

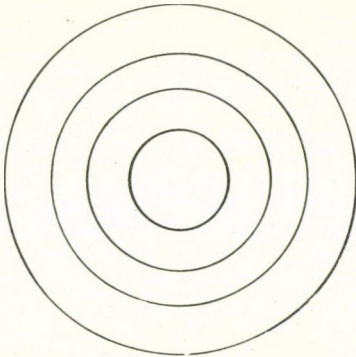
HULLÁMOS LEMEZ DEFORMÁCIÓJA ADOTT TERHELÉS MELLETT I

BIHARI IMRE

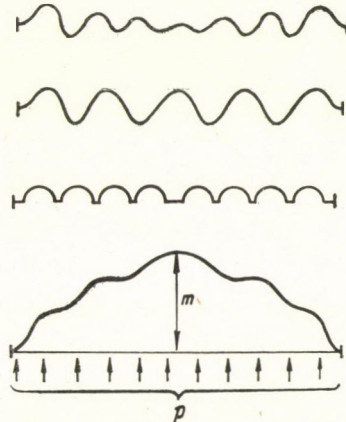
Bevezetés

Nyomásmérő, regisztráló műszerekben gyakran alkalmaznak hullámos felületű lemezzel fedett zárt dobozokat. A doboz és a lemez többnyire kör-alakú. A hullámosítás célja az, hogy a lemez közepének a kitérése nagy legyen és kellő módon — lehetőleg arányosan — függjön a nyomástól. A hullámok koncentrikusan helyezkednek el a lemez felületén (1. ábra) és alakjuk a 2. ábra szerinti, vagy bármely más alak lehet. A lemez közepén az érintősík mindig vízszintes. A technikusokat elsősorban az érdekli, hogy a lemez közepének a kitérése milyen függvénye a nyomásnak, illetve az, hogy hogyan kell a lemez felületét hullámosítani, hogy ez a függvény egy előírt $m = f(p)$ függvény legyen (3. ábra). A hullámokat a lemez felületére préseléssel viszik rá.

Megjegyezzük, hogy a lemez — ellentétben a membránnal — hajlítással szemben rugalmas ellenállást mutat. Az utóbbi erre csak kifeszített állapotban képes. — A műszerekben a lemez egyenletes eloszlást mutató nyomás (terhelés) alatt áll. Először a lemeznek — vastagságához képest — csak kis kitérését fogjuk vizsgálni (nagy kihajlás tárgyalását lásd 3.-ban), valamint feltesszük, hogy pontjainak a kitérése a szimmetriasíkjára merőleges¹, végül azt, hogy



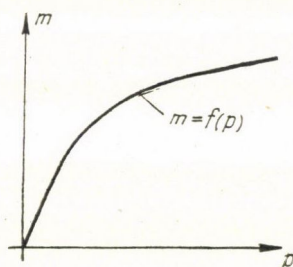
1. ábra



2. ábra

¹ Ez feltehető, ha a hullámok elég „laposak”.

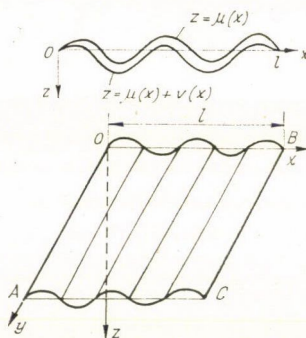
a lemez homogén, izotrop és rugalmas viselkedése a Hooke-törvénynek megfelelő. A kérdés tanulmányozása céljából előbb a következő — önmagában sem érdektelen — segédfeladatot oldjuk meg.²



3. ábra

1. Téglalap alakú, hosszú, hullámos lemez hengeres hajlítása

A lemez hossza legyen tetszőleges, szélessége l , vastagsága h és hosszával párhuzamosan hullámos. Legyen befogva, vagy forgásképesen feltámasztva (ún. egyszerű feltámasztás) az \overline{OA} és \overline{BC} szélei mentén úgy, hogy vízszintes reakcióerő ne támadjon. Különben az alakváltozás jórészt hajlítás és nem nyújtás következménye, amiért a mondott reakcióerő csak jelentéktelen lehet.



4. ábra

Keressük a lemez lehajlását adott terhelés mellett. A koordinátarendszer helyzetét a 4. ábra mutatja. — Hogy a hajlítás hengeres az azt jelenti, hogy független az y -tól, ami elérhető, ha a lemez elég hosszú. Tekintsük a lemez ún. középfelületét. Legyen az (xz) síkkal párhuzamos metszetének az egyenlete terheletlen helyzetben $z = u(x)$, terhelve — lehajlás után — $z = w(x) = u(x) + v(x)$. Tehát $v(x)$ magát a lehajlást jelenti.

² Hullámos kör alakú lemez feszültségi állapotának meghatározását lásd K. Stange: Der Spannungszustand einer Kreisringschale, Ingenieur-Archiv 2 (1931) 47—91. dolgozatában. A lemez kihajlását ott nem tárgyalja. Módszere roppant nehézkes.

Az $u(x)$ -ről feltesszük, hogy görbülete abszolút értékben egy bizonyos pozitív érték alatt marad. $u(x)$ és $v(x)$ legyenek szakaszonként háromszor folytonosan differenciálhatók. A v lehajlást és v' deriváltját abszolút értékben kicsinek vesszük u — ill. u' -höz képest, illetve, ahol az $|u|$ ill. $|u'|$ kicsiny, ott a h -ill. az 1 -hez képest. A v' -re vonatkozó feltevést indokolja, hogy — mint már megjegyeztük — a jelen esetben elsősorban csak hajlításról van szó, a nyújtás igen kis mértékű, sőt a középfelületnél semmi. Nincs ívhosszváltozás.³ Ilyenkor a középfelületre merőleges sík-keresztmetszetek hajlítás után is ugyanilyenek maradnak, csak elfordulnak úgy, hogy a lemezt mint egy l hosszúságú, h vastagságú rudat tekinthetjük. Vegyük a lemeznek két y tengellyel párhuzamos normálsík közé eső elemi darabját. Legyen a síkok szöge $d\alpha$, a középfelületből kimetszett szakasz hossza ds_0 , a tőle z távolságban⁴ kimetszett szakasz hossza ds , a középfelület görbületi sugara R . Terhelés (hajlítás) alatt e mennyiségek legyenek $d\alpha'$, $ds'_0 = ds_0$, ds' , R' . Számítsuk ki az $\varepsilon_x = \frac{ds' - ds}{ds}$ relatív nyúlást. Az 5. ábra szerint

$$ds = (R + z) d\alpha = (R + z) \frac{ds_0}{R} = ds_0 + \frac{z}{R} ds_0$$

$$ds' = (R' + z) d\alpha' = (R' + z) \frac{ds_0}{R'} = ds_0 + \frac{z}{R'} ds_0.$$

Ebből

$$ds' - ds = z \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) ds_0$$

és így

$$(1) \quad \varepsilon_x = \frac{ds' - ds}{ds} = z \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) \frac{ds_0}{ds} = z \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) \frac{R}{R + z}.$$

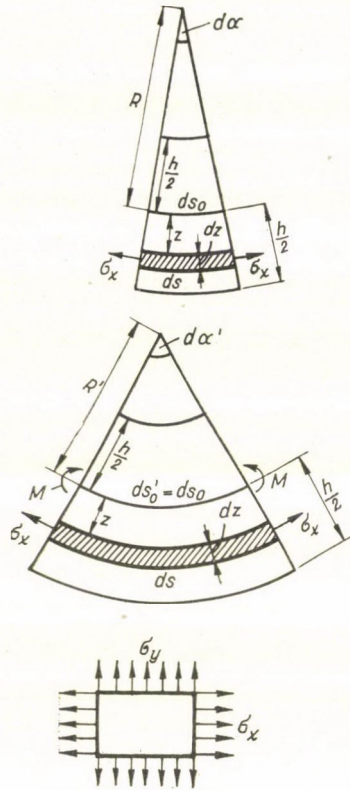
(Pl. ha síklemezt hajlítunk $R = \infty$, $\varepsilon_x = \frac{z}{R'}$ Hooke-törvénye szerint az ε_x , ε_y relatív nyúlások a σ_x , σ_y feszültségekkel így függnek össze:

$$(2) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E} = 0 \end{cases}$$

ahol E a nyújtási modulus, ν a Poisson-féle állandó $\left(0 < \nu < 1; kb. = \frac{1}{3} \right)$.

³ Viszont, ha minden x -re szigorúan (és nem közelítőleg) fennállna, hogy $\int_0^x \sqrt{1 + u'^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + w'^2} dx$, akkor innen $u'(x) \equiv w'(x)$, ill. $u(x) \equiv w(x)$ következne.

⁴ Itt z nem a z tengely mentén mért koordináta, hanem a középrétegtől a normálsík mentén vett távolság.



5. ábra

Az oldalirányú (y irányú) nyúlásnak zérusnak kell lennie, hogy hajlítás alatt a lemez folytonos maradjon, amiből következik, hogy $\sigma_y = \nu\sigma_x$ és így

$$(3) \quad \varepsilon_x = \frac{(1 - \nu^2)\sigma_x}{E}, \quad \text{ill.} \quad \sigma_x = \frac{E\varepsilon_x}{1 - \nu^2}$$

és ez a fentiek szerint

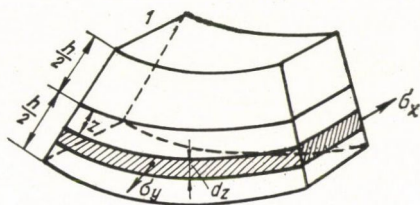
$$(4) \quad \sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} R \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) \frac{z}{R + z}.$$

Számítsuk ki ennek a forgatónyomatékát egy y tengellyel párhuzamos és a középfelületben benne levő tengelyre és a lemez egységnyi hosszára.⁵ Ez

$$(5) \quad M = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = \frac{E}{1 - \nu^2} R \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2}{R + z} dz^*$$

⁵ Ami egyensúly esetén majd a külső erők nyomatékával kell hogy egyenlő legyen.

* **Megjegyzés a korrektúrájánál.** FREUD GÉZA felhívta a figyelmemet az (1), (4), (6) képletek bizonyos Grashof-féle képletekkel való hasonlóságára (l. pl. MUTNYÁNSZKY: Szilárdságtan (1961) 279–292. o.). Ezek azonban csak rudakra vonatkoznak. Lemezek ilyen tárgyalása — legjobb tudomásom szerint — nem ismeretes az irodalomban.



6. ábra

(ti. R és R' a z -től függetlenek), de

$$I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2}{R+z} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(z - R + \frac{R^2}{R+z} \right) dz = \left[\frac{(z-R)^2}{2} + R^2 \log(R+z) \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} =$$

$$= \frac{\left(R - \frac{h}{2} \right)^2 - \left(R + \frac{h}{2} \right)^2}{2} + R^2 \log \frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} = -hR + 2R^2 \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}}.$$

Mint kikötöttük, R egy pozitív érték fölött van, mégpedig legyen speciálisan $2R \gg h$, vagyis $\frac{h}{2R} \ll 1$. Ekkor a logaritmus sorfejtése gyorsan konvergál és

$$I = -hR + 2R^2 \left(\frac{h}{2R} + \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^5 + \dots \right) =$$

$$= -hR + hR + \frac{2R^2}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^3 \left(1 + \frac{3}{5} \left(\frac{h}{2R} \right)^2 + \frac{3}{7} \left(\frac{h}{2R} \right)^4 + \dots \right) \approx$$

$$\approx \frac{2R^2}{3} \left(\frac{h}{2R} \right)^3 = \frac{1}{12} \frac{h^3}{R}$$

és így

$$(6) \quad M = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) = D \left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

D a merevség (a hajlítással szemben való ellenállás) mértéke. Adott M -nél D növekedtével csökken az alakváltozás, ti. $\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}$. A (6)-ból

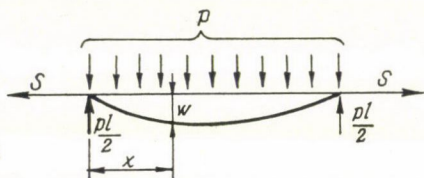
$$(7) \quad \frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{M}{D} = f(x) \quad (\text{ismert függvény}).$$

Ennek alapján a hajlított lemez alakja közelítőleg grafikusan is megszerkeszthető. $z = w(x)$ pedig az

$$(8) \quad \frac{1}{R'} = -\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = f(x)$$

egyenletből határozható meg. Itt $w' = r$ -t téve

$$\frac{r'}{(1+r^2)^{3/2}} = -f(x) \quad \text{ill.} \quad \int \frac{dr}{(1+r^2)^{3/2}} = -\int f(x) dx = F(x) + c_1$$



7. ábra

ahol $F(x)$ a $-f(x)$ egy primitív függvénye, vagyis

$$\frac{r}{\sqrt{r^2+1}} = F(x) + c_1$$

amelyből

$$r = \frac{dw}{dx} = \frac{F(x) + c_1}{\sqrt{1 - (F(x) + c_1)^2}}$$

és így

$$(9) \quad w(x) = \int \frac{F(x) + c_1}{\sqrt{1 - (F(x) + c_1)^2}} dx + c_2$$

Vizsgáljuk meg lehetséges-e a $w'(x) \approx u'(x)$ feltevés. Ha ez igaz, akkor (8)-ből

$$(10) \quad w'' = -f(x)(1+u'^2)^{3/2} = g(x) \quad (\text{ismert függvény}),$$

ahonnan w két egymásutáni kvadraturával kapható. A (10) kissé részletesebben így írható

$$(10') \quad w'' = u'' - \frac{M}{D}(1+u'^2)^{3/2}$$

Legyen pl. a lemez egyenletes p nyomással terhelve, akkor a hajlító nyomaték az x helyen a lemez hosszának 1 cm-ére vonatkoztatva

$$(11) \quad M = \frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2} = \frac{p}{2}x(l-x)$$

(a lemez alakjától függetlenül). Ezt (10')-be téve

$$(12) \quad w'' = u'' - \frac{p}{2D} x(l-x)(1+u'^2)^{3/2}$$

Innen

$$(13) \quad w'(x) = u'(x) - \frac{p}{2D} \int_0^x t(l-t)(1+u'^2(t))^{3/2} dt + K, \quad K = w'(0) - u'(0)$$

De állítólag $w'(x) \approx u'(x)$. Ez akkor teljesül kielégítő pontossággal, ha $\frac{p}{2D} \ll 1$.

Tehát csak ilyen nyomás (D -hez képest kis nyomás) jöhet számításba.

Ekkor $K = 0$ és (13)-ből az $\int_0^x (\int_0^t \varphi(z) dz) dt = \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt$ képlet felhasználásával

$$(14) \quad w(x) = u(x) - \frac{p}{2D} \int_0^x (x-t)t(l-t)(1+u'^2(t))^{3/2} dt + L, \quad L = w(0) - u(0) = 0$$

Továbbá

$$(15) \quad w(l) = u(l) - \frac{p}{2D} \int_0^l t(l-t)^2(1+u'^2(t))^{3/2} dt \quad \text{és} \quad u(l) = w(l) = 0$$

amivel ellentmondásra jutottunk, mert a (14) és (15)-beli integrálok nagyságrendje nem kisebb mint a (13)-beli integrálé. Így tehát csak azt kaptuk, hogy ha $\frac{p}{2D} \ll 1^*$, akkor $w(x) \approx u(x)$ ami nyilvánvalóan hibás, illetve semmitmondó. Tehát annak feltételezése, hogy $w'(x) \approx u'(x)$ (vagyis, hogy $|v'(x)| \ll \ll |u'(x)|$) helytelen.

Viszont lehetséges az a fentebb tett kikötés, hogy

$$|v'(x)| \ll |u'(x)|$$

kivéve ott, ahol $|u'(x)| \ll 1$, vagyis, ahol maga $|u'(x)|$ is kicsi, ahol viszont legyen $|v'(x)| \ll 1$. Ekkor tehát

$$1 + w'^2 = 1 + (u' + v')^2 = 1 + u'^2 + 2u'v' + v'^2 = \begin{cases} 1 + u'^2, & \text{ahol } |v'| \ll 1 \\ 1, & \text{ahol } |u'| \ll 1 \end{cases}$$

vagyis $1 + w'^2$ mindig $1 + u'^2$ -nek vehető. Ekkor (13) érvényben marad, csak $K \neq 0$ és $w'(x) \neq u'(x)$. A (14) helyett pedig

$$(14') \quad w(x) = u(x) - \frac{p}{2D} \int_0^x (x-t)t(l-t)(1+u'^2(t))^{3/2} dt + [w'(0) - u'(0)]x + L$$

* Helyesebben $\frac{p}{E} \ll 1$.

et kapunk, ahol $L = w(0) - u(0) = 0$, mert $w(0) = u(0) = 0$. Továbbá

$$(15') \quad w(l) = u(l) - \frac{p}{2D} \int_0^l t(l-t)^2 (1+u'^2)^{3/2} dt + [w'(l) - u'(l)]l = 0$$

és $u(l) = 0$ szintén. Így (15')-ből $w'(0)$ értékét megkapjuk. Ez

$$w'(0) = u'(0) + \frac{p}{2Dl} \int_0^l t(l-t)^2 (1+u'^2)^{3/2} dt.$$

Ezt (14')-be téve

$$(14'') \quad w(x) = u(x) - \frac{p}{2D} \int_0^x (x-t)t(l-t) (1+u'^2)^{3/2} dt + \frac{px}{2Dl} \int_0^l t(l-t)^2 (1+u'^2)^{3/2} dt.$$

Tehát a $v = w - u$ lehajlás p -vel arányos. (14'')-ben $x = \frac{l}{2}$ -t téve megkapjuk a lemez közepének a kitérését.

A σ_x feszültség (4) és (6) alapján

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} R \frac{M}{D} \frac{z}{R+z}$$

ami kiszámítható a (11) és az $R = -\frac{(1+u'^2)^{3/2}}{u''}$ képletek felhasználásával.

Viszont σ_y -t a $\sigma_y = \nu\sigma_x$ képlet adja meg.

Nem érdektelen a (7)-et pontosabb tárgyalás alá venni. (7) így írható

$$-\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = -\frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} + \frac{M}{D}.$$

Innen

$$\begin{aligned} \frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}} &= \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} - \frac{1}{D} \int_0^x M dt + C = \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} - \frac{p}{2D} \int_0^x (lt-t^2) dt + C = \\ &= \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} - \frac{p}{12D} x^2(3l-2x) + C, \quad C = \frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}} - \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \Big|_{x=0} \end{aligned}$$

Itt most újra alkalmazva a $\sqrt{1+w'^2} \approx \sqrt{1+u'^2}$ közelítést

$$w' = u' - \frac{p}{12D} x^2(3l-2x) \sqrt{1+u'^2} + C \sqrt{1+u'^2}.$$

Ezt integrálva

$$w = u - \frac{p}{12D} \int_0^x t^2(3l-2t) \sqrt{1+u'^2} dt + Cs_x$$

ahol $s_x = \int_0^x \sqrt{1 + u'^2} dx$ a $z = u(x)$ görbe ívhossza. Ebből

$$w(l) = u(l) - \frac{p}{12D} \int_0^l t^2(3l - 2t) \sqrt{1 + u'^2} dt + Cs_l = 0 \quad \text{és} \quad u(l) = 0.$$

Innen

$$C = \frac{p}{12Ds_l} \int_0^l t^2(3l - 2t) \sqrt{1 + u'^2} dt$$

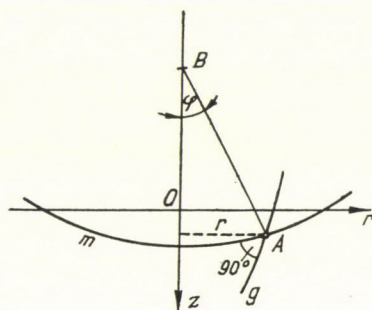
és így

$$w = u - \frac{p}{12D} \int_0^x t^2(3l - 2t) \sqrt{1 + u'^2} dt + \frac{ps_x}{12Ds_l} \int_0^l t^2(3l - 2t) \sqrt{1 + u'^2} dt.$$

A lehajlás itt is p -vel arányos és az $u(x)$ ívhosszától is függ.

2. Kör alakú, hullámos lemez kis kihajlása

2.1. Egy ilyen lemez terhelve is megtartja tengelykörüli szimmetriáját, ha a terhelés is tengelyszimmetrikus. Ez elsősorban a középfelületre nézve lényeges. Ekkor a terhelés csak a szimmetriatengelytől számított r távolságtól függ. Ugyanez érvényes az eredeti alakra és a lehajlásra is, vagyis $u = u(r)$,



8. ábra

$w = w(r)$ és a lehajlást elég csak egy meridiánsíkban vizsgálni. Ennek az m metszetének a görbülete az A pontban (terhelés nélkül)

$$(16) \quad \frac{1}{r_n} = - \frac{u''}{(1 + u'^2)^{3/2}}.$$

Az A ponton átmenő erre merőleges g normálmetszete B görbületi középpontja

a szimmetriatengelyen van, tehát a görbületi sugara $r_t = \overline{AB}$. (Ennek bizonyítását l. a Függelékben!) Ez a φ szöggel így fejezhető ki

$$(17) \quad r_t = \frac{r}{\sin \varphi} \quad \text{ill.} \quad \frac{1}{r_t} = \frac{\sin \varphi}{r}.$$

De $\sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = -\frac{u'}{(1 + u'^2)^{1/2}}$ (a $-$ jel a z tengely irányításának a következménye), tehát

$$(18) \quad \frac{1}{r_t} = -\frac{u'}{r(1 + u'^2)^{1/2}}.$$

Hooke-törvénye szerint a feszültségek és a relatív megnyúlások között az

$$(19) \quad \begin{cases} E \varepsilon_r = \sigma_r - \nu \sigma_t \\ E \varepsilon_t = \sigma_t - \nu \sigma_r \end{cases}$$

összefüggés áll fenn, melyből

$$(20) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t), \\ \sigma_t &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \varepsilon_r + \varepsilon_t). \end{aligned}$$

De az 1. szerint a középfelületől a normális mentén z távolságban

$$(21) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= z \left(\frac{1}{r'_n} - \frac{1}{r_n} \right) \frac{r_n}{r_n + z} \\ \varepsilon_t &= z \left(\frac{1}{r'_t} - \frac{1}{r_t} \right) \frac{r_t}{r_t + z}, \end{aligned}$$

ahol r'_n és r'_t a megterhelt lemezre vonatkoznak abban az A' pontban, melybe az A jutott. Tehát

$$(22) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\left(\frac{1}{r'_n} - \frac{1}{r_n} \right) r_n \frac{z}{r_n + z} + \nu \left(\frac{1}{r'_t} - \frac{1}{r_t} \right) r_t \frac{z}{r_t + z} \right] \\ \sigma_t &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\nu \left(\frac{1}{r'_n} - \frac{1}{r_n} \right) r_n \frac{z}{r_n + z} + \left(\frac{1}{r'_t} - \frac{1}{r_t} \right) r_t \frac{z}{r_t + z} \right]. \end{aligned}$$

A megfelelő hajlító (forgató) nyomatékok (1 cm-re vonatkoztatva)

$$\begin{aligned} M_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_r dz = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\left(\frac{1}{r'_n} - \frac{1}{r_n} \right) r_n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2}{r_n + z} dz + \nu \left(\frac{1}{r'_t} - \frac{1}{r_t} \right) r_t \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2}{r_t + z} dz \right], \\ M_t &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_t dz = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\nu \left(\frac{1}{r'_n} - \frac{1}{r_n} \right) r_n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2}{r_n + z} dz + \left(\frac{1}{r'_t} - \frac{1}{r_t} \right) r_t \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2}{r_t + z} dz \right]. \end{aligned}$$

De

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z^2 dz}{r+z} \approx \frac{1}{12} \frac{h^3}{r} \quad (1. a (6) \text{ előtt})$$

tehát

$$(23) \quad \begin{cases} M_r = D \left[\left(\frac{1}{r'_n} - \frac{1}{r_n} \right) + \nu \left(\frac{1}{r'_r} - \frac{1}{r_t} \right) \right] \\ M_t = D \left[\nu \left(\frac{1}{r'_n} - \frac{1}{r_n} \right) + \left(\frac{1}{r'_r} - \frac{1}{r_t} \right) \right] \end{cases} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Ebből (16) és (18) figyelembevételével

$$(24) \quad \begin{aligned} M_r &= D \left[\left(-\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} + \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} \right) + \frac{\nu}{r} \left(-\frac{w'}{(1+w'^2)^{1/2}} + \frac{u'}{(1+u'^2)^{1/2}} \right) \right] \\ M_t &= D \left[\nu \left(-\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} + \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}} \right) + \frac{1}{r} \left(-\frac{w'}{(1+w'^2)^{1/2}} + \frac{u'}{(1+u'^2)^{1/2}} \right) \right] \end{aligned}$$

Ez az

$$U = \frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}} - \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \approx \frac{w' - u'}{\sqrt{1+u'^2}}$$

jelölés és a

$$\frac{dU}{dr} + \frac{\nu}{r} U = \frac{1}{r^\nu} \frac{d}{dr} (r^\nu U)$$

összefüggés felhasználásával így írható⁶

$$(25) \quad \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{dU}{dr} + \frac{\nu}{r} U \right) = -\frac{D}{r^\nu} \frac{d}{dr} (r^\nu U) \\ M_t &= -D \left(\nu \frac{dU}{dr} + \frac{1}{r} U \right) = -\frac{D\nu}{r^{\frac{1}{\nu}}} \frac{d}{dr} (r^{\frac{1}{\nu}} U) \end{aligned}$$

2.2. Messünk ki a kör alakú lemezből egy elemi darabot, mégpedig a szimmetriatengelyen átmenő két síkkal (szögük $d\theta$) és két olyan (kúp) felülettel melyek merőlegesek a középfelületre és az (xy) sík rádiuszvektoraira (1. 9a. és 9b. ábra) és az (xy) sík mentén mért távolságuk dr . Ezen elemi rész egyensúlyi feltételének megállapítására vegyük szemügyre a fellépő forgatónyomatékokat.

⁶ Ti. pl.

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \right) = \frac{u''}{(1+u'^2)^{3/2}}$$

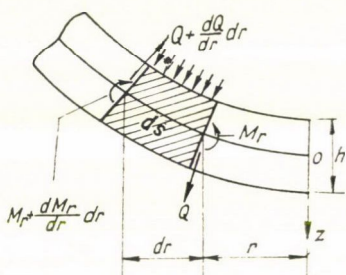
Az M_r a (cd) oldalon forogtat, az M_t pedig az (ad) és (bc) oldalon. Minden erő nyomatékát egy olyan irányú tengelyre vonatkoztatjuk, mely merőleges a rádiuszvektorra. A (cd) oldalon a forogatónyomaték

$$(26) \quad M_r, r d\theta$$

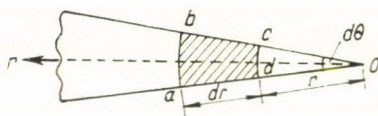
Az (ab) oldalon

$$(26') \quad \left(M_r + \frac{dM_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\theta.$$

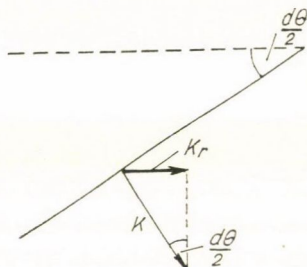
Az (ad) és (bc) oldalon ható σ_t feszültség egy dz szélességű, a középtől z távolságra levő sávon $K = \sigma_t dz ds$ erőt eredményez, mert az elem hossza nem dr ,



9a. ábra



9b. ábra



9c. ábra

hanem ds (l. 9a. ábra). Itt $ds = dr \sqrt{1 + w'^2} \approx dr \sqrt{1 + u'^2}$. Ennek az erőnek radiális összetevője (l. 9c. ábra)

$$K_r = \sigma_t dz ds \sin \frac{d\theta}{2} \approx \sigma_t dz ds \frac{d\theta}{2}$$

melynek a mondott (a radiális irányra merőleges) tengelyre való nyomatéka (a másik, a tengellyel párhuzamos összetevő nem forogtat)

$$\frac{1}{2} ds d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_t dz = \frac{1}{2} ds d\theta M_t \quad [\text{l. (22) után } M_t \text{ képletét}]$$

Az (ad) és (bc) oldalra ható nyomatékok összege tehát

$$(27) \quad M_t ds d\theta$$

Ezenkívül nyíróerők is működnek, de a szimmetria folytán csak az (ab) és (cd) oldalon. Ha ennek 1 cm-re eső értéke a (cd) oldalon Q , akkor ezen az egész nyíróerő $Qrd\theta$ és az (ab) oldalon $\left(Q + \frac{dQ}{dr} dr\right)(r + dr) d\theta$, melyek együttes nyomatékát a magasabbrendű kicsik elhanyagolásával (az utóbbi erő helyett is csak $Qrd\theta$ -t véve és e két erőt erőpárnak felfogva)

$$(28) \quad Qr d\theta ds$$

nek vesszük, mert ez erőpár karja ds . Az egyensúly feltétele a (26), (26'), (27), (28) nyomatékok megfelelő előjellel való összegének az eltűnése

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr} dr\right)(r + dr) d\theta - M_r r d\theta - M_t ds d\theta + Qr d\theta ds = 0, ds = dr \sqrt{1 + u'^2}$$

melyből a magasabbrendűek elhanyagolásával az

$$(29) \quad M_r + \frac{dM_r}{dr} r - (M_t - Qr) \sqrt{1 + u'^2} = 0$$

illetve

$$(29') \quad \frac{d(rM_r)}{ds} - M_t + Qr = 0$$

egyenletre jutunk. Beírva ide M_r és M_t (25) alatti értékét a

$$(30) \quad -D \frac{d}{dr} \left[r^{1-\nu} \frac{d}{dr} (r^\nu U) \right] + \frac{D\nu}{r^\nu} \frac{d}{dr} (r^\nu U) \sqrt{1 + u'^2} + Qr \sqrt{1 + u'^2} = 0$$

egyenletet kapjuk, mely a differenciálások elvégzése után a $\sqrt{1 + u'^2} = 1 + a(r)$ ($a(r) \geq 0$) jelölés bevezetésével az

$$(31) \quad r(rU')' - U - \frac{Q}{D} r^2 - \left(\nu rU' + U + \frac{Q}{D} r^2 \right) a = 0$$

alakot ölti. Ha pl. egyenletesen eloszló nyomás terheli a lemezt, akkor $Q = \frac{r^2 \pi p}{2r\pi} = \frac{pr^2}{2}$ és (31) így alakul

$$(31') \quad r(rU')' - U - \frac{p}{2D} r^3 - \left(\nu rU' + U + \frac{p}{2D} r^3 \right) a = 0.$$

Tekintsük eme pontosabb egyenlet helyett a közelítő (csonkított)

$$(31'') \quad r(rU')' - U - \frac{p}{2D} r^3 = 0$$

⁷ A lemez egy középponti kör alakú részére ható nyomóerő könnyen belátható módon egyenlő a vízszintes síkra való vetületére ható nyomóerővel.

egyenletet, mely (31')-ből az a -t tartalmazó tagok elhagyásával (lapos hullámok esete) áll elő.⁸ Ez az $r \frac{dU}{dr} = \frac{dU}{d\varrho} -$ azaz a $\frac{dr}{r} = d\varrho$, $\log r = \varrho$, $r = e^\varrho -$ helyettesítéssel a

$$\frac{d^2 U}{d\varrho^2} - U - \frac{p}{2D} e^{3\varrho} = 0$$

egyenletbe megy át, melynek általános megoldása $c_1 e^\varrho + c_2 e^{-\varrho} + \frac{p}{16D} e^{3\varrho}$ (c_1, c_2 tetszőleges állandók). Tehát a (31'') általános megoldása [és közelítőleg a (31')-é is]

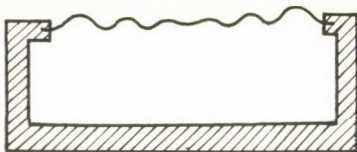
$$(32) \quad U = \frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}} - \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} \approx c_1 r + c_2 \frac{1}{r} + \frac{p}{16D} r^3.$$

De $r = 0$ esetén $u' = w' = 0$ (véges értékek), tehát $c_2 = 0$. A (31')-ben elhagyott tagok összege ekkor

$$(33) \quad H = \left[c_1(\nu + 1)r + \frac{(3\nu + 9)p}{16D} r^3 \right] a$$

melynek maximális lehetséges értékét meg fogjuk vizsgálni. Két esetet fogunk tárgyalni. Az egyik az, amikor a lemez széle szilárdan be van fogva, a másik az, amikor a lemez széle szabadon foroghat, vagyis a lemez szélén a radiális nyomaték M_r eltűnik és vízszintes reakcióerő nincs a lemez hullámosítása folytán (nem lévén nyúlás a középfelületben). Ez az ún. egyszerű feltámasztás esete.

A) *A befogott lemez esete.* A lemez széle nem szükségképpen van víz-



10. ábra

szintesen befogva (l. a későbbi példát), de mindenesetre $u'(R) = w'(R)$, vagyis $u(R) = 0 = c_1 R + \frac{p}{16D} R^3$, ahonnan $c_1 = -\frac{p}{16D} R^2$ és így

$$U = -\frac{p}{16D} r(R^2 - r^2)$$

és (32) szerint

$$(34) \quad \frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}} = \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} - \frac{p}{16D} r(R^2 - r^2) = f(r)$$

⁸ Később pontosabb közelítést is fogunk tárgyalni. L. 2.5. és 2.7-ben.

ahol $f(r)$ ismert függvény. Innen $w' = \frac{f}{\sqrt{1-f^2}}$ (a gyök pozitív előjellel veendő, mert w' és f előjele (34) szerint megegyezik) és így

$$(35) \quad w(r) = - \int_r^R \frac{f(t)}{\sqrt{1-f^2(t)}} dt \quad |ti \cdot w(R) = 0|.$$

Ha pedig (34)-ben a $\sqrt{1+w'^2} \approx \sqrt{1+u'^2}$ közelítést vesszük

$$w' = u' - \frac{p}{16D} r(R^2 - r^2) \sqrt{1+u'^2}$$

melyből

$$(36) \quad w(r) = u(r) + \frac{p}{16D} \int_r^R t(R^2 - t^2) \sqrt{1+u'^2(t)} dt \quad (u(R) = 0).$$

A lemez közepének a kitérése

$$(37) \quad m = w(0) - u(0) = \frac{p}{16D} \int_0^R r(R^2 - r^2) \sqrt{1+u'^2(r)} dr = pF(R).$$

A kitérés mindenütt a nyomással arányos és persze a középben a legnagyobb. — Fordítva, hogyan kell hullámosítani a lemezt, hogy m az előírt $pF(R)$ függvény-nyel legyen egyenlő? — Ehhez először közelítőleg megoldjuk a (36) (Volterra-típusúra emlékeztető) integrálegyenletet olyan módon, hogy az integrandusz $1+u'^2$ -e helyett $1+w'^2$ -et írunk. A megoldás tehát

$$(38) \quad u(r) = w(r) - \frac{p}{16D} \int_r^R t(R^2 - t^2) \sqrt{1+w'^2(t)} dt.$$

Ebből

$$m = w(0) - u(0) = \frac{p}{16D} \int_0^R t(R^2 - t^2) \sqrt{1+w'^2(t)} dt$$

és most válasszuk meg $w(r)$ -et úgy, hogy $m = pF(R)$ legyen. Nyilván ez végtelen sokféleképpen lehetséges. Ezek után egy követelményeinknek megfelelő $u(r)$ -et (38) ad.

A (33) alatti hiba értéke most

$$H = \frac{p}{16D} r(10r^2 - 1,33R^2)a$$

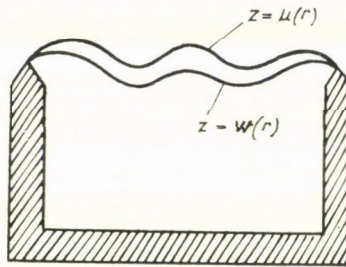
és $\frac{H}{a}$ $0 \leq r \leq R$ -beli maximumát $r = R$ -nél veszi fel. Ez $\frac{8,67 pR^3}{16D}$ és

$$H_{\max} \leq \frac{8,67 pR^3}{16D} \max a.$$

Ez persze akármilyen kicsivé tehető 1-hez képest a $\frac{pR^3}{D}$ kellő kicsire választásával, de ez semmit sem mond önmagában. A (31)-re való tekintettel viszonyítsuk H_{\max} -ot $U_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} R^3 \frac{p}{16D}$ -hez. Így az

$$H_{r \max} \leq \frac{8,67 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{2} \max a = 22,6 \max a$$

menyiséget kapjuk mint a pontosság valamilyen jellemzőjét, mely csak akkor kicsi, ha $\max a$ az (lapos hullámok). Nem lapos hullámok esetén a közelítés gyenge. Mégis ebben a pontban és a következő kettőben csak ezt az esetet tárgyaljuk, hogy kevés számítással a $w(r)$ alakulásának a tendenciájáról fogal-



11. ábra

mat alkothassunk. Pontosabb közelítést a 2.5. és 2.7. pontban határozunk meg.

B) *Egyszerű feltámasztás esete.* Ekkor $M_r|_{r=R} = 0$ kell legyen. De

$$M_r = -D \left(U' + \frac{\nu}{r} U \right)$$

és

$$M_r|_{r=R} = -D \left(U'(R) + \frac{\nu}{R} U(R) \right)$$

Azonban

$$U(r) = c_1 r + \frac{p}{16D} r^3, \quad U'(r) = c_1 + \frac{3p}{16D} r^2$$

és így

$$M_r|_{r=R} = -D \left[(1 + \nu) c_1 + \frac{(3 + \nu)p}{16D} R^2 \right] = 0.$$

Innen

$$c_1 = -\frac{3 + \nu}{1 + \nu} \frac{p}{16D} R^2$$

és így

$$U(r) = \frac{p}{16D} r \left(r^2 - \frac{3 + \nu}{1 + \nu} R^2 \right)$$

melyből a megoldást (35) adja, ha ott $f(r) = \frac{u'}{\sqrt{1+u'^2}} + \frac{p}{16D} r \left(r^2 - \frac{3+\nu}{1+\nu} R^2 \right)$ et írunk. (36) és (37) helyett most

$$(36') \quad w(r) = u(r) + \frac{p}{16D} \int_r^R t \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} R^2 - t^2 \right) \sqrt{1+u'^2(t)} dt$$

$$(37') \quad m = w(0) - u(0) = \frac{p}{16D} \int_0^R r \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} R^2 - r^2 \right) \sqrt{1+u'^2(r)} dr$$

kapunk, végül (36') megoldása most közelítőleg

$$(38') \quad u(r) = w(r) - \frac{p}{16D} \int_r^R t \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} R^2 - t^2 \right) \sqrt{1+u'^2(t)} dt.$$

A (33) alatti hiba így alakul $H = \frac{pr}{16D} (10r^2 - 3,3R^2) a$, melynek maximuma

$$(39') \quad H_{max} \leq \frac{6,7 p R^3}{16 D} \max a.$$

A relatív hiba megint csak akkor kicsi, ha $\max a$ kicsi.

2.3. Kereshetjük a C_3 függvényosztályon azt a kezdeti $u(r)$ alakot, melynél adott p mellett a közép kitérése $m = w(0) - u(0)$ a lehető legnagyobb vagy legkisebb (U -t most u' -től függetlennek vesszük). — Keressük tehát pl. az A) esetben az

$$m = w(0) - u(0) = \frac{p}{16D} \int_0^R r(R^2 - r^2) \sqrt{1+u'^2(r)} dr = I[u]$$

extrémumát az $u(R) = 0$ feltétel mellett. Az

$$I[u] = \int_0^R G(r, u, u') dr$$

integrál első variációja

$$\delta S = \int_0^R \left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dr} \frac{\partial G}{\partial u'} \right) \delta u dr + \left[\frac{\partial G}{\partial u'} \delta u \right]_0^R.$$

Egy $u(r)$ extrémális tehát a

$$(40) \quad \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dr} \frac{\partial G}{\partial u'} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial u'} \Big|_{r=0} = 0$$

Euler-egyenletnek és peremfeltételnek tesz eleget. A jelen esetben $\frac{\partial G}{\partial u} \equiv 0$, tehát $\frac{d}{dr} \frac{\partial G}{\partial u'} = 0$, illetve $\frac{\partial G}{\partial u'} = c$, de a peremfeltétel miatt $c = 0$. A $\frac{\partial G}{\partial u'} = 0$ feltétel részletesen kiírva

$$(41) \quad \frac{p}{16D} r(R^2 - r^2) \frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}} = 0$$

ahonnan $u' \equiv 0$, $u \equiv 0$ (mert $u(R) = 0$). Ez nyilván a minimumot szolgáltatja, melynek értéke (37) szerint $\frac{pR^4}{64D}$. $I[u]$ -nak nincs maximuma, mert a (41)

alatti Euler-egyenletnek nincs más megoldása. Tehát m akármilyen nagy lehet, mint később példán is megmutatjuk. Persze ez mégsem igaz, mert egyenleteink csak h -hoz képest kis kitérésekre érvényesek.

Ha a pontosabb (35) alapján keressük az extrémális $u(r)$ függvényt, akkor az

$$I[u] = m = w(0) - u(0) = \int_0^R \left(u' - \frac{f}{\sqrt{1 - f^2}} \right) dr, \quad f = \frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}} - \underbrace{\frac{p}{16D} r(R^2 - r^2)}_{U(r)}$$

integrálra kell végrehajtani a fenti számítást. Most

$$G(r, u, u') = u' - \frac{f}{\sqrt{1 - f^2}}$$

és egyenletünk megint $\frac{\partial G}{\partial u'} = 0$. De

$$\frac{\partial G}{\partial u'} = 1 - \frac{\partial}{\partial u'} \left(\frac{f}{\sqrt{1 - f^2}} \right) = 1 - \frac{d}{df} \left(\frac{f}{\sqrt{1 - f^2}} \right) \frac{\partial f}{\partial u'} = 1 - \frac{1}{(1 - f^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{(1 + u'^2)^{3/2}}$$

Tehát a $\frac{\partial G}{\partial u'} = 0$ egyenlet így alakul

$$(42) \quad (1 - f^2)(1 + u'^2) \quad \text{ill.} \quad \pm \frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}} = f = \frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}} - \frac{p}{16D} r(R^2 - r^2)$$

Itt csak akkor nem jutunk ellentmondásra, ha a $-$ jelet vesszük. Ekkor

$$\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}} = \frac{p}{32D} r(R^2 - r^2) = -\frac{U}{2}$$

ahonnan

$$u' = \frac{p}{32D} \sqrt{\frac{r(R^2 - r^2)}{1 - \left(\frac{p}{32D}\right)^2 r^2(R^2 - r^2)^2}}$$

Mint könnyen megállapítható, a $\frac{p}{32D} r(R^2 - r^2)$ függvény maximuma a $0 \leq r \leq R$ közön $\frac{R^3 p}{48\sqrt{3}D}$. Az u' valós voltához tehát az szükséges, hogy $\frac{R^3 p}{48\sqrt{3}D} < 1$ legyen. Ekkor

$$u(r) = -\frac{p}{32D} \int_r^R \frac{t(R^2 - t^2) dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{p}{32D}\right)^2 t^2(R^2 - t^2)^2}}$$

és

$$u(0) = -\frac{p}{32D} \int_0^R \frac{t(R^2 - t^2) dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{p}{32D}\right)^2 t^2(R^2 - t^2)^2}}.$$

Most (42) alapján

$$w(0) = -\int_0^R \frac{f(r)}{\sqrt{1 - f^2(r)}} dr = -\int_0^R \left(-\frac{u'}{\sqrt{1 + u'^2}}\right) \sqrt{1 + u'^2} dr = \int_0^R u'(r) dr = -u(0)$$

és így

$$(43) \quad m = w(0) - u(0) = -2u(0) = \frac{p}{16D} \int_0^R \frac{t(R^2 - t^2) dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{p}{32D}\right)^2 t^2(R^2 - t^2)^2}}$$

adódik a lehetséges minimális középlehajlásra (p terhelés mellett), ami nagyobb mint a (37) alapján kapott minimális $\frac{pR^4}{64D}$ érték. Ha $\frac{R^3 p}{48\sqrt{3}D} \ll 1$, akkor a két érték jól egyezik, mint az a fenti integrál sorfejtéséből könnyen megállapítható.

Az általános esetben $u(r) = \int_r^R \frac{U(t)}{\sqrt{4 - U'^2(t)}} dt$.

2.4. Ha maximum nincs is, de minden adott $u(r)$ kezdeti alak esetére a lehajlásnak meg lehet adni egy könnyen kiszámítható felső korlátját. — Alkalmazzuk a Schwartz-féle egyenlőtlenséget pl. (37)-re. Ekkor

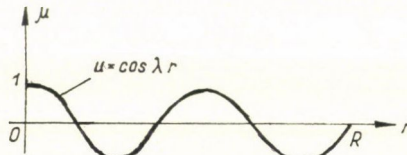
$$(44) \quad m^2 \leq \left(\frac{p}{16D}\right)^2 \int_0^R r^2(R^2 - r^2)^2 dr \cdot \int_0^R [1 + u'^2(r)] dr = \\ = \left(\frac{p}{16D}\right)^2 \frac{8}{105} R^7 \int_0^R (1 + u'^2) dr$$

ami az alábbi példában könnyen kiszámítható, míg (37)-ből m értéke — a gyakorlatilag fontos esetekben — zárt alakban nem fejezhető ki. Ha (37)-et először parciális integrálásnak vetjük alá és az integrálrészt ismét a Schwartz-féle egyenlőtlenséget alkalmazzuk, akkor m -re hasonlóan egy alsó korlátot nyerhetünk.

Tekintsük a következő példát. Legyen $u = \cos \lambda r$, ahol λ -t úgy határozzuk meg, hogy $u(R) = 0$, $u'(0) = 0$ legyen, vagyis, hogy a $(0, R)$ közre $2n + 1$ számú ($n = 1, 2, 3, \dots$) negyedhullám essék (a lemez a szélén ferden van befogva). Ebből $\lambda R = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$, $\lambda = (2n + 1) \frac{\pi}{2R}$. Most a (44) szerint

$$m^2 \leq \left(\frac{p}{16D}\right)^2 \frac{8}{105} R^7 \int_0^R (1 + \lambda^2 \sin^2 \lambda r) dr = \left(\frac{p}{16D}\right)^2 \frac{R^6}{105} [8R^2 + (2n + 1)^2 \pi^2]$$

$$m \leq \frac{p}{16D} \frac{R^3}{10} \sqrt{8R^2 + (2n + 1)^2 \pi^2}.$$



12. ábra

Ez az m egy felső korlátja. — Megmutatjuk, hogy m növekszik a λ -val, vagyis az n -nel. Az m értéke λ függvénye

$$(45) \quad m = \frac{p}{16D} \int_0^R r(R^2 - r^2) \sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 \lambda r} dr = F(\lambda).$$

Ez a $\lambda r = z$ helyettesítéssel így alakul

$$(45') \quad m = \frac{p}{16D\lambda^4} \int_0^{\lambda R} z(R^2\lambda^2 - z^2) \sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 z} dz = F(\lambda).$$

A második tényező (az integrál) nyilvánvalóan növekszik a λ -val, de az első csökken. Ezért inkább a (45)-nél maradunk. A $\sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 \lambda r}$ tényezőt sorbafejtjük. Ha pl. $R \geq 25$, $\lambda \leq (2n + 1) \frac{\pi}{50}$ és $\lambda < 1$, ha $2n + 1 \leq 15$ (ami kb.

4 hullámnak felel meg). Azonban $\frac{\lambda^2}{2 + \lambda^2} < 1$ bármekkora is a λ , tehát a mondott

tényezőit ne ebben a formában fejtsük sorba, hanem inkább a következőképpen

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 \lambda r} &= \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{2} (1 - \cos 2\lambda r)} = \sqrt{\frac{2 + \lambda^2}{2}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{2 + \lambda^2} \cos 2\lambda r} = \\ &= \sqrt{\frac{2 + \lambda^2}{2}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{2 + \lambda^2} \cos 2\lambda r - \frac{1}{8} \left(\frac{\lambda^2}{2 + \lambda^2} \right)^2 \cos^2 2\lambda r - \dots \right]. \end{aligned}$$

Az első két tag figyelembevételével

$$m \approx \frac{p}{16 D \sqrt{2}} \left[-\frac{R^2}{\sqrt{2 + \lambda^2}} - \frac{3}{8} \frac{1}{\lambda^2 \sqrt{2 + \lambda^2}} + \frac{R^4}{4} \sqrt{2 + \lambda^2} \right]$$

ami λ -val tényleg növekvő. A többi tag elhanyagolható, ha λ nem túl nagy (pl. $\lambda = 2$ esetén $\frac{\lambda^2}{2 + \lambda^2} = \frac{2}{3}$ és 8 teljes hullám van a lemezen). Az $r(R^2 - r^2)$

függvény maximuma $r = R \sqrt{\frac{3}{3}} = 0,577R$ -nél van. Ezért [l. (37)] m akkor lesz

nagy, ha a hullámok meredeksége $|u'|$ ezen a környéken nagy.

2.5. Irjuk a (31') egyenletet az

$$(46) \quad r(rU')' + \nu rU' - \left(\nu rU' + U + \frac{p}{2D} r^3 \right) \sqrt{1 + u'^2} = 0$$

alakba, mely persze az $r = e^e$ helyettesítéssel a

$$(46') \quad \frac{d^2U}{d\varrho^2} + \nu \frac{dU}{d\varrho} - \left(\nu \frac{dU}{d\varrho} + U + \frac{p}{2D} e^{3e} \right) \sqrt{1 + u'^2} = 0$$

alakot ölti. Legyen most hasonlóan az előző ponthoz $u = a \cos \lambda r$, $\lambda = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$, akkor

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + u'^2} &= \sqrt{1 + a^2 \lambda^2 \sin^2 \lambda r} \sqrt{\frac{2 + a^2 \lambda^2 - a^2 \lambda^2 \cos 2\lambda r}{2}} = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{a \lambda}{\sqrt{2}} \right)^2} \sqrt{1 - \frac{a^2 \lambda^2}{2 + a^2 \lambda^2} \cos 2\lambda r}. \end{aligned}$$

Ezt sorbafejtve

$$\sqrt{1 + u'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{a \lambda}{\sqrt{2}} \right)^2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{a^2 \lambda^2}{2 + a^2 \lambda^2} \cos 2\lambda r - \frac{1}{8} \left(\frac{a^2 \lambda^2}{2 + a^2 \lambda^2} \right)^2 \cos^2 2\lambda r - \dots \right]$$

Most $\max |u'| = a\lambda$. Legyen $a\lambda \leq 1$ (Ha pl. $a = 3$, akkor $\lambda \leq \frac{1}{3}$, ami $R = 50$ esetén $2n + 1 \leq 11$ -et jelent, ha $R = 100$, $2n + 1 \leq 22$ -t.) Ekkor

$$\sqrt{1 + \left(\frac{a \lambda}{\sqrt{2}} \right)^2} \leq \sqrt{1,5} \approx 1,2 \quad \text{és} \quad \frac{a^2 \lambda^2}{2 + a^2 \lambda^2} \leq \frac{1}{3}.$$

A fenti zárjelben álló tagok nagyságrendje tehát rendre

$$1, \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}, \frac{1}{72} \cdot \frac{1}{4}, \dots$$

Vegyük tehát csak a sorfejtés első tagját, azaz a

$$\sqrt{1+u'^2} \approx \sqrt{1 + \left(\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\right)^2} = b$$

közelítést. Ezzel a (46') így alakul

$$(46'') \quad \frac{d^2U}{dQ^2} + \nu(1-b) \frac{dU}{dQ} - bU - \frac{pb}{2D} e^{3Q} = 0.$$

Ennek az állandó együtthatós lineáris egyenletnek a karakterisztikus egyenlete

$$(47) \quad \kappa^2 + \nu(1-b)\kappa - b = 0$$

melynek gyökei (lévén $\nu = \frac{1}{3}$) $\kappa = \frac{b-1}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{b-1}{6}\right)^2 + b}$. De — mint láttuk $-1 \leq b \leq 1,2$, ezért $\frac{b-1}{6} \leq 0,03$, $\left(\frac{b-1}{6}\right)^2 \leq 0,0009$, tehát $\kappa \approx \pm \sqrt{b}$, amivel a homogén egyenlet egy megoldása $c_1 e^{\sqrt{b}Q} + c_2 e^{-\sqrt{b}Q}$. Az inhomogén egyenlet egy pertikuláris megoldása ce^{3Q} alakban keresendő. Így $c = \frac{bp}{4(5-b)D}$ -t kapunk. Vagyis megoldásunk

$$U = U(r) = c_1 r^{\sqrt{b}} + c_2 r^{-\sqrt{b}} + \frac{bp}{4(5-b)D} r^3.$$

Vegyük pl. a 2.3. pontban tárgyalt A) esetet. Ekkor $c_2 = 0$ és az $U(R) = 0$ feltételből $c_1 = -\frac{bp}{4(5-b)D} R^{3-\sqrt{b}}$ és így

$$U(r) = \frac{bp}{4(5-b)D} (r^3 - R^{3-\sqrt{b}} r^{\sqrt{b}})$$

amelynek maximuma $r = \left(\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^{\frac{1}{3-\sqrt{b}}}$ R -nél van. A b -nek a maximális $\sqrt{1+u'^2} = \sqrt{2}$ -től való eltérése $\geq 1,41 - 1,2 = 0,21$. A (46) ill. (46')-ben a zárjelben álló tagok összegét ezzel szorozva kapjuk a 2.3.-nak megfelelő H „hiba”-értékét. Ezt viszonyítva egy alkalmas értékhez, fogalmat kapunk a tényleges (relatív) hiba nagyságáról. De mi legyen ez?

2.6. Ehelyett a teljesen bizonytalan eljárás helyett több használható módszer mutatunk. Az első módszer lényege az, hogy megbecsüljük, hogy két

különböző $u(r)$ függvényhez — legyenek ezek u_1, u_2 — tartozó U_1 és U_2 függvények mennyire térhetnek el egymástól. A (46') ezekre így írható

$$\ddot{U}_i + \nu \dot{U}_i - \left(\nu \dot{U}_i + U_i + \frac{p}{2D} e^{3e} \right) b_i = 0, \quad \left(b_i = \sqrt{1 + u_i'^2}, \quad (i = 1, 2); \quad \dot{U}_i = \frac{dU_i}{d\rho} \right). \quad (48)$$

Ezekből a $V = V(\rho) = U_2 - U_1$ jelöléssel

$$\ddot{V} + \nu \dot{V} - b_2(\nu \dot{V} + V) + (b_1 - b_2) \left(\nu \dot{U}_1 + U_1 + \frac{p}{2D} e^{3e} \right) = 0.$$

Tekintsük az U_1 -et egy ismert közelítésnek (pl. a fenti $U(r)$ -nek, vagy a 2.3. alatti $U(r)$ függvénynek, akkor a $W = \nu \dot{U}_1 + U_1 + \frac{p}{2D} e^{3e}$ egy ismert függvény és előbbi egyenletünk így alakul

$$(48') \quad \ddot{V} + \nu(1 - b_2) \dot{V} - b_2 V + (b_1 - b_2) W = 0.$$

Ezzel ekvivalens a következő elsőrendű rendszer

$$\dot{V} = Z$$

$$\dot{Z} = \nu(b_2 - 1)Z + b_2 V + (b_2 - b_1)W.$$

Innen, lévén $|D_+ f| = |D_+ |f||$, (ahol D_+ a jobboldali deriválást jelenti)

$$|D_+ |V|| = |\dot{V}_+| = |Z|$$

$$|D_+ |Z|| = |\dot{Z}_+| \leq \nu(b_2 - 1)|Z| + b_2 |V| + |b_2 - b_1| |W|$$

melyből

$$\begin{aligned} |D_+(|V| + |Z|)| &= |D_+ |V| + D_+ |Z|| \leq |D_+ |V|| + |D_+ |Z|| \leq \\ &\leq (\nu(b_2 - 1) + 1)|Z| + b_2 |V| + |b_2 - b_1| |W|. \end{aligned}$$

De $\nu(b_2 - 1) + 1 = \frac{b_2 - 1}{3} + 1 = \frac{b_2 + 2}{3} \leq b_2$, mert $b_2 \geq 1$, tehát

$$|D_+(|V| + |Z|)| \leq b_2(|V| + |Z|) + |b_2 - b_1| |W|$$

ami az $Y = |V| + |Z|$, $|b_2 - b_1| = \delta$ jelöléssel a

$$(49) \quad |D_+ Y| \leq b_2 Y + \delta |W|$$

alakot ölti. Innen Y -ra különböző pontosságú becslések nyerhetők. Ha $b_2 \leq \sqrt{2}$ és $\max \delta = \delta_m$, $\max |W| = W_m$ ($-\infty \leq \rho \leq \log R$ ill. $0 \leq r \leq R$) akkor

$$(50) \quad |D_+ Y| \leq \sqrt{2} Y + \delta_m W_m$$

melyből (l. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen, 93. 0.)

$$(51) \quad |V| \leq Y \leq Y(\varrho_0) e^{\sqrt{2}(\varrho - \varrho_0)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_m W_m (e^{\sqrt{2}(\varrho - \varrho_0)} - 1) = Y(r_0) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\sqrt{2}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_m W_m \left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\sqrt{2}} - 1 \right)$$

ahol r_0 és r tetszőlegesen és pl. a 2.3. A) szerint $W_m = \frac{8,67 p R^3}{16 D}$. De $Y(r) =$

$$= |V| + |Z| = |V| + |\dot{V}_+| = |V| + r |V'_+|, \text{ vagyis } Y(r_0) = |V(r_0)| + \\ + r_0 |V'_+(r_0)| \text{ és így } Y(0) = 0, \text{ lévén } V(0) = 0. \text{ Azonban } \lim_{r_0 \rightarrow +0} Y(r_0) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\sqrt{2}}$$

értékét mégsem tudjuk. Mégha feltesszük is, hogy ez 0, akkor is az (51) második tagja $r_0 \rightarrow +0$ esetén nem marad véges, bár minden más helyen tetszőlegesen kicsivé tehető, ha δ_m -et elég kicsinek választjuk. — A (49) egyenlőtlenséget tehát finomabb kezelésnek kell alávetni. A

$$(53) \quad |D_+ Y| \leq a(\varrho) Y + b(\varrho) \quad Y(\varrho) \geq 0$$

egyenlőtlenség a

$$(53') \quad -aY - b \leq D_+ Y \leq aY + b$$

alakba írható. A jobboldali rész viszont az $\dot{Y}_+ - aY \leq b$, illetve

$$D_+(Y e^{-\int_{\varrho_0}^{\varrho} a d\varrho}) \leq b e^{-\int_{\varrho_0}^{\varrho} a d\varrho}$$

alakba, melyből integrálással

$$Y(\varrho) \leq Y(\varrho_0) e^{\int_{\varrho_0}^{\varrho} a d\varrho} + e^{\int_{\varrho_0}^{\varrho} a d\varrho} \int_{\varrho_0}^{\varrho} b e^{-\int_{\varrho_0}^{\varrho} a d\varrho} d\varrho$$

illetve

$$(54) \quad Y(r) \leq Y(r_0) e^{\int_{r_0}^r \frac{a}{r} dr} + e^{\int_{r_0}^r \frac{a}{r} dr} \int_{r_0}^r \frac{b}{r} e^{-\int_{r_0}^r \frac{a}{r} dr} dr.$$

Esetünkben ez a

$$(55) \quad |V(r)| \leq Y(r) \leq Y(r_0) e^{\int_{r_0}^r \frac{b_2}{r} dr} + e^{\int_{r_0}^r \frac{b_2}{r} dr} \int_{r_0}^r \frac{|b_2 - b_1| |W|}{r} e^{-\int_{r_0}^r \frac{b_2}{r} dr} dr$$

becslére vezet. De $b_2(r_0) \rightarrow 1$, ha $r_0 \rightarrow +0$, tehát $Y(r_0) e^{\int_{r_0}^r \frac{b_2}{r} dr} = O\left(\frac{Y(r_0)}{r_0}\right)$.

Tegyük fel, hogy $\lim_{r_0 \rightarrow +0} Y(r_0) e^{\int_{r_0}^r \frac{b_2}{r} dr} = 0$ és $\int_0^r \frac{|b_2 - b_1|}{r} dr < \infty$ (konvergens) (az utóbbi feltevés egészen természetes; 1. a következő pontot is) akkor (55)-ből

$$(56) \quad V(r) \leq W_{\max} \int_0^r \frac{|b_2 - b_1|}{r} dr$$

ami könnyen kiszámítható. — Térjünk a $|w_2 - w_1|$ becslésére. Az $U_i = \frac{w'_i - u'_i}{\sqrt{1 + u_i'^2}}$ összefüggésből $\sqrt{1 + u_i'^2} = b_i$ jelöléssel $w_i = u_i - \int_r^R U_i b_i dr$ és $w_2 - w_1 = u_2 - u_1 - \int_r^R (U_2 b_2 - U_1 b_1) dr$. De $U_2 b_2 - U_1 b_1 = (U_2 - U_1) b_2 + U_1(b_2 - b_1)$, tehát (lévén $b_2 \leq \sqrt{2}$)

$$\begin{aligned} |w_2 - w_1| &\leq |u_2 - u_1| + \int_r^R (b_2 |V| + |U_1| \delta) dr = \\ &= |u_2 - u_1| + \sqrt{2} \int_r^R |V| dr + \delta_m \int_r^R |U_1| dr \end{aligned}$$

ami könnyen kiszámítható. Ezt azonban mellőzzük, mert a következő pontban más módszerrel kérdéseinkre sokkal kielégítőbb választ fogunk kapni.

Megjegyzés. Az (53') baloldali része nem hoz hasznot számunkra, mert $Y(R) = R |V'_+(R)|$ nem ismeretes.

2.7. A másik — önmagában sem érdektelen — módszer abban áll, hogy az

$$(57) \quad r(rU')' - U - \frac{p}{2D} r^3 - \left(\nu rU' + U + \frac{p}{2D} r^3 \right) a(r) = 0, \quad U(0) = U(R) = 0$$

illetve

$$(58) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 U}{d\varrho^2} - U - \frac{p}{2D} e^{3\varrho} - \left(\nu \frac{dU}{d\varrho} + U + \frac{p}{2D} e^{3\varrho} \right) a(\varrho) = 0, \quad U(-\infty) = U(\log R) = 0 \\ (a(r) = a(\varrho) = \sqrt{1 + u'^2} - 1, \quad r = e^\varrho) \end{aligned}$$

egyenlet megoldására szukcesszív approximációt alkalmazunk, ami kissé szokatlan, mert a jelen esetben nem kezdeti-, hanem peremértékproblémáról

van szó. Nulladik közelítésnek a 2.2. A)-beli $U_0(r) = U_0(\varrho) = \frac{p}{16D} (-R^2 e^\varrho +$

+ $e^{3\varrho}$ függvényt vesszük, mely történetesen kielégíti a peremfeltételeket és $a(r) \equiv 0$ -nak felel meg. $U_1(\varrho)$ -nak a

$$(59) \quad \frac{d^2 U_1}{d\varrho^2} - U_1 - \frac{p}{2D} e^{3\varrho} = \left(\nu \frac{dU_0}{d\varrho} + U_0 + \frac{p}{2D} e^{3\varrho} \right) a(\varrho) = h_0(\varrho)$$

egyenletnek az adott peremfeltételeket kielégítő megoldását vesszük. Általában a szukcesszív approximációt a

$$(60) \quad \frac{d^2 U_n}{d\varrho^2} - U_n - \frac{p}{2D} e^{3\varrho} = \left(\nu \frac{dU_{n-1}}{d\varrho} + U_{n-1} + \frac{p}{2D} e^{3\varrho} \right) a(\varrho) = h_{n-1}(\varrho)$$

egyenlettel definiáljuk, ahol $U_n(\varrho)$ -nak ki kell elégítenie a peremfeltételeket. Vajon léteznek-e ilyen $\{U_n(\varrho)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) függvények egyáltalán (ti. ez nem magától értetődő) és konvergál-e ez a sorozat és a határfüggvény megoldása lesz-e az (58)-nak? A válasz igenlő lesz, továbbá megmutatjuk, hogy a feladatnak csak egy megoldása van és az $U_n(\varrho)$ hibájára is becslést adunk.

Az állandó variálásából származó képlet szerint a (60) egyenletnek az $U_n(-\infty) = 0$ feltételt kielégítő összes megoldása a következő alakba írható

$$(61) \quad U_n(\varrho) = U_0(\varrho) + c_n e^\varrho + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} (e^{\varrho-t} - e^{-(\varrho-t)}) h_{n-1}(t) dt$$

(ti. a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^\varrho + Be^{-\varrho}$). Határozzuk meg c_n -t úgy, hogy $U_n(\varrho)$ még az $U_n(\log R) = 0$ feltételt is kielégítse. A

$$0 = U_n(\log R) = U_0(\log R) + c_n R + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\log R} \left(R e^{-t} - \frac{1}{R} e^t \right) h_{n-1}(t) dt$$

egyenletből

$$c_n = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\log R} \left(e^{-t} - \frac{1}{R^2} e^t \right) h_{n-1}(t) dt$$

Ezt (61)-be téve

$$(62) \quad \begin{aligned} U_n(\varrho) &= U_0(\varrho) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\log R} \left(e^{\varrho-t} - \frac{1}{R^2} e^{\varrho+t} \right) h_{n-1}(t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} (e^{\varrho-t} - e^{-(\varrho-t)}) h_{n-1}(t) dt = \\ &= U_0(\varrho) - \frac{1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} e^{\varrho-t} h_{n-1}(t) dt + \frac{1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho+t} h_{n-1}(t) dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho-t)} h_{n-1}(t) dt, \end{aligned}$$

($n = 1, 2, \dots$)

ahol

$$(63) \quad h_n(\varrho) = \left(\nu \frac{dU_n}{d\varrho} + U_n(\varrho) + \frac{p}{2D} e^{3\varrho} \right) a(\varrho) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Tehát (60) helyett (62)–(63) alapján végezzük a szukcesszív approximációt. Konvergenciájának biztosítására tegyük fel, hogy az $\int_0^R \frac{a(r)}{r} dr = \int_{-\infty}^{\varrho} a(\varrho) d\varrho$ integrál konvergens, mégpedig

$$(64) \quad \int_0^R \frac{a(r)}{r} dr = \int_{-\infty}^{\log R} a(\varrho) d\varrho < \frac{1}{\nu + 1} \left(\approx \frac{3}{4} \right)$$

ami nagyon ésszerű és cseppet sem túlerős feltevés. Lényegileg csak azt kívánja, hogy a lemez kezdeti alakja közepén elég lapos legyen ($a(r) = O(r^\alpha)$ $\alpha > 0$, $r \rightarrow 0$). A (62)–(63) alapján az $U_n(\varrho) - U_{n-1}(\varrho) = V_n(\varrho)$ különbségre, a következő formulát kapjuk

$$(65) \quad V_n(\varrho) = -\frac{1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} e^{e-t} W_{n-1}(t) a(t) dt + \frac{1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} e^{e+t} W_{n-1}(t) a(t) dt - \\ - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} e^{-(e-t)} W_{n-1}(t) a(t) dt \\ \left(W_n(t) = V_n(t) + \nu \frac{dV_n}{dt} \right) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Szükségünk van a $\frac{dV_n}{d\varrho}$ -ra is. Ez (65) alapján

$$(66) \quad \frac{dV_n}{d\varrho} = -\frac{1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} e^{e-t} W_{n-1}(t) a(t) dt + \frac{1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} e^{e+t} W_{n-1}(t) a(t) dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} e^{-(e-t)} W_{n-1}(t) a(t) dt.$$

Legyen $|V_n(\varrho)| + \nu \left| \frac{dV_n}{d\varrho} \right| = Z_n(\varrho)$ ($n = 1, 2, \dots$). Ekkor (65)–(66) alapján

$$(67) \quad Z_n(\varrho) \leq \frac{\nu + 1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} e^{e-t} Z_{n-1}(t) a(t) dt + \frac{\nu + 1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} e^{e+t} Z_{n-1}(t) a(t) dt + \\ + \frac{\nu + 1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} e^{-(e-t)} Z_{n-1}(t) a(t) dt \quad (n = 2, 3, \dots)$$

Tegyük fel, hogy $Z_{n-1}(\varrho) \leq a_n$ ($-\infty \leq \varrho \leq \log R$), akkor (67)-ből következik, hogy (lévén $\max_{\varrho \leq t \leq \log R} e^{\varrho-t} = 1$, $\max_{-\infty \leq t \leq \log R} e^{\varrho+t} \leq R^2$, és $\max_{-\infty \leq t \leq \varrho} e^{-(\varrho-t)} = 1$)

$$Z_n(\varrho) \leq (v+1) a_n \int_{-\infty}^{\log R} a(t) dt = a_n q, \quad (q = (v+1) \int_{-\infty}^{\log R} a(\varrho) d\varrho < 1)$$

De $Z_1 \leq a$ ($-\infty \leq \varrho \leq \log R$) (az a -t később meg fogjuk adni), tehát

$$Z_2 \leq aq, \quad Z_3 \leq aq^2, \dots, \quad Z_n \leq aq^{n-1}, \dots$$

vagyis a $Z_1(\varrho) + Z_2(\varrho) + \dots + Z_n(\varrho) + \dots$ sor egyenletesen konvergens tehát a

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots$$

$$\frac{dV_1}{d\varrho} + \frac{dV_2}{d\varrho} + \dots + \frac{dV_n}{d\varrho} + \dots$$

sorok is abszolút és egyenletesen konvergálnak $-\infty \leq \varrho \leq \log R$ esetén de ezek részletösszegei $U_n(\varrho) - U_0(\varrho)$ ill. $\frac{d}{d\varrho}(U_n(\varrho) - U_0(\varrho))$ és így az $\{U_n(\varrho)\}$,

$\left\{ \frac{dU_n}{d\varrho} \right\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) sorozatok egyenletesen konvergálnak és az $U(\varrho) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(\varrho)$ határfüggvény eleget tesz az

$$(68) \quad U(\varrho) = U_0(\varrho) - \frac{1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} e^{\varrho-t} h(t) a(t) dt + \frac{1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho+t} h(t) a(t) dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho-t)} h(t) a(t) dt$$

$$\left(h(\varrho) = v \frac{dU}{d\varrho} + U(\varrho) + \frac{p}{2D} e^{2\varrho} \right)$$

integrálegyenletnek (hasonló igaz $\frac{dU}{d\varrho} = r \frac{dU}{dr}$ -re is) amiből könnyen következik, hogy az (58) differenciálegyenletnek is. (68)-nak nincs más megoldása, mert, ha $U(\varrho)$ megoldása (68)-nak, akkor (68) és (62) alapján a fentihez hasonlóan megmutathatjuk, hogy

$$(69) \quad |U(\varrho) - U_n(\varrho)| \leq Aq^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ahol A egy állandó és ebből $U(\varrho) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(\varrho)$. A (69) egyúttal az n -edik köze-

lítés hibájára ad becslést. A (69) bizonyítása így történik. (68) és (62) alapján

$$\begin{aligned}
 X_n(\varrho) &= U(\varrho) - U_n(\varrho) = -\frac{1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} e^{\varrho-t} Y_{n-1}(t) a(t) dt + \\
 &+ \frac{1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho+t} Y_{n-1}(t) a(t) dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho-t)} Y_{n-1}(t) a(t) dt \\
 \frac{dX_n}{d\varrho} &= -\frac{1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} e^{\varrho-t} Y_{n-1}(t) a(t) dt + \frac{1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho+t} Y_{n-1}(t) a(t) dt + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho-t)} Y_{n-1}(t) a(t) dt \\
 &\left(Y_n(\varrho) = X_n(\varrho) + \nu \frac{dX_n}{d\varrho} \right).
 \end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned}
 R_n(\varrho) &= |X_n(\varrho)| + \nu \left| \frac{dX_n}{d\varrho} \right| \leq \frac{\nu+1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} e^{\varrho-t} R_{n-1}(t) a(t) dt + \\
 &+ \frac{\nu+1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho+t} R_{n-1}(t) a(t) dt + \frac{\nu+1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho-t)} R_{n-1}(t) a(t) dt.
 \end{aligned}$$

Ebből az exponenciális szorzókra megállapított felső korlátok alapján [l. (67) képlet után], ha $R_{n-1}(\varrho) \leq A_n$, akkor

$$R_n(\varrho) \leq q A_n$$

és ha $R_0(\varrho) \leq A$, akkor $R_n(\varrho) \leq Aq^n$. De

$$R_0(\varrho) = |X_0(\varrho)| + \nu \left| \frac{dX_0}{d\varrho} \right| = |U(\varrho) - U_0(\varrho)| + \nu \left| \frac{d}{d\varrho} (U(\varrho) - U_0(\varrho)) \right| < A$$

bizonyos A számra, mert $U(\varrho)$ és $\frac{dU}{d\varrho}$ is korlátosak. Az utóbbi a fenti $U_n(\varrho)$ és $\frac{dU_n}{d\varrho}$ függvények egyenletes korlátosságából következik. A fentiek szerint

$$R_0(\varrho) \leq a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q} = A$$

és így

$$(70) \quad R_n(\varrho) \leq \frac{aq^n}{1-q}.$$

Mégcsak az a szám meghatározása van hátra. Ez $Z_1(\varrho) = |V_1(\varrho)| + \nu \left| \frac{dV_1}{d\varrho} \right| =$
 $= |U_1(\varrho) - U_0(\varrho)| + \nu \left| \frac{d}{d\varrho} (U_1(\varrho) - U_0(\varrho)) \right|$ [1. (68) képlet előtt] egy felső kor-
 látját jelenti. Azonban

$$U_1(\varrho) - U_0(\varrho) = -\frac{1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} e^{\varrho-t} h_0(t) a(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} e^{\varrho+t} h_0(t) a(t) dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} e^{-(\varrho-t)} h_0(t) a(t) dt.$$

Itt

$$h_0(\varrho) = \nu \frac{dU_0}{d\varrho} + U_0(\varrho) + \frac{p}{2D} e^{3\varrho} = \frac{p}{16D} [-R^2(1+\nu)e^{\varrho} + 3(3+\nu)e^{3\varrho}].$$

Ennek alapján

$$\frac{16D}{p} (U_1(\varrho) - U_0(\varrho)) = -\frac{1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} [-R^2(1+\nu)e^{\varrho} + 3(3+\nu)e^{\varrho+2t}] a(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} [-R^2(1+\nu)e^{\varrho+2t} + 3(3+\nu)e^{\varrho+4t}] a(t) dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} [-R^2(1+\nu)e^{-\varrho+2t} + 3(3+\nu)e^{-\varrho+4t}] a(t) dt$$

és

$$\frac{16D}{p} \frac{d}{d\varrho} (U_1(\varrho) - U_0(\varrho)) = -\frac{1}{2} \int_{\varrho}^{\log R} [-R^2(1+\nu)e^{\varrho} + 3(3+\nu)e^{\varrho+2t}] a(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{2R^2} \int_{-\infty}^{\log R} [-R^2(1+\nu)e^{\varrho+2t} + 3(3+\nu)e^{\varrho+4t}] a(t) dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\varrho} [R^2(1+\nu)e^{-\varrho+2t} - 3(3+\nu)e^{-\varrho+4t}] a(t) dt.$$

Tehát

$$\frac{16D}{p} Z_1(\varrho) \leq \frac{\nu+1}{2} R^3 q + 3(3+\nu) R^3 q + \frac{1}{2R^2} [R^5(1+\nu)q + 3(3+\nu)R^5 q] +$$

$$+ \left[\frac{\nu+1}{2} R^3 q + 3(3+\nu) R^3 q \right] = \frac{3}{2} R^3 q (7\nu + 19)$$

vagyis

$$Z_1(\varrho) \leq \frac{3p}{32D} (7\nu + 19) R^3 q = a$$

és így (70) alapján

$$|U(\varrho) - U_n(\varrho)| \leq R_n(\varrho) \leq \frac{3p}{32D} (7\nu + 19) R^3 \frac{q^{n-1}}{1-q} \quad \left(\begin{array}{l} -\infty \leq \varrho \leq \lg R \\ 0 \leq r \leq R \end{array} \right).$$

Ekkor (37) alapján $m = \frac{p}{16D} \int_0^R U(r) \sqrt{1+u'^2} dr$, $m_n = \frac{p}{16D} \int_0^R U_n(r) \sqrt{1+u'^2} dr$

és $\Delta_n = |m - m_n| \leq \frac{p}{16D} \int_0^R |U - U_n| \sqrt{1+u'^2} dr$ és a Schwartz-féle egyenlőtlenség szerint

$$\Delta_n^2 \leq \left(\frac{p}{16D} \right)^2 \int_0^R (U - U_n)^2 dr \int_0^R (1 + u'^2) dr.$$

Itt a 2.3.-beli $u = \cos \lambda r \left(\lambda = (2k + 1) \frac{\pi}{2R} \right)$ -et véve

$$\Delta_n \leq \frac{3(7\nu + 19)}{32^2 \sqrt{2}} \frac{R^3 p^2}{D^2} \frac{q^{n+1}}{1-q} \sqrt{8R^2 + (2k + 1)^2 \pi^2}$$

Ez az n -edik közelítés hibája ($2k + 1$ a lemezen levő negyedd hullámok száma).

3. Köralakú hullámos lemez nagy kihajlása

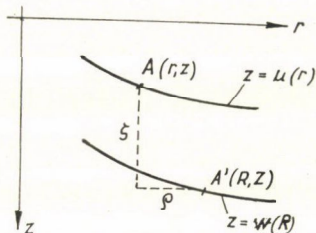
Köralakú lemeznél körszimmetrikus terhelés esetén a lemez egy pontja a függőleges $\zeta = \zeta(r, z) = \zeta(r, u(r)) = \zeta(r)$ elmozduláson kívül csak radiális $\varrho = \varrho(r, z) = \varrho(r, u(z)) = \varrho(r)$ elmozdulást végezhet. E kettőből tevődik össze a teljes elmozdulás, melynek eredményeképpen

$$A(r, z) \rightarrow A'(R, Z)$$

ahol

$$(71) \quad R = r + \varrho(r), \quad Z = u(r) + \zeta(r)$$

Ez a $w = w(R)$ görbe paraméteres egyenlete. Paraméter az r . A 2.1. pontbeli megállapítások a (23) egyenletig most is változatlanul érvényesek. Mint ott meg van jegyezve [a (21) képlet után] az r'_n és r'_i a megterhelt lemezre vonatkoznak és abban az A' pontban képzendők, melybe A jutott és persze az új görbe egyenlete alapján. Csak ez a $z = w(R)$ egyenlet explicite nem írható fel és a (23) képletben és minden további képletben w, w', w'', w''' argumentuma



13. ábra

nem r , hanem $R = r + \varrho(r)$ lenne ismeretlen $\varrho(r)$ függvénnyel. E mennyiségeket inkább (71) alapján írjuk fel. Mégpedig

$$\frac{1}{r'_n} = -\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = -\frac{\ddot{Z}\dot{R} - \dot{Z}\ddot{R}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{3/2}} = -\frac{(\ddot{u} + \ddot{\zeta})(1 + \dot{\varrho}) - \dot{\varrho}(\dot{u} + \dot{\zeta})}{[(1 + \dot{\varrho})^2 + (\dot{u} + \dot{\zeta})^2]^{3/2}}$$

$$\frac{1}{r'_t} = -\frac{w'}{R(1+w'^2)^{1/2}} = -\frac{Z}{R(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{1/2}} = -\frac{\dot{u} + \dot{\zeta}}{(r + \varrho)[(1 + \dot{\varrho})^2 + (\dot{u} + \dot{\zeta})^2]^{1/2}}.$$

A magasabbrendű kicsik elhanyagolásával

$$\frac{1}{r'_n} = -\frac{\ddot{u} + \ddot{\zeta} + \ddot{u}\dot{\varrho} - \dot{u}\ddot{\varrho}}{(1 + 2\dot{\varrho} + \dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{\zeta})^{3/2}}$$

$$\frac{1}{r'_t} = -\frac{\dot{u} + \dot{\zeta}}{(r + \varrho)(1 + 2\dot{\varrho} + \dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{\zeta})^{1/2}}.$$

Ezeket kell (24)-be tennünk, hogy M_r és M_t helyes értékét megkapjuk

$$(24') \quad M_r = D \left[\left(-\frac{\ddot{u} + \ddot{\zeta} + \ddot{u}\dot{\varrho} - \dot{u}\ddot{\varrho}}{(1 + 2\dot{\varrho} + \dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{\zeta})^{3/2}} + \frac{\ddot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{3/2}} \right) + \right. \\ \left. + \nu \left(-\frac{\dot{u} + \dot{\zeta}}{(r + \varrho)(1 + 2\dot{\varrho} + \dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{\zeta})^{1/2}} + \frac{\dot{u}}{r(1 + \dot{u}^2)^{1/2}} \right) \right]$$

$$M_t = D \left[\nu \left(-\frac{\ddot{u} + \ddot{\zeta} + \ddot{u}\dot{\varrho} - \dot{u}\ddot{\varrho}}{(1 + 2\dot{\varrho} + \dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{\zeta})^{3/2}} + \frac{\ddot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{3/2}} \right) + \right. \\ \left. + \left(-\frac{\dot{u} + \dot{\zeta}}{(r + \varrho)(1 + 2\dot{\varrho} + \dot{u}^2 + 2\dot{u}\dot{\zeta})^{1/2}} + \frac{\dot{u}}{r(1 + \dot{u}^2)^{1/2}} \right) \right].$$

A (29') egyenlet helyett pedig

$$(29'') \quad \frac{d(RM_r)}{d\sigma} - M_t + QR = 0, \quad d\sigma = dr(\dot{R}^2 + \dot{Z}^2)^{1/2} = dr[(1 + \dot{\varrho})^2 + (\dot{u} + \dot{\zeta})^2]^{1/2}$$

veendő.

Részletesen

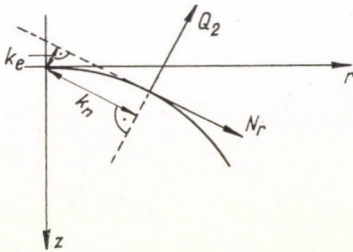
$$(72) \quad (r + \varrho) \frac{dM_r}{dr} + M_r(1 + \dot{\varrho}) - [M_t - Q(r + \varrho)][(1 + \dot{\varrho})^2 + (\dot{u} + \dot{\zeta})^2]^{1/2} = 0.$$

A Q nyíróerő két részből tevődik össze. Az egyik a terhelésből adódik, értéke $Q_1 = \frac{pR}{2} = \frac{p}{2}(r + \varrho)$, a másik a radiális N_r erő (l. alább) következménye. Ennek Q_2 értékét a lemez belső köralakú része egyensúlyának meggondolásából nyerjük. Az egyensúly feltétele

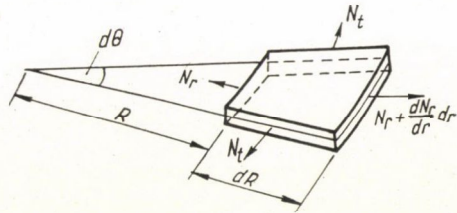
$$Q_2 k_n = N_r k_e$$

De k_n és k_e a Q_2 és az N_r egyenesének a távolsága az origótól. Ezek $k_n = -\frac{R\dot{R} + Z\dot{Z}}{\sqrt{\dot{R}^2 + \dot{Z}^2}}$, $k_e = -\frac{R\dot{Z} - \dot{R}Z}{\sqrt{\dot{R}^2 + \dot{Z}^2}}$ és így $Q_2 = N_r \frac{R\dot{Z} - \dot{R}Z}{R\dot{R} + Z\dot{Z}}$, illetve ϱ és ζ -val kifejezve (a magasabbrendűeket elhagyva)

$$Q_2 = N_r \frac{r\dot{u} + \dot{u}\varrho + r\dot{\zeta} - u - u\dot{\varrho} - \zeta}{r + \varrho + r\dot{\varrho} + u\dot{u} + \dot{u}\zeta + u\dot{\zeta}}$$



14. ábra



15. ábra

A (72)-be $Q = Q_1 + Q_2$ teendő. Ezenkívül (24')-ből beírva M_r és M_t értékét egy egyenletet kapunk a két ismeretlen függvényre ϱ és ζ -ra.

Még egy egyenletet ad a lemez elemére ható erők radiális komponensei összegének az eltűnése. Legyenek a radiális és tangenciális erők \bar{N}_r és N_t (1 cm-re vonatkoztatva). Ezek a (22) szerint

$$N_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r dz = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\left(\frac{1}{r'_n} - \frac{1}{r_n} \right) r_n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z dz}{r_n + z} + \nu \left(\frac{1}{r'_t} - \frac{1}{r_t} \right) r_t \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z dz}{r_t + z} \right]$$

$$N_t = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_t dz = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[\nu \left(\frac{1}{r'_n} - \frac{1}{r_n} \right) r_n \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z dz}{r_n + z} + \left(\frac{1}{r'_t} - \frac{1}{r_t} \right) r_t \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z dz}{r_t + z} \right].$$

De

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z dz}{r + z} \approx -\frac{h^3}{12r^2}, \quad \text{ha} \quad \frac{h}{2r} \ll 1.$$

Igy

$$(73) \quad \begin{cases} N_r = -D \left[\left(\frac{1}{r'_n} - \frac{1}{r_n} \right) \frac{1}{r_n} + \nu \left(\frac{1}{r'_t} - \frac{1}{r_t} \right) \frac{1}{r_t} \right] \\ N_t = -D \left[\left(\nu \left(\frac{1}{r'_n} - \frac{1}{r_n} \right) \frac{1}{r_n} + \left(\frac{1}{r'_t} - \frac{1}{r_t} \right) \frac{1}{r_t} \right) \right] \end{cases} \quad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \right)$$

A ϱ és ζ bevezetésével ezek is egy (24')-höz hasonló alakot öltenek, melynek felírását mellőzzük.

A 2.2-belihez hasonló módon jutunk a mondott második egyenletre, mely így hangzik

$$N_r - N_t + R \frac{dN_r}{d\sigma} = 0$$

ill.

$$(74) \quad (r + \varrho) \frac{dN_r}{dr} + (N_r - N_t) [(1 + \varrho)^2 + (\dot{u} + \dot{\zeta})^2]^{\frac{1}{2}} = 0. \quad ^9$$

Ez ϱ - és ζ -ra a második egyenlet. (72) és (74)-ből álló rendszert kell megoldanunk a következő feltételek mellett (befogott lemez esete, vízszintes befogás, a lemez sugara a):

$$\varrho(0) = \varrho(a) = \dot{\varrho}(0) = 0$$

$$\zeta(a) = 0, \quad \left. \frac{dw}{dR} \right|_{(R=0)} = \frac{\dot{u}(0) + \dot{\zeta}(0)}{1 + \dot{\varrho}(0)} = 0, \quad \left. \frac{dw}{dR} \right|_{(R=a)} = \frac{\dot{u}(a) + \dot{\zeta}(a)}{1 + \dot{\varrho}(a)} = 0,$$

Az utóbbi kettőből

$$\dot{\zeta}(0) = \dot{\zeta}(a) = 0.$$

Persze esetleg egy ekvivalens egyenletrendszert oldunk meg (72) és (74) rendszer helyett. Ilyet pl. a következőképpen kaphatunk. Az M_r , M_t , N_r , N_t képletei így írhatók

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{D} M_r &= A + \nu a \\ \frac{1}{D} M_t &= \nu A + a \\ \frac{1}{D} N_r &= -Ab + \nu ac \\ \frac{1}{D} N_t &= -\nu Ab + ac \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A &= \frac{1}{r'_n} - \frac{1}{r_n}, \quad a = \frac{1}{r'_t} - \frac{1}{r_t}, \quad b = \frac{1}{r_n}, \quad c = \frac{1}{r_t} \end{aligned}$$

melyből

$$A = \frac{1}{D} M_r - \nu a$$

⁹ Q_2 képlete és (74) némi korrekcióra szorul. Ez a II. részben fog megtörténni.

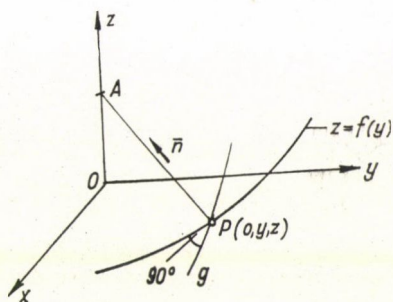
$$\frac{1}{D} M_t = \frac{\nu}{D} M_r + (1 - \nu^2) a$$

$$\frac{1}{D} N_r = -\frac{b}{D} M_r + \nu a(b + c)$$

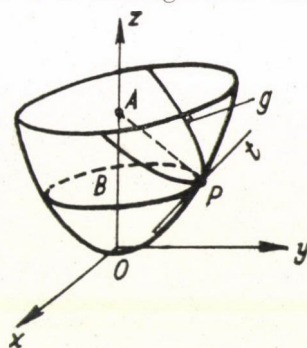
$$\frac{1}{D} N_t = -\frac{\nu b}{D} M_r + \nu^2 ab + ac.$$

Az M_t és N_t kiküszöbölhető ezek segítségével a (72) és (74)-ből és így M_r , N_r , ϱ , ζ (ϱ , ζ helyett R , Z is vehető) ismeretlen függvényekre két elsőrendű egyenletet kapunk. Ezekhez hozzávéve M_r és N_r definiáló egyenletét, melyek másodrendűek, 4 egyenletből álló egyenletrendszert nyerünk. A peremfeltételeket megfelelően át kell fogalmazni. A megoldást hatványsorok alakjában kereshetjük.¹⁰

4. *Függelék.* A 2.1-ben felhasználtuk azt a tényt, hogy a forgásfelület (forgástengely a z tengely) egy P pontján a meridiángörbére merőleges



16. ábra



17. ábra

síkú *normálmetszet* görbületi középpontja a forgástengelyen van, vagyis a görbületi sugara \overline{AP} (lásd 16. és 17. ábrát).

Ennek bizonyítására legyen a meridiángörbe egyenlete $z = f(y)$, tehát a forgásfelület egyenlete $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. A mondott másik normálmetszet legyen a g görbe. A P pontot az (yz) síkban vettük fel tekintettel arra, hogy ennek a helyzete közömbös. A felület \bar{n} normálvektora

$$\bar{n} = \left[-f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right]$$

és ez a P pontban

$$\bar{n} = [0, -f'(y), 1]$$

Igy az \overline{AP} -n átfektetett és az (yz) síkra merőleges sík egyenlete (ξ , η , ζ a futókoordináták)

$$\frac{\eta - y}{-f'(y)} = \frac{\zeta - f(y)}{1}$$

¹⁰ A megoldás részletei — más módon — a II. részben következnek.

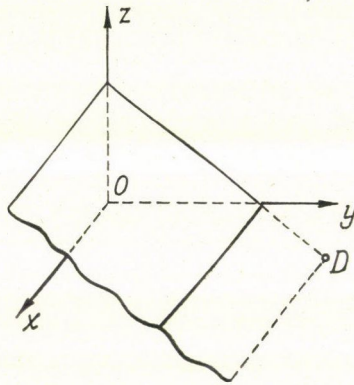
vagyis

$$(1) \quad \zeta = f(y) - \frac{\eta - y}{f'(y)}$$

és a forgástesté

$$(2) \quad \zeta = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

A g metszetgörbe egyenlete (1) és (2)-ből áll. Állítsuk elő azonban a térgörbe egyenletét paraméteres formában is. Legyen ζ a paraméter és jelöljük ezt



18. ábra

megkülönböztetésül t -vel. Ekkor η -t implicite a következő egyenlet határozza meg:

$$(3) \quad f(\sqrt{t^2 + \eta^2}) = f(y) - \frac{\eta - y}{f'(y)}$$

és

$$(4) \quad \zeta = f(\sqrt{t^2 + \eta^2}).$$

Legyen a térgörbe $\bar{r} = [\xi(t), \eta(t), \zeta(t)]$. Ekkor $\frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi} = 1$ és η -ra (3)-ból

$$(5) \quad f'(\sqrt{t^2 + \eta^2}) \frac{t + \eta\dot{\eta}}{\sqrt{t^2 + \eta^2}} = -\frac{\dot{\eta}}{f'(y)}.$$

De P -ben $\xi = t = 0$, $\eta = y$, tehát itt

$$(6) \quad f'(y)\dot{\eta} = -\frac{\dot{\eta}}{f'(y)}$$

mely csak úgy állhat fenn, ha $\dot{\eta} = 0$ (különben $f''(y) = -1$ lenne). Ekkor $\dot{\zeta}$ egyenlő (6) baloldalával, vagyis $\dot{\zeta} = 0$. Tehát

$$\dot{\bar{r}}(P) = [1, 0, 0]$$

ami szemléletesen is világos. — Továbbá $\ddot{\xi} = 0$ és (5)-ből

$$f''(\sqrt{t^2 + \eta^2}) \left(\frac{t + \eta\dot{\eta}}{\sqrt{t^2 + \eta^2}} \right)^2 + \\ + f'(\sqrt{t^2 + \eta^2}) \frac{(1 + \eta^2 + \eta\ddot{\eta})\sqrt{t^2 + \eta^2} - (t + \eta\dot{\eta})\frac{t + \eta\dot{\eta}}{\sqrt{t^2 + \eta^2}}}{t^2 + \eta^2} = - \frac{\ddot{\eta}}{f'(y)}$$

Itt $t = 0$, $\eta = y$, $\dot{\eta} = 0$ -t téve

$$f'(y) \frac{1 + y\ddot{\eta}}{y} = - \frac{\ddot{\eta}}{f'(y)}$$

ahonnan

$$\ddot{\eta} = - \frac{f'^2(y)}{y[1 + f'^2(y)]} \quad \text{és} \quad \ddot{\xi} = \frac{f'(y)}{y[1 + f'^2(y)]}$$

Tehát P -ben

$$\dot{\vec{r}} = [1, 0, 0]$$

$$\ddot{\vec{r}} = \left[0, - \frac{f'^2}{y(1 + f'^2)}, \frac{f'}{y(1 + f'^2)} \right]$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \left[0, \frac{f'}{y(1 + f'^2)}, - \frac{f'}{y(1 + f'^2)} \right]$$

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = \frac{f'}{y(1 + f'^2)} \sqrt{1 + f'^2} = \frac{f'}{y\sqrt{1 + f'^2}}, \quad |\dot{\vec{r}}| = 1$$

és így a görbületi sugár

$$R = \frac{|\dot{\vec{r}}|^3}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|} = \frac{y}{f'} \sqrt{1 + f'^2}$$

Ez éppen \overline{AP} -vel egyenlő, mert P koordinátái $0, y, f(y)$, az A koordinátái $0, 0, f(y) + \frac{y}{f'(y)} [1, (1)]$ és így távolságuk

$$\overline{AP} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{f'^2(y)}} = \frac{y}{f'} \sqrt{1 + f'^2}$$

Ugyanez a tény rendkívül egyszerűen belátható Meusnier-tétele alapján is. Ti. a g görbe (l. 16. és 17. ábra) P pontbeli t érintőjén átmenő metszetgörbe görbületi középpontját a normálmetszet A görbületi középpontjának az illető metsző síkra való vetülete adja meg. De a szimmetria tengelyre merőleges metszet kör és középpontja a szimmetriatengelyen van, tehát A -nak is ott kell lennie.

ДЕФОРМАЦИЯ ВОЛНИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ЗАДАННОЙ НАГРУЗКЕ, I

I. BINARI

Резюме

Волнистые пластинки часто применяются в приборах для измерения давления и в регистрирующих приборах. В настоящей статье определяется изгиб таких пластинок в случае равномерно распределенного давления, однако применяемый метод подходит также к решению многих подобных задач. Автор рассматривает малый цилиндрический изгиб прямоугольных пластинок, а также малый изгиб пластинок ограниченных окружностью имеющих любую толщину и у которых боковые и радиальные сдвиги пренебрежимо малы. Полученный результат дает возможность определить также напряжения. Автор дает оценку сверху для деформации при заданной начальной форме (волнистости), а также определяет ту начальную форму, которая при заданной нагрузке даёт наименьшее отклонение. Он дает также решение задачи, как надо осуществить волнистость пластинки для того, чтобы отклонение его центра было заданной функцией давления на неё. Он показывает на одном примере как в явном виде определить верхнюю границу отклонения, а также показывает, что отклонение центра пластинки растёт при увеличении числа волн впрессованных в пластинку. Для уточнения решения и для оценки расчётных ошибок даются несколько методов. Наконец рассматривается задача о большом изгибе волнистой пластинки ограниченной окружностью с учётом радиальных отклонений. Эта задача ведёт к системе уравнений, которая записывается в нескольких возможных вариантах, с указанием на их решение.

DEFORMATION OF CORRUGATED PLATES, I

I. BINARI

Summary

Corrugated plates will often be applied in various instruments measuring and registering pressure, or in apparatus regulating by means of pressure.

The present paper after generalizing some basic relations treats the deflection of such plates for uniformly distributed lateral load. However, the approach given suits for a number of analogous problems. — Small cylindrical bending of rectangular plates and small deflection of circular plates has been discussed, where the thickness is small in comparison with the radius of curvature of the initial form. Furthermore radial and lateral displacements may be neglected, what will be satisfied provided that waves pressed on the plate are flat enough. It will be obtained upper bounds for the displacements at given initial shape and determined the initial form affording the smallest deflection for given load. The inverse problem will also be settled, viz. problem of finding the corrugation involving prescribed displacement of the center in function of the pressure. An example shows the evaluation of the upper bound for the

bending and the increase of the center's displacement with the number of the waves pressed on the plate. The solution will be determined by successive approximations completed with an error estimate. These results make possible the computation of the strains too. Lastly, large deflection has been dealt with taking also the radial displacement into account. This problem leads to a system of third order differential equations with two unknowns and six conditions at the boundary. Several alternative of the system will be presented and propositions are made with respect to the solution.

The paper of STANGE referred to in footnote ² treated the strains only and nothing about the deflection. The well-known work of S. TIMOSHENKO: „Theory of Plates and Shells” (New York, 1940) affords on p. 326 the solution for plates with small initial curvature (rectangular corrugated plate), but only for given uniformly distributed forces acting along the edges (no lateral load). However, permitting lateral load alone the said tensile forces are not known in advance. On the contrary they raise with the bending and depend on it, as shown on p. 329 for large deflection (where these forces cannot be neglected), but only for *plain* plate.

In a planned continuation the small and large deflection of a plate with *arbitrary* waves will be discussed.