tervezésénél az (5) kongruenciarendszer alapul választása azt jelenti, hogy a szereplő kongruenciáknak megfelelő ABC és AB^2D interakciókat, valamint még mindazokat az interakciókat, amelyek a két kongruencia lineáris következményének felelnek meg: az AC^2D^2 és a BC^2D interakciókat a blokkbeosztásnak és a frakcionálásnak feláldozzuk. Pontosabban: az α_1, α_2 értékpárral jellemzett blokkban az ABC_{α_1} és $AB^2D_{\alpha_2}$ komponensek valamennyi kísérletben szerepelnének, ha másodrendű interakciókat is feltételeztünk volna; hasonlóképpen, mint arról könnyen meggyőződhetünk, az $AC^2D_{2\alpha_1+2\alpha_2}$ és a $BC^2D_{2\alpha_1+\alpha_2}$ komponensek is. Ugyanis az (5) kongruenciarendszerből következnek az

$$x_1 + 2x_3 + 2x_4 \equiv 2\alpha_1 + 2\alpha_2,$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 \equiv 2\alpha_1 + \alpha_2$$

kongruenciák. Meggyőződhetünk arról is, hogy több ilyen kongruencia már nincsen, kivéve azokat, amelyek ezektől, vagy az eredeti két kongruencia valamelyikétől csak konstans faktorban különböznek.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az (5) kongruenciarendszer választása mellett csak másodrendű, azaz modellünkben nem szereplő interakciókkal keveredik a blokkhatás, illetve a frakcionálás. Ez a körülmény kedvező, mert ha főhatással, vagy elsőrendű interakcióval keverednének, ezeket becsül-

⁵ A végrehajtandó szintkombinációknak kongruencia-rendszer alapján történő kiválasztása és elrendezése általános módszer a frakcionális faktoriális kísérleti tervek elkészítésénél. Ez a módszer a kísérleti eredményekből nyert becslések bizonyos optimális tulajdonságai mellett a probléma könnyebb matematikai kezelhetőségét is biztosítja.

hetetlenné, vagy legalábbis — a kontrollkísérletek felhasználása esetén — becslésüket inefficienssé tennék. Az (5) kongruenciarendszer e keverő tulajdonsága annak a következménye, hogy sem magában a kongruenciarendszerben, sem következményei között nem szerepel olyan kongruencia, amely csak egy vagy két változót tartalmaz.

Az olvasó kérdezheti, hogy milyen szempont szerint történt az (5) kongruenciarendszer megválasztása, illetve hogy van-e még más négyváltozós lineáris kongruenciarendszer is, amely hasonló tulajdonsággal rendelkezik?

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy (5) lényegében az egyetlen olyan kongruenciarendszer, amely a követelményeknek megfelel; pontosabban szólva, ha a

$$\begin{cases} \beta x = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 \equiv \alpha_1 \\ \gamma x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 \equiv \alpha_2 \end{cases}$$

kongruenciarendszerben szereplő β és γ vektorok olyanok, hogy bármely $\lambda_1 \beta + \lambda_2 \gamma$ ($\lambda_1 \lambda_2 = 0, 1, 2$; $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$) alakú vektornak legfeljebb egy komponense kongruens nullával, akkor a β és γ vektorok egyszerű transzformációval (összeadás, konstanssal való szorzás és koordináta-indexek felcserélése) átvihetők az (1, 1, 1, 0) ill. (1, 2, 0, 1) vektorokba.

Bizonyítás. Nyilván elegendő az olyan β és γ vektorokat vizsgálni, amelyekre a β , γ , $\beta + \gamma$ és $\beta + 2\gamma$ vektorok mindegyikének legfeljebb egy komponense kongruens nullával. Ha valamilyen i indexre ($i = 1, 2, 3, 4$) $\beta_i + \gamma_i \not\equiv 0$ és $\beta_i + 2\gamma_i \not\equiv 0$ akkor vagy β_i vagy γ_i egyenlő nullával (mert $\gamma_i \neq 0$ esetén a β_i , $\beta_i + \gamma_i$, $\beta_i + 2\gamma_i$ számok egyike kongruens nullával). A feltevésből következik, hogy legalább két indexre, mondjuk i_1 -re és i_2 -re $\beta_{i_j} + \gamma_{i_j} \not\equiv 0$ és $\beta_{i_j} + 2\gamma_{i_j} \not\equiv 0$ ($j = 1, 2$) fennáll; így a β_{i_1} , β_{i_2} , γ_{i_1} , γ_{i_2} számok közül kettő nullával egyenlő. Egyik vektornak sem lehet azonban két nulla komponense; így tehát $\beta_{i_1} = 0$, $\gamma_{i_2} = 0$, továbbá a másik két indexre, i_3 -ra és i_4 -re vonatkozóan a $\beta_{i_3} + \gamma_{i_3} = 0$ és a $\beta_{i_4} + 2\gamma_{i_4} = 0$ összefüggésnek kell fennállnia (i_1 és i_2 , valamint i_3 és i_4 megfelelő megválasztása mellett). Így tehát a feltételnek elegendő β és γ vektorok komponenseire vonatkozóan a következők teljesülnek:

$$\begin{aligned} \beta_{i_1} = 0, \quad \beta_{i_2} \neq 0, \quad \gamma_{i_1} \neq 0, \quad \gamma_{i_2} = 0, \\ \beta_{i_3} \equiv 2\gamma_{i_3} \neq 0, \quad \beta_{i_4} = \gamma_{i_4} \neq 0, \end{aligned}$$

(ahol i_1, i_2, i_3, i_4 az 1, 2, 3, 4 számok valamely permutációja) amiből az állítás egyszerűen belátható.

4. §. A főhatások és interakciók becslése

Jelölje $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ a zárójelbe foglalt szintkombináció mellett elvégzett kísérletek mért értékét, $(x_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 \hat{x}_4)$ pedig a kísérlet számított eredményét (a mért eredmény várható értékének becslését), azaz

$$(x_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 \hat{x}_4) \sim \mathbf{M}((x_1 x_2 x_3 x_4)).$$

A magasabbrendű interakciók elhanyagolása miatt az alábbi modellből indulhatunk ki:

$$(6) \quad \begin{aligned} (x_1 x_2 x_3 x_4) = & \mu + A_{x_1} + B_{x_2} + C_{x_3} + D_{x_4} + \\ & + AB_{x_1+x_2} + AB_{x_1+2x_2}^2 + AC_{x_1+x_3} + AC_{x_1+2x_3}^2 + AD_{x_1+x_4} + \\ & + AD_{x_1+2x_4}^2 + BC_{x_2+x_3} + BC_{x_2+2x_3}^2 + BD_{x_2+x_4} + BD_{x_2+2x_4}^2 + \\ & + CD_{x_3+x_4} + CD_{x_3+2x_4}^2 + \varepsilon_{x_1 x_2 x_3 x_4} (x_1, x_2, x_3, x_4 = 0, 1, 2), \end{aligned}$$

ahol az $\varepsilon_{x_1 x_2 x_3 x_4}$ valószínűségi változók összességükben függetlenek, normális eloszlásúak, 0 várható értékkel és a szintektől független, de ismeretlen σ szórással; az interakciók indexei mod 3 értendők.

Becslési feladatunk három részből áll:

1. A (6) egyenlet jobboldalán álló főhatások és interakciók, valamint μ becslése.

2. A fenti becslések hibájának megadása.

3. σ^2 becslése.

Ebben a paragrafusban az 1. pontban megjelölt feladattal foglalkozunk. Vezessük be a következő jelöléseket:

$[qj]$ azon kísérlet mért eredménye, amely a 2. táblázatban a q -adik blokkban a j -edik helyen áll ($q = 1, 2, \dots, 5; j = 1, 2, \dots, 9$);

$$\{qy_p\} \quad (q = 1, 2, \dots, 5; y = a, b, c, d; p = 0, 1, 2)$$

a q -adik blokk azon három kísérletének összege, ahol az első, második, harmadik illetve negyedik faktor (erre az a, b, c, d betűk utalnak) a p -edik szinten szerepel;

$$(7) \quad \begin{aligned} [q \cdot] &= \sum_{j=1}^9 [qj] \\ \bar{\mu}_1 &= \frac{1}{27} \sum_{q=1}^3 [q \cdot] \\ \bar{\mu}_2 &= \frac{1}{27} \sum_{q=3}^5 [q \cdot] \\ \bar{\mu} &= \frac{1}{2} (\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2) \\ A(\hat{\mu}) &= \frac{1}{2} (\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2) \\ \hat{\mu} &= \frac{1}{45} \sum_{q=1}^5 [q \cdot]. \end{aligned}$$

A főhatások és interakciók első lépésben nyert (felülvonással jelölt) becsléseit a 3. táblázat tartalmazza. Az első öt becslés az 1–3. blokk kísérletein, a további öt becslés a 3–5. blokk kísérletein, az utolsó hat becslés az 1–5. blokk kísérletein alapul.

3. táblázat

$$\bar{D}_p = \frac{1}{9} \sum_{q=1}^3 \{qd_p\} - \bar{\mu}_1$$

$$\overline{AD}_p = \frac{1}{9} \sum_{q=1}^3 \{qb_{p+2q}\} - \bar{\mu}_1$$

$$\overline{AD}_p^2 = \frac{1}{9} \sum_{q=1}^3 \{qc_{p+q}\} - \bar{\mu}_1$$

$$\overline{BD}_p = \frac{1}{9} \sum_{q=1}^3 \{qc_{p+2q}\} - \bar{\mu}_1$$

$$\overline{BD}_p^2 = \frac{1}{9} \sum_{q=1}^3 \{qa_{p+q}\} - \bar{\mu}_1$$

$$\bar{C}_p = \frac{1}{9} \sum_{q=3}^5 \{qc_p\} - \bar{\mu}_2$$

$$\overline{AC}_p = \frac{1}{9} \sum_{q=3}^5 \{qb_{2p+q}\} - \bar{\mu}_2$$

$$\overline{AC}_p^2 = \frac{1}{9} \sum_{q=3}^5 \{qd_{p+q}\} - \bar{\mu}_2$$

$$\overline{BC}_p = \frac{1}{9} \sum_{q=3}^5 \{qa_{2p+q}\} - \bar{\mu}_2$$

$$\overline{BC}_p^2 = \frac{1}{9} \sum_{q=3}^5 \{qd_{2p+2q}\} - \bar{\mu}_2$$

$$\overline{CD}_p = \frac{1}{18} \left(\sum_{q=1}^3 \{qa_{p+2q}\} + \sum_{q=3}^5 \{qa_{p+2q}\} \right) - \bar{\mu}$$

$$\overline{CD}_p^2 = \frac{1}{18} \left(\sum_{q=1}^3 \{qb_{p+q}\} + \sum_{q=3}^5 \{qb_{p+2q}\} \right) - \bar{\mu}$$

$$\bar{A}_p = \frac{1}{18} \left(\sum_{q=1}^3 \{qa_p\} + \sum_{q=3}^5 \{qa_p\} \right) - \bar{\mu} - \frac{1}{2} (\overline{BC}_{2p} + \overline{BD}_p^2)$$

$$\bar{B}_p = \frac{1}{18} \left(\sum_{q=1}^3 \{qb_p\} + \sum_{q=3}^5 \{qb_p\} \right) - \bar{\mu} - \frac{1}{2} (\overline{AC}_{2p} + \overline{AD}_p)$$

$$\overline{AB}_p = \frac{1}{9} \sum_{q=1}^3 \{qc_{2p}\} - \bar{\mu}_1 - \bar{C}_{2p}$$

$$\overline{AB}_p^2 = \frac{1}{9} \sum_{q=3}^5 \{qd_{2p}\} - \bar{\mu}_2 - \bar{D}_{2p}$$

($p = 0, 1, 2$).

A 3. táblázat első tizenkét kifejezésének számítási módját egy példán mutatjuk be. Az AD_p^2 kifejezést úgy kapjuk meg, hogy az (5) kongruencia-rendszerhez hozzávesszük az

$$x_1 + 2x_4 \equiv p$$

egyenletet. A három kongruencia következményeként (összeadva azokat) az

$$x_3 \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + p$$

egyenletet kapjuk; $\alpha_1 + \alpha_2$ viszont kongruens a blokk sorszámával. Azoknak a kísérleteknek az átlaga, ahol a harmadik faktor a q -edik blokkban ($q = 1, 2, 3$) a p -edik szinten ($p = 0, 1, 2$) szerepel:

$$\frac{1}{9} \sum_{q=1}^3 \{qc_{p+q}\},$$

ebből kivonva az első 27 kísérlet átlagát, kapjuk az AD^2 interakció p -edik szinten vett értékének becslését.

Nem térünk itt ki részletesen annak indokolására, hogy egyes becslések miért alapulnak az első három blokk kísérletein, mások viszont a 3–5. blokk kísérletein. Számítással azonban könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az említett becslések torzítatlanok, hasonlóképpen arról is, hogy például a 3. táblázat első öt képletében becsült interakciók nem becsülhetők a 3–5. blokkból, mert ott egyéb interakciókkal keverednek. Erre a körülményre egyébként a megfelelő kongruenciák lineáris következményeinek tanulmányozása útján is lehet következtetni.

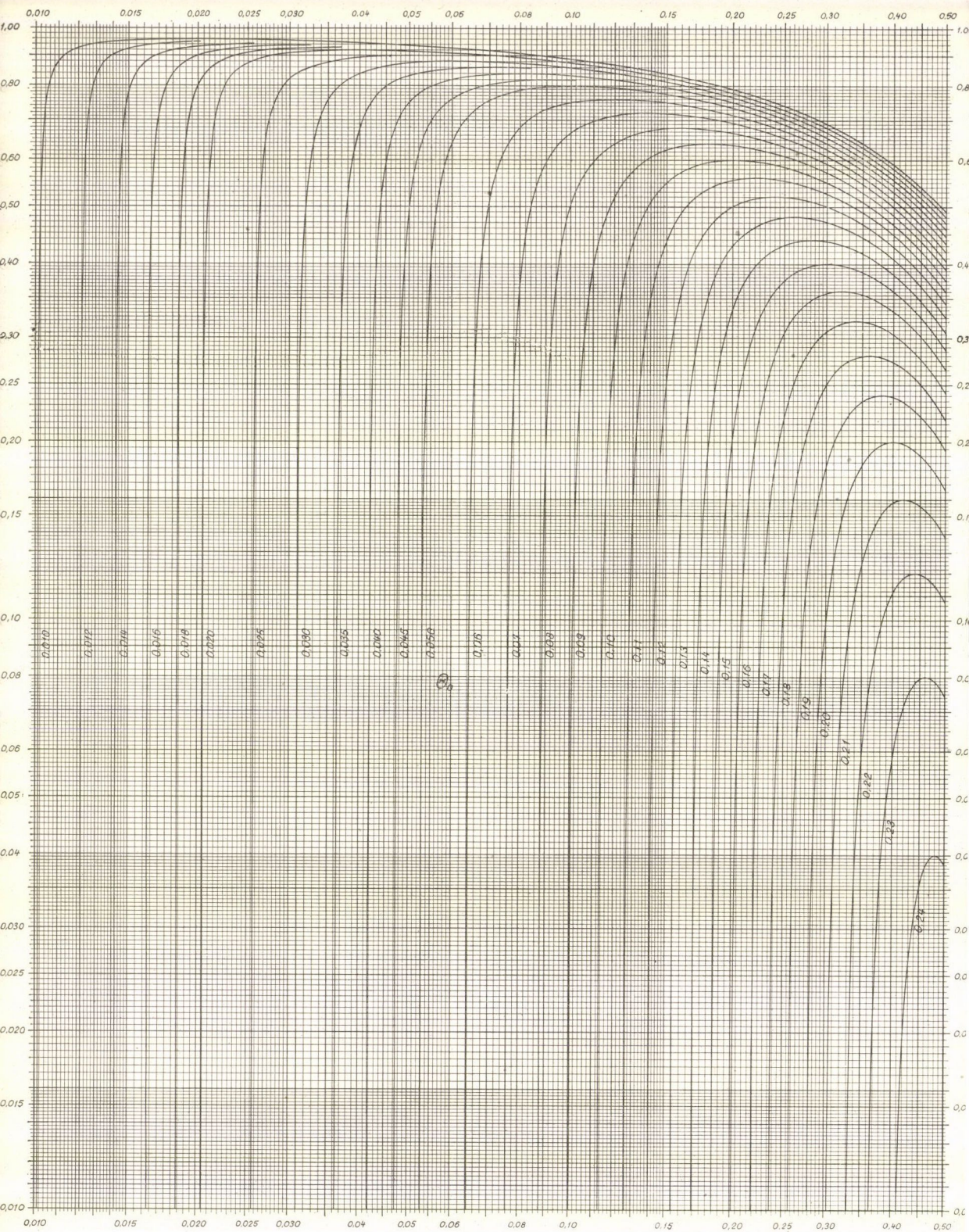
A 3. táblázat utolsó négy kifejezése baloldalán álló mennyiségek becslési módja kissé bonyolultabb. Példának okáért az AB_p interakció az 1–3. blokkon belül keveredik a C_{2p} ($p = 0, 1, 2$) főhatással (lásd (5) első egyenletét), és így a becslés csak két lépésben végezhető el: az első lépésben a 3–5. blokk kísérleteiből megkapjuk a C főhatás becslését, a második lépésben az 1–3. blokk kísérletei alapján már becsülhetjük az AB interakciót, felhasználva a C főhatás előbbi becslését.

A 3. táblázatban foglalt becslések nyilván rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy

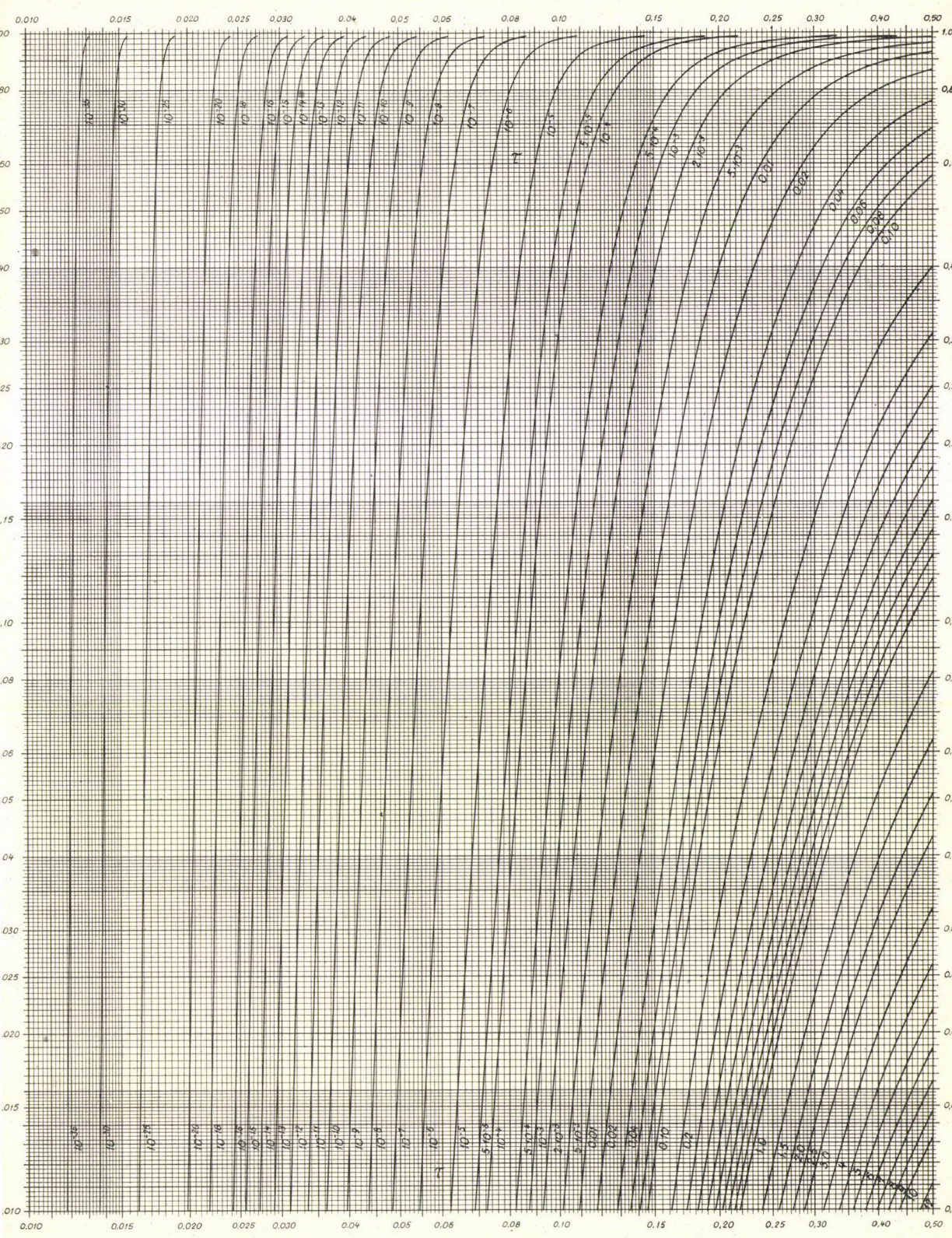
$$\sum_{p=0}^2 \bar{Y}_p = 0,$$

ahol \bar{Y}_p jelentheti a baloldalon álló kifejezések bármelyikét. A főhatások és interakciók becslései összesen 32 szabadságfokot foglalnak le, μ becslése egy szabadságfokot, míg a blokkhatás konstansai további 4 szabadságfokot. Így 45 kísérlet elvégzése esetén 8 szabadságfokú kifejezést konstruálhatunk σ^2 becslésére (lásd 5. §); ebben a becslésben játszanak szerepet az ún. *hibatagok*, amelyek a 4. táblázatban láthatók. A 4 hibatag korrelálatlan egymással és összesen 8 szabadságfokot foglal le. Ezenkívül abban az esetben, ha blokkonként kontrollkísérletet is végeznek, ez az 5 kísérlet további 4 független hibatag képzésére ad módot (vagyis kiegyenlítik a blokkbeosztásra fordított 4 szabadságfokot), ezeket az 5. §-ban adjuk meg. Ebben az esetben 1 szabadságfokot a kontrollkísérlet beállítása foglal le, mert műszaki okokból a kontroll-

⁶ Mivel feltételeztük a normális eloszlást, a korrelálatlanság egyúttal független, séget is jelent. Mikor itt és a továbbiakban a „korrelálatlan” kifejezést használjuk, ez a szó arra céloz, hogy a függetlenség a kovariancia kiszámításával ellenőrizhető.



14. ábra



4. táblázat

$$\overline{AB^2D_p^2} = \frac{1}{9} \sum_{q=1}^3 \{q d_{p+2q}\} - \mu_1$$

$$\overline{ABC_p^2} = \frac{1}{9} \sum_{q=3}^5 \{q c_{p+2q}\} - \mu_2$$

$$\Delta(CD)_p = \frac{1}{18} \left(\sum_{q=1}^3 \{q a_{p+2q}\} - \sum_{q=3}^5 \{q a_{p+2q}\} \right) - \Delta(\mu)$$

$$\Delta(CD_2)_p = \frac{1}{18} \left(\sum_{q=1}^3 \{q b_{p+q}\} - \sum_{q=3}^5 \{q b_{p+2q}\} \right) - \Delta(\mu) \quad (p = 0, 1, 2)$$

kísérletek beállítása a faktoriális kísérletsorozat 81 lehetséges szintkombinációja mindegyikétől különbözik. Ebben a paragrafusban egyelőre úgy számolunk, mintha a kontrollkísérletek nem volnának, egyébként — mint utólag megmutatjuk — ezek feltételezése itt még semmi változást nem okoz.

A kovarianciák kiszámítása. A továbbiak szempontjából szükséges, hogy a 3. és 4. táblázatban felírt becslések kovarianciáját kiszámítsuk. A számítási mód a következő:

Legyenek \bar{Y} és \bar{Z} a 3. vagy a 4. táblázatban felírt becslések,

$$\bar{Y}_p = \sum_{q=1}^5 \sum_{j=1}^9 [qj] y(q, j; p)$$

$$\bar{Z}_r = \sum_{q=1}^5 \sum_{j=1}^9 [qj] z(q, j; r) \quad (p, r = 0, 1, 2)$$

Ekkor

$$\text{cov}(\bar{Y}_p, \bar{Z}_r) = \sigma^2 \sum_{q=1}^5 \sum_{j=1}^9 y(q, j; p) z(q, j; r),$$

ti. két különböző kísérlethez tartozó kovariancia a kísérletek függetlensége miatt 0. A továbbiakban a következő, egyszerűen belátható összefüggést használjuk fel:

$$\text{cov} \left(\left(\{q u_p\} - \frac{1}{3} [q \cdot] \right) \left(\{q' v_r\} - \frac{1}{3} [q' \cdot] \right) \right) = \begin{cases} 2\sigma^2, & \text{ha } q = q', u = v, p = r \\ -\sigma^2, & \text{ha } q = q', u = v, p \neq r \\ 0, & \text{ha } q \neq q' \text{ vagy } u \neq v \end{cases}$$

(8)

$$(q, q' = 1, 2, \dots, 5; u, v = a, b, c, d; p, r = 0, 1, 2)$$

A 3. és 4. táblázat becslései négy csoportra oszthatók fel aszerint, hogy a kifejezések jobboldalán a szumma-jel után az a, b, c illetve d betű áll (ennek megfelel az 5a, 5b, 5c., 5d táblázat); (8) következményeként a nem ugyanabba a csoportba tartozó becslések korrelálatlanok.

Az 5. táblázat nem tünteti fel közvetlenül a megfelelő becslések összes komponenseinek kovarianciáit, illetve azokat a tényezőket, amellyel a σ^2 alapszórásnégyzetet megszorozva a becslések kovarianciáit kapjuk. A táblázatban fel nem tüntetett komponenspárok kovarianciája $(-1/2)$ -szerese a táblázatban feltüntetett komponenspároknak.

5. táblázat

	\bar{A}_p	\overline{BC}_{2p}	\overline{BD}_p^2	\overline{CD}_p	$\Delta(CD)_p$
\bar{A}_p	$\frac{2}{27}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{27}$	—	—
\overline{BC}_{2p}	$-\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$
\overline{BD}_p^2	$-\frac{1}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{81}$
\overline{CD}_p	—	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	—
$\Delta(CD)_p$	—	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{81}$	—	$\frac{2}{81}$

a)

	\bar{B}_p	\overline{AC}_{2p}	\overline{AD}_p	\overline{CD}_p^2	$\Delta(CD^2)_p$
\bar{B}_p	$\frac{2}{27}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{27}$	—	—
\overline{AC}_{2p}	$-\frac{1}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$
\overline{AD}_p	$-\frac{1}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{81}$
\overline{CD}_p^2	—	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$	—
$\Delta(CD^2)_p$	—	$\frac{1}{81}$	$-\frac{1}{81}$	—	$\frac{2}{81}$

b)

	\bar{C}_p	\overline{AB}_{2p}	\overline{AD}_p^2	\overline{BD}_p	\overline{ABC}_p^2
\bar{C}_p	$\frac{2}{27}$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$	—
\overline{AB}_{2p}	$-\frac{4}{81}$	$\frac{8}{81}$	$-\frac{2}{81}$	$-\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$
\overline{AD}_p^2	$\frac{2}{81}$	$-\frac{2}{81}$	$\frac{2}{27}$	—	$\frac{2}{81}$
\overline{BD}_p	$\frac{2}{81}$	$-\frac{2}{81}$	—	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$
\overline{ABC}_p^2	—	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{27}$

c)

	\bar{D}_p	\overline{AB}_{2p}^2	\overline{AC}_p^2	\overline{BC}_{2p}	$\overline{AB^2D}_p^2$
\bar{D}_p	$\frac{2}{27}$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$	—
\overline{AB}_{2p}^2	$-\frac{4}{81}$	$\frac{8}{81}$	$-\frac{2}{81}$	$-\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$
\overline{AC}_p^2	$\frac{2}{81}$	$-\frac{2}{81}$	$\frac{2}{27}$	—	$\frac{2}{81}$
\overline{BC}_{2p}	$\frac{2}{81}$	$-\frac{2}{81}$	—	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$
$\overline{AB^2D}_p^2$	—	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{27}$

d)

Példák:

$$\text{cov}(\bar{A}_p, \overline{BD}_r^2) = \begin{cases} -\frac{\sigma^2}{27}, & \text{ha } p = r \\ \frac{\sigma^2}{54}, & \text{ha } p \neq r, \end{cases} \quad (p, r = 0, 1, 2).$$

$$\text{cov}(\bar{A}_p, \overline{BC}_r) = \begin{cases} -\frac{\sigma^2}{27}, & \text{ha } p \equiv 2r \\ \frac{\sigma^2}{54}, & \text{ha } p \not\equiv 2r, \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy valamennyi becslés és hibatag korrelálatlan $\hat{\mu}$ -ra.

Ha figyelembe vesszük, hogy a három komponensű becslések (hibatagok) közül csak kettő lineárisan független, akkor 33 becslésünk és 8 hibatagunk van. Ezekhez számítsuk még hozzá a 4 független blokk-konstans becslését is (ezeket egyelőre nem írtuk fel). A megfigyelési értékeknek e 45 lineáris függvénye között további kapcsolat már nincsen: ugyanis a hibatagok egymás között sztochasztikusan függetlenek, egyéb kapcsolat pedig a várható értékek közötti kapcsolatot vonná maga után; ilyen pedig nincs, mert a becslött mennyiségek valódi értékei tetszőlegesek lehetnek. Így ez a 45 lineáris függvény funkcionálisan független. Ezért a 45 megfigyelési érték minden további függvénye az említett 45 függvényből előállítható. Ebből következik, hogy minden 0 várható értékű függvény a hibatagok függvénye. Ugyanazon mennyiségre adott két torzítatlan becslés különbségének várható értéke 0 és így ugyancsak előállítható a hibatagok függvényeként.

Az \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} , \overline{CD} és \overline{CD}^2 becslések — amint ez az 5. táblázatból látható — az összes hibataggal korrelálatlanok. Mivel korrelálatlan tag hozzáadása egy változóhoz annak szórását csak növeli, így az említett becslések minimális szórású lineáris becslések. A többi becslések az 5. táblázat szerint csak egy-egy hibataggal korreláltak, így a többi konstans mindegyikének legkisebb szórású lineáris becslése a 4. táblázatban megadottól csak olyan kifejezéssel különbözik, amely ezen hibatag komponenseinek lineáris függvénye. Kimutatjuk, hogy mindegyik esetben elég a hibatagnak csak egyik komponensét figyelembe venni, éspedig azt, amelyik a vizsgált becsléskomponensnek az 5. táblázat szerint megfelel.

Azaz legyen \bar{Y}_r a 3. táblázat valamelyik kifejezése és legyen $H_{p(r)}$ annak a hibatagnak, amely az 5. táblázatban az \bar{Y}_r -rel egy résztáblázatban szerepel, az a komponense, amelyet a táblázat neki megfeleltet (a \overline{BD}^2 , \overline{AD} , \overline{AD}^2 , \overline{BD} , \overline{AC}^2 becslések esetén $p(r) = r$, a \overline{BC} , \overline{AC} , \overline{AB} , \overline{AB}^2 , \overline{BC}^2 becsléseknél $p(r) = 2r$). Akkor, — mint kimutatjuk, — β megfelelő megválasztása mellett az

$$(9) \quad \hat{Y}_r = \bar{Y}_r - \beta H_{p(r)} \quad (r = 0, 1, 2)$$

becslésre teljesülni fog:

$$(10) \quad \text{cov}(\hat{Y}_r, H_s) = 0 \quad (r, s = 0, 1, 2),$$

vagyis, mivel \hat{Y}_r az összes hibatagtól független, minimális szórású lineáris becslés lesz. A (10) összefüggés az $s = p(r)$ esetben nyilván akkor áll fenn, ha

$$(11) \quad \beta = \frac{\text{cov}(\bar{Y}_r, H_{p(r)})}{\mathbf{D}^2(H_{p(r)})},$$

(azaz $\beta \bar{Y}_r$ -nek $H_{p(r)}$ -re vonatkozó regressziós együtthatója).

Legyen $H_{q(r)}$ a hibatag egy másik komponense; az 5. táblázathoz fűzött megjegyzés szerint

$$\text{cov}(\bar{Y}_r, H_{q(r)}) = -\frac{1}{2} \text{cov}(\bar{Y}_r, H_{p(r)})$$

és

$$\text{cov}(H_{p(r)}, H_{q(r)}) = -\frac{1}{2} \mathbf{D}^2(H_{p(r)}),$$

tehát a (11) összefüggésből

$$\text{cov}(\hat{Y}_r, H_{q(r)}) = -\frac{1}{2} \text{cov}(\hat{Y}_r, H_{p(r)}) = 0$$

is következik.

β értékei az 5. táblázat alapján meghatározhatók. Az így nyert becsléseket a 6. táblázat tünteti fel.

6. táblázat

$$\begin{array}{ll} \hat{A}_p = \bar{A}_p & \hat{B}_p = \bar{B}_p \\ \hat{BC}_p = \bar{BC}_p - \frac{1}{2} \Delta(CD)_{2p} & \hat{AC}_p = \bar{AC}_p - \frac{1}{2} \Delta(CD^2)_{2p} \\ \hat{BD}_p^2 = \bar{BD}_p^2 + \frac{1}{2} \Delta(CD)_p & \hat{AD}_p = \bar{AD}_p + \frac{1}{2} \Delta(CD^2)_p \\ \hat{CD}_p = \bar{CD}_p & \hat{CD}_p^2 = \bar{CD}_p^2 \\ \hat{C}_p = \bar{C}_p & \hat{D}_p = \bar{D}_p \\ \hat{AB}_p = \bar{AB}_p - \frac{1}{3} \overline{ABC}_{2p}^2 & \hat{AB}_p^2 = \bar{AB}_p^2 - \frac{1}{3} \overline{AB^2D}_{2p}^2 \\ \hat{AD}_p^2 = \bar{AD}_p^2 - \frac{1}{3} \overline{ABC}_p^2 & \hat{AC}_p^2 = \bar{AC}_p^2 - \frac{1}{3} \overline{AB^2D}_p^2 \\ \hat{BD}_p = \bar{BD}_p - \frac{1}{3} \overline{ABC}_p^2 & \hat{BC}_p^2 = \bar{BC}_p^2 - \frac{1}{3} \overline{AB^2D}_{2p}^2 \end{array}$$

$$(p = 0, 1, 2).$$

A 6. táblázat kiegészítéseképpen a (7) képlet μ becsléseként megadja a $\hat{\mu}$ mennyiséget. Ez szintén minimális szórású lineáris becslés.

A 6. táblázatban megadott becslések kovarianciatáblázatát a 7. táblázat tünteti fel ugyanolyan módon, mint az 5. táblázat a felülvonásos becsléseket; azaz a különböző résztáblázatban szereplő becslések egymással korrelálatlanok, továbbá a táblázatban nem szereplő komponenspárok $(-1/2)$ -szeresei a táblá-

zatban megtalálható komponenspárokénak. A táblázat alapján nyert értékeket még meg kell szorozni a σ^2 alapszórással.

7. táblázat

	\hat{A}_p	\hat{BC}_{2p}	\hat{BD}_p^2	\hat{CD}_p
\hat{A}_p	$\frac{2}{27}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{27}$	—
\hat{BC}_{2p}	$-\frac{1}{27}$	$\frac{11}{162}$	$\frac{5}{162}$	$\frac{1}{81}$
\hat{BD}_p^2	$-\frac{1}{27}$	$\frac{5}{162}$	$\frac{11}{162}$	$\frac{1}{81}$
\hat{CD}_p	—	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$

a)

	\hat{B}_p	\hat{AC}_{2p}	\hat{AD}_p	\hat{CD}_p^2
\hat{B}_p	$\frac{2}{27}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{27}$	—
\hat{AC}_{2p}	$-\frac{1}{27}$	$\frac{11}{162}$	$\frac{5}{162}$	$\frac{1}{81}$
\hat{AD}_p	$-\frac{1}{27}$	$\frac{5}{162}$	$\frac{11}{162}$	$\frac{1}{81}$
\hat{CD}_p^2	—	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{4}{81}$

b)

	\hat{C}_p	\hat{AB}_{2p}	\hat{AD}_p^2	\hat{BD}_p
\hat{C}_p	$\frac{2}{27}$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$
\hat{AB}_{2p}	$-\frac{4}{81}$	$\frac{22}{243}$	$-\frac{8}{243}$	$-\frac{8}{243}$
\hat{AD}_p^2	$\frac{2}{81}$	$-\frac{8}{243}$	$\frac{16}{243}$	$-\frac{2}{243}$
\hat{BD}_p	$\frac{2}{81}$	$-\frac{8}{243}$	$-\frac{2}{243}$	$\frac{16}{243}$

c)

	\hat{D}_p	\hat{AB}_{2p}^2	\hat{AC}_p^2	\hat{BC}_{2p}^2
\hat{D}_p	$\frac{2}{27}$	$-\frac{4}{81}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{81}$
\hat{AB}_{2p}^2	$-\frac{4}{81}$	$\frac{22}{243}$	$-\frac{8}{243}$	$-\frac{8}{243}$
\hat{AC}_p^2	$\frac{2}{81}$	$-\frac{8}{243}$	$\frac{16}{243}$	$-\frac{2}{243}$
\hat{BC}_{2p}^2	$\frac{2}{81}$	$-\frac{8}{243}$	$-\frac{2}{243}$	$\frac{16}{243}$

d)

A 7. táblázat kiegészítéseképpen megadjuk $\hat{\mu}$ szórásnégyzetét:

$$(12) \quad \mathbf{D}^2(\hat{\mu}) = \frac{1}{45} \sigma^2.$$

A 6. táblázatban megadott minimális szórású lineáris becslések Markov tétele ([3], 32 o.) értelmében egyúttal a legkisebb négyzetek elvének megfelelő becslések is. Mivel a normális eloszlást feltételeztük, mindegyik becslés nemcsak a lineáris becslések, hanem az összes lehetséges torzítatlan becslések között minimális szórású.

A 6. táblázatban megadott becslések alapján a (6) képlet alkalmazásával becslést adhatunk tetszőleges szintkombináció mellett végzett kísérlet eredményének várható értékére:

$$(13) \hat{\mu}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \hat{\mu} + \hat{A}_{x_1} + \hat{B}_{x_2} + \dots + \hat{CD}_{x_3+2x_4} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4 = 0, 1, 2),$$

valamint különböző szintkombinációknak megfelelő becslések egymásközi eltéréseire. Ezeknek a becsléseknek a szórását a 7. táblázat alapján kiszámíthatjuk. A számítást a kísérleti eredmények várható értékeinek becslésére vonatkozóan a 6. §-ban el is végezzük.

A hibatagok alapján becslést adtunk a σ^2 szórásnégyzetre az 5. §-ban, ugyanitt közöljük a szóráselemzés táblázatát is, amelynek alapján az elsőrendű interakciók szignifikáns volta megvizsgálható.

5. §. Szórásbecslés és szóráselemzés

A szórás becsléséhez a hibatagok négyzeteit az 5. táblázatból kikeresett szórásnégyzet-tényezőikkel osztva, összeadjuk, ezt a négyzetösszeget kell azután a szabadságfokkal osztani. Egy-egy hibatag három komponensének négyzetösszege χ^2 -eloszlású 2 szabadságfokkal, így ezek összege 8 szabadságfokú χ^2 -eloszlású.

Itt, a gyakorlati esetnek megfelelően, már tekintetbe vesszük a kontrollkísérletek által szolgáltatott hibatagokat is. Jelölje k_q ($q = 1, 2, \dots, 5$) az egyes blokkok közepén elvégzett kontrollkísérlet eredményét.

Vezessük be az

$$\eta_q = \frac{1}{9} [q \cdot] - \hat{\mu} - k_q + \bar{k} \quad (q = 1, 2, \dots, 5)$$

jelölést, ahol

$$\bar{k} = \frac{1}{5} \sum_{q=1}^5 k_q.$$

Könnyen belátható, hogy az η_q mennyiségek várható értéke 0, és korrelálatlanok az előző paragrafusban bevezetett valamennyi becsléssel és hibataggal. Ebből következik, hogy a 4. §-ban megadott becslések legkisebb négyzetbecslések abban az esetben is, ha kontrollkísérleteket is végeznek. Az η_q mennyiségek szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2(\eta_q) = \frac{8}{9} \sigma^2 \quad (q = 1, 2, \dots, 5).$$

A $\left(\sum_{q=1}^5 \eta_q^2 \right) / \mathbf{D}^2(\eta_q)$ négyzetösszeg 4 szabadságfokú χ^2 -eloszlású. Vezessük be az

$$S = \frac{9}{8} \left[12 \sum_{p=0}^2 (\overline{AB^2D}_p^2) + 12 \sum_{p=0}^2 (\overline{ABC}_p^2) + 36 \sum_{p=0}^2 (\overline{ACD}_p^2) + 36 \sum_{p=0}^2 (\overline{ACD^2}_p^2) + \sum_{q=1}^5 \eta_q^2 \right]$$

jelölést.

Alkalmazva a χ^2 -eloszlás additivitási tulajdonságát, s felhasználva az 5. táblázatban megadott értékeket, az S/σ^2 kifejezés 12 szabadságfokú, χ^2 -eloszlású, azon hipotézis mellett, hogy a másod- és harmadrendű interakciók 0-val egyenlők.

$$s^2 = \frac{S}{12} = \frac{3}{32} \left[12 \sum_{p=0}^2 (\overline{AB^2D_p^2})^2 + 12 \sum_{p=0}^2 (\overline{ABC_p^2})^2 + \right. \\ \left. + 36 \sum_{p=0}^2 (\Delta(CD)_p)^2 + 36 \sum_{p=0}^2 (\Delta(CD^2)_p)^2 + \sum_{q=1}^5 \eta_q^2 \right]$$

torzítatlan, 12 szabadságfokú becslése σ^2 -nek.

A főhatások legkisebb négyzet-becslése azon hipotézis mellett, hogy az elsőrendű interakciók is eltűnnek, az előző paragrafusban ismertetett módon határozható meg. Az eredményt a 8. táblázat tartalmazza.

8. táblázat

$$\begin{aligned} \tilde{A}_p &= \hat{A}_p + \frac{2}{5} \hat{BC}_{2p} + \frac{2}{5} \hat{BD}_p - \frac{1}{5} \hat{CD}_p \\ \tilde{B}_p &= \hat{B}_p + \frac{2}{5} \hat{AC}_{2p} + \frac{2}{5} \hat{AD}_p - \frac{1}{5} \hat{CD}_p^2 \\ \tilde{C}_p &= \hat{C}_p + \frac{2}{5} \hat{AB}_{2p} - \frac{1}{5} \hat{AD}_p^2 - \frac{1}{5} \hat{BD}_p \\ \tilde{D}_p &= \hat{D}_p + \frac{2}{5} \hat{AB}_{2p}^2 - \frac{1}{5} \hat{AC}_p^2 - \frac{1}{5} \hat{BC}_{2p}^2 \end{aligned}$$

E becslések szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2(\tilde{A}_p) = \mathbf{D}^2(\tilde{B}_p) = \mathbf{D}^2(\tilde{C}_p) = \mathbf{D}^2(\tilde{D}_p) = \frac{2}{45} \sigma^2 \quad (p = 0, 1, 2).$$

A 7. táblázat alapján \tilde{A}_p , \tilde{B}_p , \tilde{C}_p és \tilde{D}_p egymással korrelálatlanok, tehát a megfelelő négyzetösszegek is függetlenek:

$$S_A = \frac{45}{2} \sum_{p=0}^2 (\tilde{A}_p)^2$$

$$S_B = \frac{45}{2} \sum_{p=0}^2 (\tilde{B}_p)^2$$

$$S_C = \frac{45}{2} \sum_{p=0}^2 (\tilde{C}_p)^2$$

$$S_D = \frac{45}{2} \sum_{p=0}^2 (\tilde{D}_p)^2.$$

A blokkhatást a

$$\xi_q = \frac{1}{9} [q \cdot] + k_q - \hat{\mu} - \bar{k}$$

eltérések jellemzik, ezek eloszlása azonos az η_q eltérésekével, így a blokkhatásnak megfelelő négyzetösszeg

$$S_{BL} = \frac{9}{8} \sum_{q=1}^5 \xi_q^2.$$

A kontrollkísérlet beállítását jellemzi a $\bar{k} - \hat{\mu}$ különbség, ennek szórásnégyzete: $\frac{2}{9} \sigma^2$, úgy hogy a megfelelő empirikus (1 szabadságfokú) szórásnégyzet

$$S_k = \frac{9}{2} (\bar{k} - \hat{\mu})^2.$$

Jelölje végül

$$S_t = \sum_{q=1}^5 \left(\sum_{i=0}^9 \left([q_i] - \frac{9\hat{\mu} + \bar{k}}{10} \right)^2 + \left(k_q - \frac{9\hat{\mu} + \bar{k}}{10} \right)^2 \right)$$

a teljes négyzetösszeget.

Ezeknek a mennyiségeknek a segítségével összeállíthatjuk az alábbi szórásfelbontó táblázatot:

9. táblázat

A szórási eredete	Négyzetösszeg	Szabadságfok
Blokk	S_{BL}	4
Kontrollkísérlet	S_k	1
<i>A</i>	S_A	2
<i>B</i>	S_B	2
<i>C</i>	S_C	2
<i>D</i>	S_D	2
Elsőrendű interakciók	$S_t - S_{BL} - S_k - S_A - S_B - S_C - S_D - S$	24
Maradék	S	12
Teljes	S_t	49

A megfelelő szórásnégyzeteket úgy nyerjük, hogy a négyzetösszeget a megfelelő szabadságfokkal osztjuk. A szórásfelbontó táblázat segítségével elvégezhetjük a szóráselemzésnél szokásos próbákat (lásd pl. [3], [4], [5], [6]).

Mivel mindegyik hibatagban szerepelnek a másodrendű interakciók, így ezek szignifikanciájára csak úgy végezhetünk próbát, ha megvizsgáljuk, hogy melyik hibatag milyen mértékben függ a másodrendű interakcióktól. A 10. táblázat feltünteti az alaphipotézisünk szerint standardizált hibatagok szórásnégyzetét azon H_1 ellenhipotézis mellett, hogy csak a harmadrendű

interakciók tűnnek el, míg a másodrendű interakciók független valószínűségi vektorváltozók 0 várható értékkel és

$$(14) \quad \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \tau^2 \sigma^2$$

kovarianciamátrixszal.

10. táblázat

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{D}^2(\overline{AB^2D_p^2} | H_1)}{\mathbf{D}^2(\overline{AB^2D_p^2})} &= \frac{\mathbf{D}^2(\overline{ABC_p^2} | H_1)}{\mathbf{D}^2(\overline{ABC_p^2})} = 1 + \frac{81}{2} \tau^2, \\ \frac{\mathbf{D}^2(\Delta(CD)_p | H_1)}{\mathbf{D}^2(\Delta(CD)_p)} &= \frac{\mathbf{D}^2(\Delta(CD^2)_p | H_1)}{\mathbf{D}^2(\Delta(CD^2)_p)} = 1 + 81 \tau^2 \\ &(p = 0, 1, 2); \\ \frac{\mathbf{D}^2(\eta_q | H_1)}{\mathbf{D}^2(\eta_q)} &= 1 + \frac{81}{20} \tau^2 \quad (q = 1, 2, \dots, 5). \end{aligned}$$

A táblázatból látható, hogy az η_q mennyiségek kevésbé függenek a másodrendű interakcióktól, mint a többiek, ezért az

$$(15) \quad F = \frac{8S - 9 \sum_{q=1}^5 \eta_q^2}{18 \sum_{q=1}^5 \eta_q^2}$$

(8, 4) szabadságfokú F -eloszlású statisztika alapján vizsgálhatjuk a másodrendű interakciók szignifikanciáját.

6. §. A (13) alatti becslés szórása

Ebben a paragrafusban a tetszőleges szintkombináció esetére adott (13) alatti becslés szórásnégyzetét számítjuk ki. Nyilván felírható, hogy

$$\mathbf{D}^2(x_1 \hat{x}_2 x_3 x_4) = Q_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + 2 Q_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (x_1, x_2, x_3, x_4 = 0, 1, 2),$$

ahol

$$\begin{aligned} Q_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \mathbf{D}^2(\hat{\mu}) + \mathbf{D}^2(\hat{A}_{x_1}) + \mathbf{D}^2(\hat{B}_{x_2}) + \dots + \\ &+ \mathbf{D}^2(\hat{CD}_{x_3+2x_4}^2) = \frac{17}{15} \sigma^2, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} Q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \text{cov}(\hat{A}_{x_1}, \hat{B}_{x_2}) + \text{cov}(\hat{A}_{x_1}, \hat{C}_{x_3}) + \\ &+ \dots + \text{cov}(\hat{CD}_{x_3+x_4}, \hat{CD}_{x_3+2x_4}^2). \end{aligned}$$

$Q_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 120 tag összege, de ezen tagok közül csak 22 különbözik nullától, (amint az a 7. táblázatból látható); a számítási munka teljesen leegyszerűsödik, mert igaz a következő állítás:

$$(16) \quad Q_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} -\frac{5}{27} \sigma^2 & \text{a 3-dik blokkba tartozó kísérleteknél} \\ -\frac{11}{54} \sigma^2 & \text{az 1., 2., 4. és 5. blokkba tartozó kísérleteknél} \\ \frac{1}{4} \sigma^2 & \text{az el nem végzett kísérleteknél.} \end{cases}$$

Bizonyítás. a) Legyen $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ a 3. blokkba tartozó kísérlet, azaz legyen

$$y_1 + y_2 + y_3 \equiv y_1 + 2y_2 + y_4 \equiv 0.$$

Alkalmazzuk cikkünk problémájára az

$$x'_i \equiv x_i - y_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

szinttranszformációt. Ez a transzformáció az ABC és AB^2D interakciók szintjét változatlanul hagyja, így az elvégzendő kísérletek ugyanazok maradnak és a blokkbeosztás változatlan marad. A transzformáció az $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ szintkombinációt a (0000) szintkombinációba viszi át. A legkisebb négyzetek módszere egyetlen megoldáshoz vezet, s így

$$\mathbf{D}^2(y_1 \hat{y}_2 \hat{y}_3 y_4) = \mathbf{D}^2(0 \hat{0} \hat{0} 0).$$

amiből, a $Q_2(0, 0, 0, 0)$ kifejezést a 7. táblázat alapján kiszámolva, (16) első része következik.

b) Legyen $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ az 1. vagy 2. blokkba tartó kísérlet, azaz legyen

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &\equiv 0 \\ y_1 + 2y_2 + y_4 &\neq 0. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk a következő szinttranszformációt:

$$x'_i \equiv x_i - y_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$x'_4 \equiv (x_1 + 2x_2 + x_4)(y_1 + 2y_2 + y_4) - x_1 + y_1 - 2x_2 + 2y_2.$$

Ez a transzformáció az ABC interakció szintjét változatlanul hagyja, az AB^2D interakció szintjét $(y_1 + 2y_2 + y_4)$ -szeresére változtatja, így az elvégzendő kísérletek ugyanazok maradnak és a blokkbeosztás — a blokkok sorrendjétől eltekintve — változatlan marad. Az a) alatti következtetést megismételve, nyerjük, hogy

$$(17) \quad \mathbf{D}^2(y_1 \hat{y}_2 \hat{y}_3 y_4) = \mathbf{D}^2(0 \hat{0} \hat{0} 1).$$

c) Ha $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ a 4. vagy 5. blokkba tartozik, azaz

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &\neq 0 \\ y_1 + 2y_2 + y_4 &\equiv 0, \end{aligned}$$

a megfelelő transzformáció

$$\begin{aligned} x'_1 &\equiv x_1 - y_1 \\ x'_2 &\equiv 2x_2 - 2y_2 \\ x'_3 &\equiv x_4 - y_4 \end{aligned}$$

$$x'_4 \equiv (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) - x_1 + y_1 - x_2 + y_2.$$

A transzformáció az ABC interakció szintjét $(y_1 + y_2 + y_3)$ -szorosára változtatva, felcseréli az AB^2D interakció szintjével, így az előzőkhöz hasonlóan az elvégzendő kísérleteken és a blokkbeosztáson nem változtat. (17) tehát ebben az esetben is érvényes és így (16) második állítása a 7. táblázat alkalmazásával igazolható.

d) Ha $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ a 2. táblázatban nem szerepel, azaz

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &\neq 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_4 &\neq 0, \end{aligned}$$

akkor az

$$\begin{aligned} x'_1 &\equiv x_1 - y_1 \\ x'_2 &\equiv x_2 - y_2 \\ x'_3 &\equiv (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) - x_1 + y_1 - x_2 + y_2 \\ x'_4 &\equiv (x_1 + 2x_2 + x_4)(y_1 + 2y_2 + y_4) - x_1 + y_1 - 2x_2 + 2y_2 \end{aligned}$$

transzformáció alkalmazása hasonlóan, mint fentt, arra vezet hogy

$$\mathbf{D}^2(y_1 \widehat{y_2} y_3 y_4) = \mathbf{D}^2(00\widehat{11}),$$

és így a (16) utolsó állítása is a 7. táblázat alkalmazásával egyszerűen igazolható.

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk és így a (13) alatti becslés szórásnégyzetére a következő eredményt kaptuk:

$$(18) \quad \mathbf{D}^2(x_1 \widehat{x_2} x_3 x_4) = \begin{cases} \frac{103}{135} \sigma^2 & \text{a 3. blokkba tartozó kísérleteknél} \\ \frac{98}{135} \sigma^2 & \text{az 1., 2., 4. és 5. blokkba tartozó kísérleteknél} \\ \frac{49}{30} \sigma^2 & \text{az el nem végzett kísérleteknél.} \end{cases}$$

μ becslésének elhagyása. Becslési eljárásunk módosítható olyanformán, hogy a (13) egyenlőség jobboldaláról $\hat{\mu}$ -t elhagyjuk. Az így számított „kísérleti eredmények” várható értéke egy ismeretlen additív konstansban különbözik a valódi kísérleti eredmények várható értékétől. A számított értékek egymáshoz viszonyítva — a becslési hibától eltekintve — helyes képet mutatnak, ami lehetővé teszi az optimális szintkombináció kiválasztását, de anélkül, hogy az optimális beállítás melletti kísérlet eredményének várható értékét ismernénk.⁷

Az eljárás előnye viszont az, hogy a becslés szórásnégyzete némileg csökken (a $Q_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$ kifejezésből elhagyható $D^2(\hat{\mu})$). Megállapíthatjuk, hogy ez a módosítás a szórásokban csupán 1–2%-os eltéréseket eredményez.

7. §. Gyakorlati útmutatás a számítások elvégzéséhez

A 3–6. § számos olyan megállapítást, táblázatot, levezetést tartalmaz, amelynek a kísérleti adatok kiértékelésénél közvetlen szerepe nincs. Ezért közlünk egy olyan útmutatást, amely összefoglalja a számítás főbb lépéseit.

A kísérleti tervben szereplő faktorokat és ezek szintjeit a műszaki körülmények alapján kell kijelölni. Az elvégzendő 45 kísérlet elrendezését a 2. táblázat tünteti fel. Az egy blokkba tartozó kísérletek egymásután végzendők el (mezőgazdasági alkalmazásnál egymás melletti parcellákon). A 2. táblázatban nem szerepelnek a kontrollkísérletek. Kontrollkísérletek beállítására más korlátozás nincsen, csak az, hogy valamennyi azonos beállítású legyen. Az öt kontrollkísérletet az öt blokk „közepén”, azaz vagy a 4. és 5., vagy az 5. és 6. kísérlet közé iktatjuk be.

Némely esetben célszerű, ha a kapott kísérleti eredményeket transzformáljuk, és a transzformált értékeket tekintjük „kísérleti eredmény”-nek⁸.

A számítás első lépése a (7) alatti kifejezések meghatározása. A továbbiakban célszerű a $\{qy_p\}$ (lásd (7) képlet felett) kifejezéseket mind a 60 lehetséges esetben kiszámítani, azaz elkészíteni a

$$\{1 a_0\} = (0001) + (0122) + (0210)$$

$$\{1 a_1\} = (1020) + (1111) + (1202)$$

— — —

$$\{5 d_2\} = (0202) + (1012) + (2122)$$

táblázatot. Ellenőrzési lehetőség:

$$\sum_{p=0}^2 \{qy_p\} = [q \cdot] \quad (q = 1, 2, \dots, 5; y = a, b, c, d).$$

⁷ A külső megbízásra végzett számításnál ezt az utat követtük, mert az optimális beállítás megtalálása volt a cél.

⁸ Például, ha a mért értékek 0 és 1 közé eső arányszámok, nem várható, hogy a hatások összegeződjenek, azaz a (6) alatti modell helyes legyen. Ekkor célszerű az

$$y = \log \frac{x}{1-x}$$

ún. logit-transzformáció alkalmazása. Ha az adatok 0 vagy 1 közelében csoportosulnak, logaritmikus transzformáció is megfelelő.

Fenti kifejezésekből, mint „előregyártott elemekből” kiszámítjuk a 3., 4. és 6. táblázatban feltüntetett becsléseket, illetve hibatagokat. A 6. táblázat becsléseire kapott értékeket behelyettesítjük (13) jobboldalába; így megkapjuk az elvégzett és az el nem végzett kísérletek várható értékének becslését.

A σ^2 becslésére szolgáló s^2 kifejezés kiszámításához előbb az η_q mennyiségek meghatározása szükséges; itt használjuk fel a kontrollkísérletek eredményét. A becslés pontosságára vonatkozóan a 12 szabadságfokú χ^2/f eloszlás táblázata (lásd pl. [7]) alapján nyerhetünk felvilágosítást, így például

$$(19) \quad P\left(\frac{s^2}{\sigma^2} > 1,7522\right) = 0,05,$$

azaz kapott becslésünk kb. 95%-os valószínűséggel $\frac{7}{4}\sigma^2$ alatt marad.

A szóráselemzéssel kapcsolatos próbák leírását mellőzzük, az erre vonatkozó irodalomra az 5. §-ban utalunk.

A magasabbrendű interakciók elhanyagolásának jogosságát a (15) kifejezés alapján vizsgálhatjuk; ha az F -próba alapján kapott eredmény nem megnyugtató, a modellünk alapján számított eredményeket csak bizonyos fenntartással fogadhatjuk el, ilyenkor, — amennyiben erre mód van — a további 36 kísérletet is célszerű elvégezni.

Végül a (13) alatti becslés szórását a (18) képlet alapján számíthatjuk ki. Ezen eredmények megbízhatóságának vizsgálatánál is alkalmazhatjuk a (19) összefüggést.

(Beérkezett: 1962. október 19.)

IRODALOM

- [1] BÁNKÖVI GY., SARKADI K., HORVÁTH J., JAKOB K.: „Über Entwurf und Auswertung von Dieselölentschwefelungsversuchen mit mathematisch-statistischen Methoden”. *Acta Chim. Hung.* **31** (1962) 23—30.
- [2] CONNOR, W. S., ZELEN, M.: *Fractional Factorial Experiment Designs For Factors at Three Levels*. National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 54, 1959.
- [3] KEMPTHORNE, O.: *The Design and Analysis of Experiments*. Wiley, New York, 1952.
- [4] MANN, H. B.: *Analysis and Design of Experiments*. Dover Publications, Inc., New York, 1949.
- [5] FINNEY, D. J.: *An Introduction to the Theory of Experimental Design*. The University of Chicago Press, 1960.
- [6] VINCZE I. (szerk.): *Statistikai minőségellenőrzés*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1958.
- [7] HALD, A.: *Statistical Tables and Formulas*. Wiley, New York, 1952.
- [8] ADDELMAN, S.: „Irregular Fractions of the 2^n Factorial Experiments”, *Technometrics* **3** (1961) 479—496.
- [9] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

ДРОБНО-ФАКТОРИАЛЬНОЕ ИСПЫТАНИЕ ТИПА 3⁴, С 5/9-ЫМ ПОВТОРЕНИЕМ

G. BÁNKÖVI и K. SARKADI

Резюме

Написанный неправильный, дробно-факториальный план испытания (Таблица 2) был разработан для оценки результатов опытов по обессериванию дизельного топлива, производимых в Исследовательском Институте по Высокому Давлению. Работа содержит формулы для оценки.

Неправильные, дробно-факториальные планы испытания различаются от более обще использованных (правильных) планов в том, что число всевозможных экспериментов не делимо на число производимых экспериментов. В работе [8] S. ABDELMAN исследует неправильные дробно-факториальные планы испытания типа 2ⁿ; авторы думают, что неправильные системы другого типа не исследованы в литературе до сих пор.

1-ая и 2-ая главы работы содержат основные понятия относительно факториальных испытаний. Используемая модель дается в 4-ой главе, уравнением (6); в этой модели пренебрежены взаимодействия второго и третьего порядка (начиная с этой главы индексы взаимодействий и конгруэнтностей поняти по модулю 3).

Проектирование производимых экспериментов и устройство блоков основаны на системе конгруэнций (5) (см. и Таблицу 1.). Формулы выводятся в двух шагах. Первые оценки основных эффектов и взаимодействий, основанные частью на блоках 1—3, частью на блоках 3—5, даются в Таблице 3. В этой таблице $[qj]$ означает наблюдаемое значение, результата измерения намеченного в Таблице 2, как j -тый эксперимент q -ого блока ($q = 1, 2, \dots, 5$; $j = 1, 2, \dots, 9$).

$\{qu_p\}$ означает сумму результатов тех трех экспериментов в q -ом блоке ($q = 1, 2, \dots, 5$), которые принадлежат к эффектам A , B , C или D (соответственно тому, что u равно a , b , c или d) на p -ом уровне ($p = 0, 1, 2$).

Члены ошибок даются в Таблице 4, каждый из четырех членов ошибок имеет 3 компонента и 2 степени свободы.

Таблица 5 — таблица ковариаций количеств содержащихся в Таблицах 3 и 4. Пары оценок принадлежащих к равным частям Таблицы 5 (5а, b, c, d) некоррелированы. Ковариация пар тех компонентов, которые не показываются в таблице, получается помножив ковариацию соответственных пар в таблице показанных компонентов на $-\frac{1}{2}$. Данные таблицы еще нужно помножить на дисперсию σ^2 ошибки.

В втором шаге образуются регрессивные остатки оценок Таблицы 3 относительно членов ошибок. Эти — оценки по методу наименьших квадратов и показываются в Таблице 6; их ковариации даются в Таблице 7 (толкование которой по аналогии Таблицы 5). Между средней величиной $\hat{\mu}$ (формула [7]) и каждой оценкой Таблиц 3, 4 и 6, нет корреляции. Дисперсия средней величины $\hat{\mu}$ дается формулой [12].

В 5-ой главе дается таблица дисперсионного анализа. По техническим причинам, в каждом блоке произведен контрольный эксперимент k_q ; это обстоятельство принято во внимание (т. е. контрольные эксперименты не оказы-

вают влияние на формулы предыдущей главы). В таблице дисперсионного анализа (Таблица 9) содержатся следующие источники дисперсии: Блоки, Контрольные эксперименты, Основные эффекты: A, B, C, D , Взаимодействия первого порядка, Остаточная, Итого. s^2 служит оценкой дисперсии σ^2 .

Каждый член ошибок зависит от взаимодействий второго порядка, но не в одной мере. В Таблице 10 содержатся дисперсии стандартизованных членов ошибок при альтернативной гипотезе H_1 ; по этой гипотезе взаимодействия второго порядка независимы, случайные векторные переменные с математическим ожиданием 0 и с матрицами ковариаций данными формулой (14). На основе Таблицы 10, статистика (15) дисперсионного отношения с степенями свободы 8, 4, предлагается для критерий значимости взаимодействий второго порядка.

В 6-ой главе исчисляется дисперсия оценки (13). Доказывается, что эта дисперсия

$$D^2(x_1 \hat{x}_2 \hat{x}_3 x_4) = \begin{cases} \frac{103}{135} \sigma^2, & \text{относительно экспериментов, содержащихся в бло-} \\ & \text{ке 3,} \\ \frac{98}{135} \sigma^2, & \text{относительно экспериментов, содержащихся в бло-} \\ & \text{ках 1, 2, 4, 5,} \\ \frac{49}{30} \sigma^2, & \text{относительно не произведенных экспериментов.} \end{cases}$$

В 7-ой главе даются практические указания на выполнение численного расчета.

5/9 REPLICATION OF A 3^4 FACTORIAL EXPERIMENT

G. BÁNKÖVI and K. SARKADI

Abstract

The irregular fractional factorial experiment described here (Table 2) was worked out at the request of the High Pressure Research Institute for the investigation of oil desulphurisation. The paper includes formulae for evaluation.

Irregular fractional replications of factorial experiments differ from the more commonly used (regular) ones in that the number of all possible treatment combinations is not divisible by the number of the treatment combinations to be performed. Irregular fractions of 2^n factorial experiments are dealt with by S. ADDELMAN [8], those of other systems are believed not to be treated in the literature till now.

Sections 1–2 give basic concepts concerning factorial experiments.

The model applied is given in Section 4, Eq. (6), according to which the three- and four factor interaction are neglected. From this Section on, interaction indices as well as congruences refer to the module 3.

The design of the experiments to be performed and the block arrangement are based on the congruence system (5) (see also Table 1). The evaluating formulae are derived in two steps. The first estimates of the main effects and interactions, based partly on blocks 1–3, partly on blocks 3–5, are

given in Table 3. Here $[qj]$ denotes the observed value of the experiment, marked by Table 2, as the j -th treatment combination of the q -th block ($q = 1, 2, \dots, 5; j = 1, 2, \dots, 9$) $\{qy_p\}$ denotes the sum of the results of three observations within the q -th ($q = 1, 2, \dots, 5$) block, belonging to the effects A, B, C or D (according to whether y equals a, b, c or d resp.) and on the p -th level ($p = 0, 1, 2$).

Table 4 gives the error terms. There are four error terms, each having 3 components and 2 degrees of freedom.

Table 5 is the covariance table of the quantities of Tables 3 and 4. Pairs of estimates appearing in different subtables of Table 5 are uncorrelated. The covariance of pairs of components not appearing in the table is obtained by multiplying the covariance of the corresponding pairs of components appearing in the table with $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Entries of the table are to be multiplied by the variance σ^2 of the error term.

In the second step we formed the regression residuals of the estimates of Table 3 in respect of the error terms. These are least square estimates and are given in Table 6, while Table 7 gives their covariances (use of Table 7 is analogous to that of Table 5). The average $\hat{\mu}$ (formula (7)) is uncorrelated to each of the other estimates, its variance is given by formula (12).

Section 5 gives the analysis of variance table. By technical reasons in each block a control experiment k_q is performed, this circumstance is taken into account (the control experiments do not affect the formulae of the preceding Section). The rows of the analysis of variance table (Table 9) are as follows: Blocks, Control experiments, Main effects: A, B, C, D , Interactions of the first order, Remainder, Total. The estimate of the variance σ^2 is given by s^2 .

All error terms are dependent from the three-factor interactions but not to the same degree. Table 10 gives the variances of the standardised error terms under the alternative hypothesis H_1 that the three-factor interactions are independent random vector variates with expectations 0 and covariance matrices given by (14). On basis of Tables 10 the test statistic given in (15), having degrees of freedom 8, 4, is to be recommended to test the significance of the three-factor interactions.

In Section 6 the variance of the estimate given by (13) is computed. It is proved that this variance

$$D^2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} \frac{103}{135} \sigma^2 \text{ concerning treatment combinations contained in} \\ \text{Block 3} \\ \frac{98}{135} \sigma^2 \text{ concerning treatment combinations contained in} \\ \text{Blocks 1, 2, 4, 5} \\ \frac{49}{30} \sigma^2 \text{ concerning treatment combinations not to be per-} \\ \text{formed.} \end{cases}$$

Section 7 gives practical hints for numerical application.