KÉTSZINTŰ TERVEZÉS: JÁTÉKELMÉLETI MODELL ÉS ITERATIV SZÁMÍTÁSI ELJÁRÁS NÉPGAZDASÁGI TÁVLATI TERVEZÉSI FELADATOK MEGOLDÁSÁRA[1]

KORNAI JÁNOS és LIPTÁK TAMÁS

Bevezetés

Az elmúlt években megkezdődött Magyarországon a matematikai módszerek alkalmazása a magasabbszintű tervező munkában. A kísérletezés két irányú. Az egyik irány: több iparágban matematikai programozást végeznek a tervek megalapozására. A részben már befejeződött vagy lezárásukhoz közeledő számítások közgazdasági optimum-kritériumok alapján határozzák meg a gazdasági tevékenységek (termelés, termelő felhasználás, export, import, beruházás stb.) legkedvezőbb programját egy-egy egész iparág számára.[2] A másik irány az input-output táblák, a statikus Leontief-modellek alkalmazása a népgazdasági tervezésben.[3] Az Országos Tervhivatal immár rendszeresen felhasználja az ágazati kapcsolatok mérlegét az éves és ötéves tervek belső összhangjának ellenőrzésére. Ez az első matematikai eszköz, amelyet Magyarországon makroökonómiai terv készítéséhez alkalmaznak. E módszer azonban, mint közismert, nem alkalmas optimalizálásra, csupán az ágazatok közötti arányosságok biztosítására hivatott.

A helyzet áttekintéséből logikusan adódik a következő lépés: olyan eljárásokat kell kidolgozni, amelyek módot adnak optimalizálásra, de most már az egész népgazdaság számára. A gyakorlati tervezők sokszor hangoztatott igénye ez, s a magyar szakirodalomban találhatunk is ilyen javaslatokat. Az eddigi elgondolások azonban nem tudtak megbirkózni a feladat megoldásának alapvető nehézségével: vagy erősen összevont programozási modellt szerkesztünk, s akkor rendkívül leszűkül a választás lehetősége, a nagyfokú aggregáció, a túlzott egyszerűsítések veszélyeztetik a számítás eredményeinek használhatóságát, vagy pedig igen nagyméretű modellt dolgozunk ki, amely mentes ezektől a hibáktól, ez esetben viszont a feladat numeri-

---

[1] Az alábbi dolgozatban tárgyalt módszer első változatát a szerzők 1962. májusában sokszorosított alakban tették közzé [13]. LIPTÁK T. 1962. októberében a matematikai rész egy új változatát jelentette meg [17]. A módszer közgazdasági ismertetésével és elemzésével foglalkozik KORNAI J. [14] cikke. A számítási eljárás általános részét tárgyaló ,,általános modell" egy korábbi változata LIPTÁK T. és NAGY A. [19] rotaprint alakban megjelent tanulmányában is megtalálható. A fenti tervezési eljárásból kiindulva LIPTÁK T. általános algoritmust dolgozott ki, amelynek segitségével bármely lineáris programozási feladatot tetszőleges kis méretű részfeladadok ismételt megoldására és koordinálására lehet visszavezetni, továbbá konvex minimalizálási vagy konkáv maximalizálási feladatokat ismételt lineáris programozásokkal lehet közelítőleg megoldani. E módszer "Two-level programming" címen került előadásra a MATEMATIKA KÖZGAZDASÁGI ALKALMAZÁSAI címmel 1963 júniusában, Budapesten tartott kollokviumon [18].

[2] Lásd pl. KORNAI J. [12] könyvét.

[3] Az input-output táblák magyarországi felhasználásáról részletes tájékoztatást nyújt a Budapesten 1961-ben tartott tudományos konferencia anyaga. Lásd: [6].

kus megoldása még nagyteljesítményű elektronikus számológépek igénybevételével sem biztosítható.

Kutatásunkban éppen ezt a nehézséget igyekeztünk áthidalni. Világos, hogy a megoldást a nagyméretű programozási feladat felbontásának útján kell keresni. Ez a gondolat már nem egyszer felmerült a makroökonómiai tervezés irodalmában: elég L. V. KANTOROVICS [10] könyvére, R. FRISCH [5] munkájára, továbbá W. TRZECIAKOWSKI [24] tanulmányára utalni. Ismeretesek matematikai módszerek is speciális alakú lineáris programozások dekompozíciójára, így G. B. DANTZIG és PH. WOLFE [3], [4] dolgozataiban. Úgy láttuk azonban, hogy az ismert eljárások nem oldják meg a problémát. Így a Dantzig—Wolfe-féle felbontási eljárást konkrét makroökonómiai modellünkre alkalmazva az ott szereplő „koordináló program" még mindig olyan nagyméretű lenne, hogy a szokásos eljárásokkal (pl. szimplex-módszerrel) számítástechnikailag kezelhetetlenné válna. Ezért a megoldásra más utat választottunk.

Az alapötletet a szocialista gazdaságban folyó tényleges tervezési gyakorlatból merítettük. Az Országos Tervhivatal mint központi szerv gazdaságpolitikai követelmények és a népgazdasági ágazatokra vonatkozó általános ismeretek alapján felosztja a népgazdaság számára rendelkezésre álló erőforrásokat, anyagokat, munkaerőt stb. az ágazatok között, és egyben kijelöli kibocsájtási feladataikat. Az ágazatok ezután saját részletes információk felhasználásával kitöltik a kapott kereteket, konkretizálják a központi tervelőirányzatokat. Eközben módosításokat javasolnak a Tervhivatalnak: a központi szerv a különböző ágazatokból kapott módosításokat összevetve új tervszámokat készít és így tovább. Operatív módszerünk lényegében ennek az „oda-visszatervezésnek" objektív optimum-kritériumokkal és kvantitatív módszerekkel kombinált, szisztematizált alakja.

Cikkünk 1. részében először egy *általános modellt* ismertetünk; ennek keretében a jelölések és definíciók megadása, valamint a tételek bizonyítása könnyebben keresztülvihető. Az 1.1 szakaszban az eredeti, ún. „teljes központi információs" feladatnak kétszintű feladattá, az 1.2 szakaszban pedig ennek poliedrikus játékká való átalakítását és iteratív megoldását tárgyaljuk. Az 1.3 szakaszban az általános és a konkrét modell kapcsolatával foglalkozunk. Dolgozatunk 2. részében a *konkrét modell*re: a hosszúlejáratú makroökonómiai tervezés feladatára alkalmazzuk az 1. rész eredményeit. A 2.1 szakasz a modell leírását adja, a 2.2 szakaszban az iteráció menetét részletezzük, a 2.3 szakaszban pedig néhány, a modellel és a számítási eljárással kapcsolatos közgazdasági problémát tárgyalunk. A dolgozatunkat a kétszintű tervezés módszerének továbbfejlesztésével, más területen való alkalmazásával és egyéb általánosítási lehetőségekkel kapcsolatos megjegyzésekkel zárjuk.

1. AZ ÁLTALÁNOS MODELL

1.1. A teljes központi információs feladat átalakítása kétszintű feladattá

Legyen

(1.1) $\mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{c}'\mathbf{x} \rightarrow \max!$ illetőleg $\mathbf{y}'\mathbf{A} \geqq \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{y}'\mathbf{b} \rightarrow \min!$

az általános modell „eredeti", „teljes központi információs" (röviden: TKI) feladatában a primál, illetve a duál változat kanonikus alakja.[4] A TKI feladat primál változóját (az $\mathbf{x}$ vektort) *TKI program*nak, duál változóját (az $\mathbf{y}$ vektort) *TKI árnyékárrendszer*nek nevezzük. Jelölje X a *megengedett TKI programok*, X^* pedig az *optimális TKI program*ok halmazát, továbbá Y a *megengedett TKI árnyékárrendszer*ek, Y^* pedig az *optimális TKI árnyékárrendszer*ek halmazát:[5]

$$(1.2)\qquad X = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\} \qquad X^* = \{\mathbf{x}^* : \mathbf{x}^* \in X, \mathbf{c}'\mathbf{x}^* = \max_{\mathbf{x}\in X} \mathbf{c}'\mathbf{x}\}$$

$$(1.3)\qquad Y = \{\mathbf{y} : \mathbf{y}'\mathbf{A} \geqq \mathbf{c}', \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}\} \qquad Y^* = \{\mathbf{y}^* : \mathbf{y}^* \in Y, \mathbf{y}^{*\prime}\mathbf{b} = \min_{\mathbf{y}\in Y} \mathbf{y}'\mathbf{b}\}$$

Feltételezzük, hogy a TKI feladat *megoldható*, azaz létezik optimális TKI program: $X^* \neq \emptyset$.[6] Ismeretes[7], hogy ekkor létezik optimális TKI árnyékárrendszer is: $Y^* \neq \emptyset$, továbbá a primál változat maximális és a duál változat minimális célfüggvényértéke megegyezik; közös értékük a TKI feladat Φ *optimuma*:

$$(1.4)\qquad \Phi = \max_{\mathbf{x}\in X} \mathbf{c}'\mathbf{x} = \min_{\mathbf{y}\in Y} \mathbf{y}'\mathbf{b} = \mathbf{c}'\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^{*\prime}\mathbf{b}, \text{ ha } \mathbf{x}^* \in X^*, \mathbf{y}^* \in Y^*.$$

A TKI feladat megoldhatósága egyébként ekvivalens azzal a feltételezéssel, hogy megengedett TKI program és megengedett TKI árnyékárrendszer is létezik[8]:

$$(1.5)\qquad X \neq \emptyset \quad \text{és} \quad Y \neq \emptyset.$$

Legyen

$$(1.6)\qquad \mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n], \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}' = [\mathbf{c}_1', \ldots, \mathbf{c}_n']$$

a TKI feladat primál változatában az $\mathbf{A}$ mátrix, az $\mathbf{x}$ TKI program és a $\mathbf{c}'$ TKI célfüggvény-vektor egymásnak megfelelő particionálása. (1.1) helyett ekkor a vele ekvivalens

$$(1.7)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + & \ldots & + \mathbf{A}_n\mathbf{x}_n & \leqq \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_1 & & & \geqq \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{x}_n & \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_1'\mathbf{x}_1 + & \ldots & + \mathbf{c}_n'\mathbf{x}_n & \to \max! \end{array}\right\}, \text{ illetőleg } \left\{\begin{array}{lll} \mathbf{y}'\mathbf{A}_1 & & \geqq \mathbf{c}_1' \\ & \ddots & \\ & \mathbf{y}'\mathbf{A}_n & \geqq \mathbf{c}_n' \\ & \mathbf{y} & \geqq \mathbf{0} \\ & \mathbf{y}'\mathbf{b} & \to \min! \end{array}\right\}$$

alakot használhatjuk.

---

[4] Minden lineáris programozási feladat primál-duál változata az (1.1) szimmetrikus alakra transzformálható.

[5] Tetszőleges természetű z elemek esetén $\{z: \ \}$ azon z elemekből álló halmazt jelenti, amelyek a : utáni feltételeknek eleget tesznek.

[6] $\emptyset$ az üres halmaz jele.

[7] A. J. GOLDMAN és A. W. TUCKER [8], 60. oldal, Corollary 1A.

[8] A. J. GOLDMAN és A. W. TUCKER [8], 61. oldal, Theorem 2.

Ha a $\mathbf{b}$ korlátvektorral egyező méretű $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ vektorok összege $\mathbf{b}$, tehát ezek kielégítik az

$$\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n = \mathbf{b} \tag{1.8}$$

korlátfelosztási feltételt, akkor a belőlük összeállított

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

vektort *központi programnak*, az $\mathbf{u}_i$ vektort az $\mathbf{u}$ központi program *i-edik szektorkomponensének* nevezzük, *az* $\mathbf{u}$ *központi program* (vagy az $\mathbf{u}_i$ szektorkomponens) *melletti i-edik szektorfeladaton* pedig az

$$\mathbf{A}_i\mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i, \ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{c}_i'\mathbf{x}_i \to \max! \ \text{illetőleg} \ \mathbf{y}_i'\mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i', \ \mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{y}_i'\mathbf{u}_i \to \min! \tag{1.10}$$

lineáris programozási feladatot fogjuk érteni ($i = 1, \ldots, n$). (1.10)-ben $\mathbf{x}_i$ az *i-edik szektorprogram*, $\mathbf{y}_i$ az *i-edik szektorárnyékárrendszer*. Az $\mathbf{u}_i$ szektorkomponens melletti i-edik szektorfeladatban jelölje $X_i(\mathbf{u}_i)$ a *megengedett szektorprogramok*, $X_i^*(\mathbf{u}_i)$ pedig az *optimális szektorprogramok* halmazát, továbbá Y_i a *megengedett szektorárnyékárrendszerek*, $Y_i^*(\mathbf{u}_i)$ pedig az *optimális szektorárnyékárrendszerek* halmazát:

$$X_i(\mathbf{u}_i) = \{\mathbf{x}_i : \mathbf{A}_i\mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i, \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}\}, \ X_i^*(\mathbf{u}_i) = \{\mathbf{x}_i^* : \mathbf{x}_i^* \in X_i(\mathbf{u}_i), \mathbf{c}_i'\mathbf{x}_i^* = \max_{\mathbf{x}_i \in X_i(\mathbf{u}_i)} \mathbf{c}_i'\mathbf{x}_i\} \tag{1.11}$$

$$Y_i = \{\mathbf{y}_i : \mathbf{y}_i'\mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i', \mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0}\}, \ Y_i^*(\mathbf{u}_i) = \{\mathbf{y}_i^* : \mathbf{y}_i^* \in Y_i, \mathbf{y}_i^{*\prime}\mathbf{u}_i = \min_{\mathbf{y}_i \in Y_i} \mathbf{y}_i'\mathbf{u}_i\}. \tag{1.12}$$

Abból, hogy a TKI feladat megoldható, még nem következik, hogy a szektorfeladatok minden központi program — azaz az (1.8) alatti feltételnek megfelelő (1.9) alakú vektor — esetén megoldhatók. Nevezzük *értékelhető központi programoknak* azokat a központi programokat, amelyek mellett valamennyi szektorfeladat megoldható. Megmutatjuk, hogy az értékelhető központi programok egy $\dot{U}$ nemüres konvex poliedrikus halmazt[9] alkotnak. (1.3) és (1.12) összevetéséből ugyanis

$$Y = Y_1 \cap \cdots \cap Y_n. \tag{1.13}$$

Az (1.5) feltételből tehát következik, hogy

$$Y_i \neq \emptyset \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.14}$$

Ebből egyrészt a [8] lábjegyzetben idézett tétel szerint azonnal következik hogy $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']'$ akkor és csak akkor értékelhető központi program ha (1.8) mellett

$$X_i(\mathbf{u}_i) \neq \emptyset \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.15}$$

is teljesül. E közvetlen kritérium mellett egy másikat is levezethetünk: (1.14)

[9] *Konvex poliedrikus halmazon* véges sok lineáris egyenlőtlenségből és egyenletből álló feltételrendszer megoldásaiból álló zárt halmazt értünk. Lásd pl.: A. J. GOLDMAN [7].

miatt ugyanis az $\mathbf{u}_i$ melletti i-edik szektorprogramozás akkor és csak akkor oldható meg, ha $\mathbf{y}_i' \mathbf{u}_i$ alulról korlátos az Y_i halmazon.[10] Legyen most

$$(1.16)\quad \mathsf{Y}_i = \mathbf{Y}_i^{\triangle} + \overline{\mathbf{Y}}_i^{<} = \{\mathbf{Y}_i\mathbf{q}_i + \mu_i\overline{\mathbf{Y}}_i\overline{\mathbf{q}}_i : \mathbf{1}'\mathbf{q}_i = \mathbf{1}'\overline{\mathbf{q}}_i = 1,\ \mathbf{q}_i \geqq \mathbf{0},\ \overline{\mathbf{q}}_i \geqq 0,\ \mu_i \geqq 0\}$$

az Y_i nemüres konvex poliedrikus halmaz kanonikus felbontása.[11] Az $\mathbf{y}_i' \mathbf{u}_i$ lineáris függvénynek az Y_i halmazon való korlátossága ebből ekvivalens az $\overline{\mathbf{Y}}_i' \mathbf{u}_i \geqq \mathbf{0}$ feltétellel. Ezért az értékelhető központi programok $\dot{\mathsf{U}}$ halmazát az alábbi alakba írhatjuk:

$$(1.17)\quad \dot{\mathsf{U}} = \{\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} : \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n = \mathbf{b},\ \overline{\mathbf{Y}}_1'\mathbf{u}_1 \geqq \mathbf{0}, \ldots, \overline{\mathbf{Y}}_n'\mathbf{u}_n \geqq \mathbf{0}\}.$$

$\dot{\mathsf{U}}$ tehát valóban konvex poliedrikus halmaz.

Jelölje $\mathsf{X}(\mathbf{u})$ azokat a TKI programokat, amelyek az $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']'$ értékelhető központi program melletti megengedett szektorprogramokból állíthatók össze:

$$(1.18)\quad \mathsf{X}(\mathbf{u}) = \mathsf{X}_1(\mathbf{u}_1) \times \ldots \times \mathsf{X}_n(\mathbf{u}_n) = \{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} : \mathbf{x}_1 \in \mathsf{X}_1(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathsf{X}_n(\mathbf{u}_n)\}.$$

Az összes értékelhető központi programokból álló $\dot{\mathsf{U}}$ halmaz egy (valódi vagy nem-valódi) U részhalmazáról azt mondjuk, hogy *generálja* X-et, vagy hogy U az X *generátorhalmaza*, ha

$$(1.19)\quad \mathsf{X} = \bigcup_{\mathbf{u} \in \mathsf{U}} \mathsf{X}(\mathbf{u}).$$

$\mathsf{U} = \dot{\mathsf{U}}$ esetén fennáll (1.19), azaz az összes értékelhető központi programból álló nemüres konvex poliedrikus $\dot{\mathsf{U}}$ halmaz generálja a megengedett TKI programokból álló X halmazt. Ezt két lépésben láthatjuk be.

1. (1.5) miatt $\mathsf{X} \neq \varnothing$. Legyen $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1', \ldots, \mathbf{x}_n']'$, és definiáljuk az $\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{A}_{n-1} \mathbf{x}_{n-1}$, $\mathbf{u}_n = \mathbf{b} - (\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{n-1})$ komponenseket. Világos, hogy $\mathbf{x}_i \in \mathsf{X}_i(\mathbf{u}_i)$, tehát $\mathsf{X}_i(\mathbf{u}_i) \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$, s ezért (1.15) miatt $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']'$ értékelhető központi program, $\dot{\mathsf{U}} \neq \varnothing$. Ezenfelül $\mathbf{x} \in \mathsf{X}(\mathbf{u})$ és, mivel minden $\mathbf{x} \in \mathsf{X}$ TKI programhoz a fenti konstrukció szolgáltat egy ilyen $\mathbf{u} \in \dot{\mathsf{U}}$ központi programot, $\mathsf{X} \subset \bigcup_{\mathbf{u} \in \dot{\mathsf{U}}} \mathsf{X}(\mathbf{u})$.

---

[10] A. J. GOLDMAN és A. W. TUCKER [8], 60. oldal, Corollary 1B.

[11] A. J. GOLDMAN [7], 44—49. oldalak, Theorem 1, Corollary 1A. Ha $\mathbf{y}_{i1}, \ldots, \mathbf{y}_{iN_i}$ az Y_i halmaz extrém pontjai, akkor $\mathbf{Y}_i = [\mathbf{y}_{i1}, \ldots, \mathbf{y}_{iN_i}]$. Korlátos Y_i halmaz esetén definíciószerűen $\overline{\mathbf{Y}}_i = \mathbf{0}$. Egyébként tekinthetjük az Y_i-t definiáló $\mathbf{y}_i' \mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i'$, $\mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0}$ egyenlőtlenségrendszerből nyert $\overline{\mathbf{y}}_i' \mathbf{A}_i \geqq \mathbf{0}$, $\overline{\mathbf{y}}_i \geqq \mathbf{0}$, $\overline{\mathbf{y}}_i' \mathbf{1} = 1$ *redukált és normált* egyenlőtlenségrendszer megoldásaiból álló nem üres korlátos konvex poliedrikus $\overline{\mathsf{Y}}_i$ halmazt. Ha $\overline{\mathbf{y}}_{i1}, \ldots, \overline{\mathbf{y}}_{i\overline{N}_i}$ ennek extrém pontjai, akkor $\overline{\mathbf{Y}}_i = [\overline{\mathbf{y}}_{i1}, \ldots, \mathbf{y}_{i\overline{N}_i}]$. ($\mathbf{1}$ csupa 1 komponensű vektort jelent: így $\mathbf{q}_i$ és $\overline{\mathbf{q}}_i$ nemnegatív, 1 komponens-összegű, ún. *valószínűségi vektor*ok. $\mathbf{Y}_i^{\triangle}$ tehát az $\mathbf{y}_{i1}, \ldots, \mathbf{y}_{iN_i}$ pontok konvex burka, $\overline{\mathbf{Y}}_i$ pedig korlátos Y_i esetén a $\mathbf{0}$ vektor, egyébként az $\overline{\mathbf{y}}_{i1}, \ldots, \overline{\mathbf{y}}_{i\overline{N}_i}$ *extrém irány*ok által meghatározott konvex gúla. Y_i az idézett tétel szerint e két halmaz vektoriális összege.

2. Ha $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']' \in \dot{U}$ és $\mathbf{x}_i \in X_i(\mathbf{u}_i)$, azaz $\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i$, $\mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor az (1.8) korlátfelosztási feltétel miatt $\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n \leqq \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1', \ldots, \mathbf{x}_n']' \geqq \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{x} \in X$. Ezért $X(\mathbf{u}) \subset X$, $\bigcup_{\mathbf{u} \in \dot{U}} X(\mathbf{u}) \subset X$.

Az (1.19) alatti generáló tulajdonsággal az összes értékelhető központi programok egy nemüres konvex poliedrikus halmazt alkotó *valódi* részhalmaza is rendelkezhet. A konkrét modellben felhasználandó példaként tekintsük az alábbit: speciális alakú $\mathbf{A}$ mátrix esetén (1.7) az

$$\mathbf{A}_1^{\#}\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{A}_n^{\#}\mathbf{x}_n \leqq \mathbf{b}^{\#} \tag{1.20}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1^{\circ}\mathbf{x}_1 \leqq \mathbf{b}_1^{\circ} \\ \quad\ddots \\ \mathbf{A}_n^{\circ}\mathbf{x}_n \leqq \mathbf{b}_n^{\circ} \end{cases} \tag{1.21}$$

$$\mathbf{x}_1 \geqq \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{x}_n \geqq \mathbf{0} \tag{1.22}$$

$$\mathbf{c}_1'\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{c}_n'\mathbf{x}_n \to \max! \tag{1.23}$$

alakot öltheti (itt $\mathbf{A}_i^{\circ}\, \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{b}_i^{\circ}$ a TKI feladat olyan feltételeit foglalja össze, amelyek csak az i-edik szektorra vonatkoznak: e feltételeket az i-edik szektor *speciális szektorfeltételei*nek nevezhetjük). Célszerű itt a központi programot is

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^{\#} \\ \mathbf{u}_{i1}^{\circ} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{in}^{\circ} \end{bmatrix} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.24}$$

alakban felvenni, és ebben az esetben a korlátfelosztási feltételt az

$$\mathbf{u}_1^{\#} + \ldots + \mathbf{u}_n^{\#} = \mathbf{b}^{\#} \tag{1.25}$$

$$\mathbf{u}_{1i}^{\circ} + \ldots + \mathbf{u}_{ni}^{\circ} = \mathbf{b}_i^{\circ} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.26}$$

egyenletek fejezik ki. Jelölje itt is $\dot{U}$ az összes értékelhető központi programok halmazát, U pedig $\dot{U}$ azon részhalmazát, amelyben minden szektor teljes egészében „megkapja" a speciális szektorfeltételeiben szereplő korlátokat:

$$U = \left\{\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} : \ \mathbf{u} \in \dot{U}, \ \ \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{\#} \\ \mathbf{b}_1^{\circ} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ldots, \ \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_n^{\#} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_n^{\circ} \end{bmatrix}\right\}. \tag{1.27}$$

Világos, hogy U nemüres konvex poliedrikus részhalmaza $\dot{U}$-nak, amelyre érvényes (1.19), de nem tartalmaz szükségképpen minden értékelhető központi programot: ha pl. $\mathbf{b}^{\#} \geqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{b}_i^{\circ} > \mathbf{0}$, $i = 1, \ldots, n$, akkor $U \subset \dot{U}$, de $U \neq \dot{U}$.

Legyen most U olyan nemüres konvex poliedrikus részhalmaza $\dot{U}$-nak, amely generálja X-et. Rögzítsük U-t és nevezzük elemeit *megengedett központi program*oknak. Tetszőleges $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']'$ megengedett központi programra értelmezve vannak az $\mathbf{u}$-hoz tartozó

$$\varphi_i(\mathbf{u}_i) = \max_{\mathbf{x}_i \in X_i(\mathbf{u}_i)} \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i = \min_{\mathbf{y}_i \in Y_i} \mathbf{y}_i' \mathbf{u}_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

szektoroptimumok, és ezek összege, a $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi_i(\mathbf{u}_i) + \ldots + \varphi_n(\mathbf{u}_n)$ *összoptimum*. Ezek $\mathbf{u}$-nak tartományonként lineáris és folytonos konkáv függvényei. Ha ugyanis $\mathbf{y}_{i1}, \ldots, \mathbf{y}_{iN_i}$ jelölik Y_i extrém pontjait, tehát (1.16)-ban $\mathbf{Y}_i = [\mathbf{y}_{i1}, \ldots, \mathbf{y}_{iN_i}]$ írható,

$$\varphi_i(\mathbf{u}_i) = \min_{\mathbf{y}_i \in Y_i} \mathbf{y}_i' \mathbf{u}_i = \min \{\mathbf{y}_{i1}' \mathbf{u}_i, \ldots, \mathbf{y}_{iN_i}' \mathbf{u}_i\}.$$

$\mathbf{u}$ értékelhető volta miatt tehát $\varphi_i(\mathbf{u}_i)$ véges sok lineáris függvény alsó burkolója, $i = 1, \ldots, n$. Így $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi_1(\mathbf{u}_1) + \ldots + \varphi_n(\mathbf{u}_n)$ is ilyen tulajdonságú.

A TKI feladatból az (1.6) szektorbontással és a megengedett központi programhalmaz fenti módon rögzített megválasztásával származó *kétszintű feladat*on az alábbiakban részletezett feladatot értjük.

(1) „Központi szinten": meghatározandó(k) a maximális összoptimumot biztosító megengedett központi program(ok), más szóval: megoldandó az $\mathbf{u} \in U$, $\varphi(\mathbf{u}) \to \max$! konkáv programozási feladat, meghatározandó az *optimális központi program*okból álló

$$U^* = \{\mathbf{u}^* : \mathbf{u}^* \in U, \varphi(\mathbf{u}^*) = \max_{\mathbf{u} \in U} \varphi(\mathbf{u})\} \tag{1.28}$$

halmaz.

(2) „Szektori szinten": minden szektorban meghatározandó(k) az optimális központi programkomponens(ek)hez tartozó optimális szektorprogram(ok), más szóval: minden $\mathbf{u}^* = [\mathbf{u}_1^{*\prime}, \ldots, \mathbf{u}_n^*]' \in U^*$ mellett megoldandók az $\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i^*$, $\mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}'\mathbf{x}_i' \to \max$! szektorfeladatok, tehát meghatározandók az (1.11) alatti definiált $X_i^*(\mathbf{u}_i^*)$ halmazok, $i = 1, \ldots, n$.

(3) Összeállítandó(k) az optimális központi program(ok) mellett optimális szektorprogramokból nyerhető TKI program(ok), más szóval: meghatározandó az

$$X^*(\mathbf{u}^*) = X_1^*(\mathbf{u}_1^*) \times \ldots \times X_n^*(\mathbf{u}_n^*) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^* \end{bmatrix} : \mathbf{x}_1^* \in X_1^*(\mathbf{u}_1^*), \ldots, \mathbf{x}_n^* \in X_n^*(\mathbf{u}_n^*) \right\} \tag{1.29}$$

halmazok $\bigcup_{\mathbf{u}^* \in U^*} X^*(\mathbf{u}^*)$ alakú egyesítése.

1. TÉTEL. *Megoldható TKI feladatból származó tetszőleges kétszintű feladat is megoldható, és megoldása ekvivalens a TKI feladat megoldásával:*

$$U^* \neq \emptyset \quad \text{és} \quad X^* = \bigcup_{\mathbf{u}^* \in U^*} X^*(\mathbf{u}^*). \tag{1.30}$$

Az összoptimum maximális értéke a TKI feladat optimumával egyenlő:

$$\max_{\mathbf{u} \in U} \varphi(\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{c}'\mathbf{x} = \Phi. \tag{1.31}$$

Bizonyítás. A tétel állításai leolvashatók az alábbi egyenlőségsorozatból:

$$\Phi = \max_{\mathbf{x} \in X} \mathbf{c}'\mathbf{x} = \max_{\mathbf{x} \in \bigcup_{\mathbf{u} \in U} X(\mathbf{u})} \mathbf{c}'\mathbf{x} = \max_{\mathbf{u} \in U} \{ \max_{\mathbf{x} \in X(\mathbf{u})} \mathbf{c}'\mathbf{x}\} =$$

$$= \max_{\mathbf{u} \in U} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \max_{\mathbf{x}_i \in X_i(\mathbf{u}_i)} \mathbf{c}_i'\mathbf{x}_i \right\} = \max_{\mathbf{u} \in U} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \min_{\mathbf{y}_i \in Y_i} \mathbf{y}_i'\mathbf{u}_i \right\} = \max_{\mathbf{u} \in U} \varphi(\mathbf{u}).$$

1.2. A kétszintű feladat átalakítása poliedrikus játékká és ennek fiktív lejátszással való iteratív megoldása

A kétszintű feladat „központi szintjén" megoldandó konkáv programozási feladat célfüggvénye a $\varphi(\mathbf{u})$ összoptimum: ez a függvény a TKI feladat adatai és a szektorbontás alapján ugyan meghatározható, de ez számítástechnikailag az eredetinél nehezebb feladat. Ezért a kétszintű feladatot célszerűen átalakítjuk. Jelölje V az (1.12) szerinti *megengedett szektorárnyékárrendszer-együttes*ek halmazát:

$$\mathsf{V} = \mathsf{Y}_1 \times \ldots \times \mathsf{Y}_n = \left\{\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} : \mathbf{y}_1 \in \mathsf{Y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n \in \mathsf{Y}_n\right\}. \tag{1.32}$$

Az összoptimumra az alábbi előállítást nyerjük:

$$\varphi(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{n} \min_{\mathbf{y}_i \in \mathsf{Y}_i} \mathbf{y}_i'\mathbf{u}_i = \min_{\substack{\mathbf{y}_i \in \mathsf{Y}_i \\ i=1,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i'\mathbf{u}_i = \min_{\mathbf{v} \in \mathsf{V}} \mathbf{v}'\mathbf{u}\,. \tag{1.33}$$

Ebből a TKI optimumra (1.31) alapján a következőt írhatjuk:

$$\Phi = \max_{\mathbf{u} \in \mathsf{U}} \min_{\mathbf{v} \in \mathsf{V}} \mathbf{v}'\mathbf{u}\,. \tag{1.34}$$

Definiáljunk egy *poliedrikus játék*ot[12] a következőképpen: legyen U a maximalizáló, V pedig a minimalizáló fél stratégiahalmaza, a $\mathbf{v}'\mathbf{u}$ homogén bilineáris függvény ($\mathbf{u} \in \mathsf{U}$, $\mathbf{v} \in \mathsf{V}$) pedig a játék kifizetési függvénye. A maximalizáló felet a „központtal", a minimalizáló felet a „szektor-együttessel"[13] lehet azonosítani; ennek megfelelően megengedett központi program helyett *központi stratégiát*, megengedett szektorárnyékárrendszer-együttes helyett *szektorstratégiát* mondhatunk és mindkét stratégia esetén beszélhetünk a stratégiának az egyes szektorokra eső *komponens*eiről. Az így definiált játékot a megfelelő *kétszintű feladatból* vagy a *TKI feladatból* (adott szektorbontással és a megengedett központi programhalmaz adott megválasztásával) *származó poliedrikus játék*nak nevezzük és röviden (U, V)-vel jelöljük. Az (1.34) reláció azt fejezi ki, hogy a TKI feladat optimuma a belőle származó poliedrikus játék max-min (alsó) értéke. A TKI feladat, a belőle származó kétszintű feladat és poliedrikus játék közti kapcsolattal foglalkozik az alábbi

2. TÉTEL. *Megoldható TKI feladatból származó poliedrikus játék is megoldható, és értéke a TKI optimummal egyenlő. A „központi fél" optimális stratégiái a megfelelő kétszintű feladatban fellépő optimális központi programok. A „szektor-együttes fél" optimális stratégiái között mindig van olyan stratégia, amelynek szektorkomponensei megegyeznek ; annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy szektoronként megegyező komponensű szektorstratégia optimális legyen, az, hogy egy tetszőleges központi stratégiával szemben optimális ellenstratégia legyen ; megegyező szektorkomponensű optimális szektorstratégiában a közös szektorkomponens optimális TKI árnyékárrendszert alkot és viszont.*

---

[12] Vö. Ph. Wolfe [25]. Jelöléseinkkel : $m = n$, $X = \mathsf{U}$, $Y = \mathsf{V}$, $A = \mathbf{E}$ = egységmátrix.

[13] Lásd a „person" definícióját pl. J. C. C. McKinsey [20] könyvében, 4. oldal, 3. bekezdés.

Bizonyítás. 1. Megoldható TKI feladat esetén a Φ TKI-optimum létezik és véges, másrészt (1.34) szerint az (U, V) poliedrikus játék max-min értékével egyenlő. Ebből PH. WOLFE [25] tétele szerint következik, hogy Φ egyben e játék min-max (felső) értéke is, tehát (U, V) megoldható, értéke Φ, és mindkét félnek van optimális stratégiája.

2. Mivel (1.33) szerint $\varphi(\mathbf{u})$ a $\mathbf{v}'\mathbf{u}$ kifizetési függvény minimuma a V halmazon, a központi fél optimális stratégiáiból álló halmaz megegyezik az (1.28) alatti U^* halmazzal.

3. Az (1.3)—(1.12) jelölések felhasználásával először megmutatjuk, hogy

$$\mathsf{Y}_1^*(\mathbf{u}_1) \cap \ldots \cap \mathsf{Y}_n^*(\mathbf{u}_n) = \begin{cases} \mathsf{Y}^*, \text{ ha } \mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']' \in \mathsf{U}^* \\ \emptyset, \text{ ha } \mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']' \notin \mathsf{U}^*, \end{cases} \tag{1.35}$$

azaz: csak az optimális központi stratégiákkal szemben van — de itt mindig van — szektoronként megegyező komponensű optimális ellenstratégia, s a közös komponens optimális TKI-árnyékárrendszer. (1.35) bizonyításának első feleként megmutatjuk, hogy $\mathbf{y}^* \in \mathsf{Y}^*$, $\mathbf{u}^* = [\mathbf{u}_1^{*\prime}, \ldots, \mathbf{u}_n^{*\prime}]' \in \mathsf{U}^*$ esetén $\mathbf{y}^* \in \mathsf{Y}_1^*(\mathbf{u}_1^*), \ldots, \mathbf{y}^* \in \mathsf{Y}_n^*(\mathbf{u}_n^*)$ áll fenn. Ellenkező esetben ui.

$$\Phi = \varphi(\mathbf{u}^*) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\mathbf{u}_i^*) = \sum_{i=1}^{n} \min_{\mathbf{y}_i \in \mathsf{Y}_i} \mathbf{y}_i' \mathbf{u}_i^* < \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}^{*\prime} \mathbf{u}_i^* = \mathbf{y}^{*\prime} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i^* = \mathbf{y}^{*\prime} \mathbf{b} = \Phi$$

lenne, ami lehetetlen. (1.35) bizonyításának második felében megmutatjuk, hogy fordítva: $\hat{\mathbf{y}} \in \mathsf{Y}_1^*(\hat{\mathbf{u}}_1), \ldots, \hat{\mathbf{y}} \in \mathsf{Y}_n^*(\hat{\mathbf{u}}_n)$ esetén $\hat{\mathbf{y}} \in \mathsf{Y}^*$ és $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{\mathbf{u}}_1', \ldots, \hat{\mathbf{u}}_n']' \in \mathsf{U}^*$ áll fenn. Legyen ui. $\mathbf{y} \in \mathsf{Y}$ tetszőleges; ekkor

$$\mathbf{y}'\mathbf{b} = \mathbf{y}' \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathbf{u}}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}' \hat{\mathbf{u}}_i \geqq \sum_{i=1}^{n} \min_{\mathbf{y}_i \in \mathsf{Y}_i} \mathbf{y}_i' \hat{\mathbf{u}}_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\hat{\mathbf{u}}_i) = \varphi(\hat{\mathbf{u}}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathbf{y}}' \hat{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{y}}' \sum_{i=1}^{n} \hat{\mathbf{u}}_i = \hat{\mathbf{y}}' \mathbf{b},$$

tehát $\mathbf{y}'\mathbf{b} \geqq \hat{\mathbf{y}}'\mathbf{b}$, azaz $\hat{\mathbf{y}} \in \mathsf{Y}^*$. Következik még ebből, hogy $\varphi(\hat{\mathbf{y}}) = \hat{\mathbf{u}}'\mathbf{b} = \Phi$, tehát $\hat{\mathbf{u}} \in \mathsf{U}^*$. Ezzel (1.35)-öt bebizonyítottuk. A 2. tétel bizonyításának teljessé tételéhez most már csak azt kell igazolnunk, hogy tetszőleges $\mathbf{y}^*$ optimális TKI árnyékárrendszer esetén a szektoronként megegyező $\mathbf{y}^*$-komponensű $\mathbf{v}_{y^*} = [\mathbf{y}^{*\prime}, \ldots, \mathbf{y}^{*\prime}]'$ szektorstratégia optimális. Ehhez elegendő kimutatni, hogy tetszőleges $\mathbf{u}^* \in \mathsf{U}^*$ optimális központi stratégiával együtt $\mathbf{v}_{y^*}$ a $\mathbf{v}'\mathbf{u}$ függvény (U, V)-beli nyeregpontját alkotja. Legyen tehát $\mathbf{u}^* = [\mathbf{u}_1^{*\prime}, \ldots, \mathbf{u}_n^{*\prime}]'$ a választott optimális központi stratégia, $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']' \in \mathsf{U}$, illetve $\mathbf{v} = [\mathbf{y}_1', \ldots, \mathbf{y}_n']' \in \mathsf{V}$ tetszőlegesek. Ekkor

$$\mathbf{v}_{y^*}'\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}^{*\prime}\mathbf{u}_i = \mathbf{y}^{*\prime} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i = \mathbf{y}^{*\prime}\mathbf{b} = \Phi =$$

$$= \mathbf{y}^{*\prime} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{u}_i^* = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i^{*\prime}\mathbf{u}_i^* = \mathbf{v}_{y^*}'\mathbf{u}^* \leqq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i' \mathbf{u}_i^* = \mathbf{v}'\mathbf{u}^*,$$

azaz $\mathbf{v}_{y^*}'\mathbf{u} \leqq \mathbf{v}_{y^*}'\mathbf{u}^* \leqq \mathbf{v}'\mathbf{u}^*$, ha $\mathbf{u} \in \mathsf{U}$ és $\mathbf{v} \in \mathsf{V}$. Ezzel a 2. tétel bizonyítását befejeztük.

A TKI feladatot tehát visszavezettük a belőle származó poliedrikus játék megoldására. A megoldásra olyan módszert keresünk, amely kihasználja a feladat felbontottságát, és a központban, illetve a szektorokban külön-külön elvégezhető részletszámításokból épül fel. Értelmezzük ehhez az *értékelhető szektorstratégia*, azaz *értékelhető szektorárnyékárrendszer-együttes* fogalmát: ezen olyan $\mathbf{v} \in \mathsf{V}$ szektorstratégiát értünk, amellyel szemben létezik optimális központi ellenstratégia, más szóval: amelynél az $\mathbf{u} \in \mathsf{U}$, $\mathbf{v}'\mathbf{u} \rightarrow \max$! lineáris programozás megoldható. Nevezzünk *reguláris*nak egy (U, V) poliedrikus játékot, ha valamennyi szektorstratégiája értékelhető. Vegyük tekintetbe, hogy a kétszíntű feladat definíciója szerint U minden eleme értékelhető központi stratégiából, tehát olyan $\mathbf{u}$ központi programból áll, amelyre a $\mathbf{v} \in \mathsf{V}$, $\mathbf{v}'\mathbf{u} \rightarrow \min$! lineáris programozás megoldható. Reguláris poliedrikus játék esetén tehát mindkét fél mindegyik stratégiájával szemben létezik optimális ellenstratégia. Ebből következik, hogy minden reguláris poliedrikus játék stratégiailag redukálható[14] egy véges játékra.[15] Legyen ugyanis $\mathsf{U} = \mathbf{U}^{\triangle} + \overline{\mathbf{U}}^{<}$, illetve $\mathsf{V} = \mathbf{V}^{\triangle} + \overline{\mathbf{V}}^{<}$ a szereplő stratégiahalmazok — mindkettő nemüres, konvex poliedrikus halmaz — kanonikus felbontása. (Vö.: [11] lábjegyzet, 581. oldal.) A kétféle értékelhetőségi feltételezésből azonnal következik, hogy $\mathbf{V}'\overline{\mathbf{U}} \leqq \mathbf{O}$, $\overline{\mathbf{V}}'\overline{\mathbf{U}} = \mathbf{O}$ és $\overline{\mathbf{V}}'\mathbf{U} \geqq \mathbf{O}$, továbbá az $\mathbf{u} = \mathbf{U}\mathbf{p} + \lambda\overline{\mathbf{U}}\overline{\mathbf{p}} \in \mathsf{U}$ stratégiát az $\mathbf{u}^{\triangle} = \mathbf{U}\mathbf{p} \in \mathbf{U}^{\triangle}$, a $\mathbf{v} = \mathbf{V}\mathbf{q} + \mu\overline{\mathbf{V}}\overline{\mathbf{q}} \in \mathsf{V}$ stratégiát pedig a $\mathbf{v}^{\triangle} = \mathbf{V}\mathbf{q} \in \mathbf{V}^{\triangle}$ stratégiával lehet (tágabb értelemben) dominálni: minden $\hat{\mathbf{v}} \in \mathsf{V}$ mellett $\hat{\mathbf{v}}'\mathbf{u} \leqq \hat{\mathbf{v}}'\mathbf{u}^{\triangle}$ és minden $\hat{\mathbf{u}} \in \mathsf{U}$ mellett $\mathbf{v}'\hat{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{v}^{\triangle\prime}\hat{\mathbf{u}}$ ($\mathbf{p}, \overline{\mathbf{p}}, \mathbf{q}$ és $\overline{\mathbf{q}}$ valószínűségi vektorok, λ és μ nemnegatív számok). Ezért az (U, V) reguláris poliedrikus játék stratégiailag redukálható az $(\mathbf{U}^{\triangle}, \mathbf{V}^{\triangle})$ poliedrikus játékra: ez pedig izomorf a $\mathbf{V}'\mathbf{U}$ kifizetési mátrixú véges játékkal.

Rá kell mutatnunk arra, hogy e véges játék csak implicit formában van megadva, hiszen a $\mathbf{V}'\mathbf{U}$ mátrixot nem ismerjük közvetlenül, csak azt tudjuk, hogy $\mathbf{U}$ a központi, $\mathbf{V}$ pedig a szektorokban szereplő egyenlőtlenségrendszerekkel meghatározott U, illetve V poliedrikus halmazok extrém pontjaiból összeállított mátrixok, a kifizetési mátrix pedig ezek szorzata. Ha tehát az (U, V) reguláris poliedrikus játék egy megoldását e $\mathbf{V}'\mathbf{U}$ mátrixú véges játék megoldása útján akarjuk meghatározni, a direkt számítási eljárásokat — az eredeti TKI feladat méreteivel legalábbis azonos méretű számítás nehézségeitől eltekintve — már csak ezért sem lehet alkalmazni. Felhasználható azonban a Brown—Robinson-féle *fiktív lejátszási* módszer[16]. Az előbbiekből következik, hogy reguláris poliedrikus játék minden $\mathbf{u} \in \mathsf{U}$ központi stratégiájával szemben megadható egy $\mathbf{v}^*(\mathbf{u}) \in \mathbf{V}^{\triangle}$ optimális ellenstratégia és minden $\mathbf{v} \in \mathsf{V}$ szektorstratégiával szemben megadható egy $\mathbf{u}^*(\mathbf{v}) \in \mathbf{U}^{\triangle}$ optimális ellenstratégia, amelyekre tehát

$$(1.36) \quad \mathbf{v}^*(\mathbf{u})'\mathbf{u} = \min_{\mathbf{v} \in \mathsf{V}} \mathbf{v}'\mathbf{u} = \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}^{\triangle}} \mathbf{v}'\mathbf{u}\,; \quad \mathbf{v}'\mathbf{u}^*(\mathbf{v}) = \max_{\mathbf{u} \in \mathsf{U}} \mathbf{v}'\mathbf{u} = \max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}^{\triangle}} \mathbf{v}'\mathbf{u}$$

[14] Akkor mondjuk, hogy egy játék *stratégiailag redukálható* egy másik játékra, ha ez utóbbi megoldható és minden megoldása (optimális stratégia-párja) egyben az eredeti játéknak is megoldása.

[15] A *véges játék* vagy, más néven, *mátrixjáték* definícióját lásd pl. S. KARLIN [9] könyvében, a 17. oldalon.

[16] G. W. BROWN [1], [2]; J. ROBINSON [21]. Részletes referálásra: S. KARLIN [9], 179—189 oldalak.

áll fenn. $\mathbf{v}^*(\mathbf{u})$ meghatározását az $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}^*(\mathbf{v})$ meghatározását pedig a $\mathbf{v}$ *reguláris értékelésének* nevezzük. Az (U, V) reguláris poliedrikus játék *reguláris fiktív lejátszásán* az $\mathbf{U}^\triangle$-ba eső $\mathbf{u}^*\langle 1\rangle, \mathbf{u}^*\langle 2\rangle, \ldots, \mathbf{u}^*\langle N\rangle, \ldots$, illetve a $\mathbf{V}^\triangle$-ba eső $\mathbf{v}^*\langle 1\rangle, \mathbf{v}^*\langle 2\rangle, \ldots, \mathbf{v}^*\langle N\rangle, \ldots$ stratégiasorozatok alábbi szabály szerint történő megkonstruálását értjük:

1. *szakasz.* I. lépés: választunk egy tetszőleges $\mathbf{u}^{(1)} \in \mathbf{U}^\triangle$ központi stratégiát. II. lépés: definíciószerűen $\mathbf{u}^*\langle 1\rangle = \mathbf{u}^{(1)}$. III. lépés ($\mathbf{u}^*\langle 1\rangle$ reguláris értékelése): $\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^*(\mathbf{u}^*\langle 1\rangle)$ meghatározása. IV. lépés: definíciószerűen $\mathbf{v}^*\langle 1\rangle = \mathbf{v}^{(1)}$.

Ezután rátérünk a 2., 3., ... szakaszra.

N-edik szakasz ($N = 2, 3, \ldots$). I. lépés ($\mathbf{v}^*\langle N-1\rangle$ reguláris értékelése): $\mathbf{u}^{(N)} = \mathbf{u}^*(\mathbf{v}^*\langle N-1\rangle)$ meghatározása. II. lépés („keverés" az előző szakaszbeli taggal):

$$\mathbf{u}^*\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\,\mathbf{u}^*\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\,\mathbf{u}^{(N)}$$

kiszámítása. III. lépés ($\mathbf{u}^*\langle N\rangle$ reguláris értékelése): $\mathbf{v}^{(N)} = \mathbf{v}^*(\mathbf{u}^*\langle N\rangle)$ meghatározása. IV. lépés („keverés" az előző szakaszbeli taggal):

$$\mathbf{v}^*\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\,\mathbf{v}^*\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\,\mathbf{v}^{(N)}$$

kiszámítása.

Mivel

$$\Phi = \max_{\mathbf{u}\in\mathsf{U}} \min_{\mathbf{v}\in\mathsf{V}} \mathbf{v}'\mathbf{u} = \min_{\mathbf{v}\in\mathsf{V}} \max_{\mathbf{u}\in\mathsf{U}} \mathbf{v}'\mathbf{u},$$

az értékelések definíciójából könnyen levezethető, hogy az N-edik szakaszbeli

$$\Phi^*\langle N\rangle = \max_{\mathbf{u}\in\mathsf{U}} \mathbf{v}^*\langle N-1\rangle'\mathbf{u} = \max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}^\triangle} \mathbf{v}^*\langle N-1\rangle'\mathbf{u} = \mathbf{v}^*\langle N-1\rangle'\mathbf{u}^{(N)}$$

felső optimum ($N = 2, 3, \ldots$) felső becslést, a

$$\varphi^*\langle N\rangle = \min_{\mathbf{v}\in\mathsf{V}} \mathbf{v}'\mathbf{u}^*\langle N\rangle = \min_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}^\triangle} \mathbf{v}'\mathbf{u}^*\langle N\rangle = \mathbf{v}^{(N)\prime}\mathbf{u}^*\langle N\rangle$$

alsó optimum ($N = 1, 2, \ldots$) pedig alsó becslést ad a Φ TKI optimumra:

$$\Phi^*\langle N\rangle \geqq \Phi \quad (N = 2, 3, \ldots); \quad \varphi^*\langle N\rangle \leqq \Phi \quad (N = 1, 2, \ldots). \tag{1.37}$$

Mivel továbbá a sorozatok konstrukciójuk miatt a $\mathbf{V}'\mathbf{U}$ mátrixú véges játék fiktív lejátszását is jelentik, érvényes a Brown—Robinson-tétel, tehát

$$\lim_{N\to\infty} \Phi^*\langle N\rangle = \lim_{N\to\infty} \varphi^*\langle N\rangle = \Phi, \tag{1.38}$$

és az $\{\mathbf{u}^*\langle N\rangle\}$, illetve $\{\mathbf{v}^*\langle N\rangle\}$ sorozatok limeszpontjai optimális központi, illetve szektorstratégiák.

A reguláris fiktív lejátszás iterációjának *δ-leállításán* (δ tetszőlegesen kicsiny pozitív szám) értsük a fenti konstrukció alábbi befejezését:

Legyen

$$\Phi^{**}\langle N\rangle = \min\{\Phi^*\langle 2\rangle, \ldots, \Phi^*\langle N\rangle\}, \quad N = 2, 3, \ldots \tag{1.39}$$

és legyen N_δ az a legkisebb pozitív egész szám, amelyre

$$\Phi^{**}\langle N_\delta\rangle - \varphi^*\langle N_\delta\rangle \leqq \delta \quad \text{vagy} \quad \Phi^{**}\langle N_\delta + 1\rangle - \varphi^*\langle N_\delta\rangle \leqq \delta \tag{1.40}$$

teljesül: (1.37) és (1.38) alapján tetszőlegesen kicsiny pozitív δ szám esetén N_δ értelmezve van. Ekkor: 1. Az iterációt az vagy N_δ-adik szakasz III., vagy az $(N_\delta+1)$-edik szakasz I. lépésénél abbahagyjuk [aszerint, hogy (1.40)-ben az első vagy a második egyenlőtlenség teljesült]. 2. A szektorokban megoldjuk az

$$\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i^*\langle N_\delta\rangle, \quad \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max! \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.41}$$

lineáris programozásokat. 3. Az így nyert $\mathbf{x}_i^{\delta *}$ szektorprogramokból összeállítjuk az $\mathbf{x}^{\delta *} = [\mathbf{x}_1^{\delta *\prime}, \ldots, \mathbf{x}_n^{\delta *\prime}]'$ megengedett TKI programot. Mivel

$$\mathbf{c}'\mathbf{x}^{\delta *} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i^{\delta *} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i^*(\mathbf{u}_i^*\langle N_\delta\rangle)'\, \mathbf{u}_i^*\langle N_\delta\rangle = \mathbf{v}^*(\mathbf{u}^*\langle N_\delta\rangle)'\, \mathbf{u}^*\langle N_\delta\rangle = \varphi^*\langle N_\delta\rangle,$$

(1.40) és (1.37) alapján

$$\Phi - \delta \leq \mathbf{c}'\mathbf{x}^{\delta *} \leq \Phi \tag{1.42}$$

Az (1.42) fennállását röviden úgy jellemezzük, hogy $\mathbf{x}^{\delta *}$ *δ-optimális* TKI program.

Kiegészítésül foglalkozunk azzal az esettel, amelyben az (U, V) reguláris poliedrikus játék a szektor-együttes fél számára egyértelműen oldható meg. Ebből következik, hogy redukáltja, a $\mathbf{V}'\mathbf{U}$ mátrixú véges játék is ilyen tulajdonságú, s így az idézett Brown—Robinson-tétel szerint a $\{\mathbf{v}^*\langle N\rangle\}$ sorozat konvergens, és határértéke az egyértelmű optimális szektorstratégia. A 2. tétel 3. része alapján ez nem más, mint az a szektorárnyékárrendszer-együttes, amelynek minden szektorkomponense a (fenti feltételekből következően) egyértelmű optimális TKI árnyékárrendszer.

A TKI feladatból származó reguláris poliedrikus játék fiktív lejátszásával kapcsolatos és fentiekben bizonyított eredményeinket az alábbiakban foglalhatjuk össze:

3. TÉTEL. *Ha egy megoldható TKI feladatból származó poliedrikus játék reguláris, akkor fiktív lejátszásával a TKI feladat tetszőleges pontossággal megoldható abban az értelemben, hogy tetszőlegesen kicsiny pozitív δ mellett a reguláris fiktív lejátszás δ-leállítása δ-optimális TKI programra vezet. Ha e reguláris poliedrikus játék emellett a szektor-együttes fél számára egyértelműen oldható meg, a reguláris fiktív lejátszása során nyert kevert szektorstratégia-sorozatban az egyes szektorokra jutó komponensek „egalizálódnak", azaz közös határértékhez : az optimális TKI árnyékárrendszerhez konvergálnak.*

1.3. Kiegészítő megjegyzések

A TKI feladatot *reguláris* poliedrikus játékká kell átalakítani: ennek módja a szektorokra bontás és értékelhető központi programokból álló alkalmas generátorhalmaz megválasztása. Nem foglalkoztunk itt azzal a kérdéssel, hogy minden — TKI feladatnak tekintett — lineáris programozási feladatra ez az átalakítás elvégezhető-e, és ha igen, hogyan kell elvégezni: tételeket vezettünk le, amelyek minden megoldható és reguláris poliedrikus játékká átalakítható lineáris programozási feladatra érvényesek. Nem vizsgáltuk azt a problémát sem, hogy az iterációs szakaszok I. lépésében felmerülő központi lineáris programozás nem számításigényesebb-e az eredetinél: ne felejtsük el, hogy a központi program komponenseinek száma a TKI feltételek számának és a szektorok számának szorzatával egyenlő.

Arra volt ugyanis mindössze szükségünk e dolgozat keretében, hogy az általános módszert egy konkrét modell: a hosszúlejáratú makroökonómiai tervezés feladatára alkalmazzuk. Az itteni TKI feladat szektorokra való felbontása adottság, amely a probléma közgazdasági természetéből folyik. A szektorfeltételek egy része „speciális" jellegű az (1.20)—(1.27) alatti értelemben. A megmaradt „közös" feltételek korlátainak felosztását végző központi programra adott feltételek egyfelől biztosítják, hogy a megengedett központi programok halmaza az (1.19) értelemben generátorhalmaz legyen, másfelől e halmazt korlátossá teszik. Ebből következik, hogy a keletkező poliedrikus játék reguláris lesz (hiszen korlátos alaphalmazon a lineáris programozási feladat minden célfüggvényvektor mellett megoldható), tehát alkalmazható lesz rá az 1. részben levezetett általános módszer. Ugyanakkor kiderül, hogy a központi programozás több független, egyszerű rangsorolással megoldható részprogramozássá bomlik szét: szimplex-eljárásra csak a szektorprogramozásokban lesz szükség.

2. A KONKRÉT MODELL: HOSSZÚLEJÁRATÚ MAKROÖKONÓMIAI TERVEZÉSI FELADAT

2.1. A modell leírása

A népgazdaságot n számú ágazatra, szektorra bontva képzeljük. Minden szektor egy termékcsoportért felelős. A továbbiakban egyszerűen *termék*ről fogunk beszélni: ez egyszerűen aggregáció kérdése. (Egyébként nem okozna nehézséget olyan modell felállítása, amelyben minden szektor több termék előállításáért lenne felelős.) A szektor tevékenységéhez nemcsak a szóban forgó termék hazai termelése és a termeléshez szükséges beruházás tartozik, hanem e termék exportja és importja is. Távlati tervet dolgozunk ki egy tervperiódusra, amely összesen T időszakból áll.

Nem kívánjuk modellünk segítségével meghatározni a népgazdasági terv minden előirányzatát. Kiindulópontunk: egy már kidolgozott („hagyományos", nem matematikai módszerekkel meghatározott, az input—outputtáblával ellenőrzött) népgazdasági terv. Ennek bizonyos előirányzatait konstansként átvesszük programozási modellünkbe. Modellünkben ezeket *gazdaságpolitikai adat*oknak nevezzük, s jelölésükre mindig nagybetűket használunk. Az alábbi adatokról van szó:

A) Az i-edik termékből a t-edik időszakban szükséges *extern fogyasztás* :

(2.1) $$R_{it} > 0 \qquad i = 1, \ldots n\,; \quad t = 1, \ldots, T.$$

Magában foglalja a személyes és közületi fogyasztást, beleértve az improduktív beruházást is. Nem tartalmazza ezzel szemben sem az exportot, sem (bizonyos kivételtől eltekintve, amelyre később még visszatérünk) a produktív beruházást.

B) Az i-edik termékből a t-edik időszakban a népgazdaságban bennmaradt mennyiség *felső korlátja* :

(2.2) $$R_{it} \; (> Q_{it}) \qquad i = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, T.$$

Világos, hogy ilyen korlátot könnyű megadni: mindamellett célszerű minél kisebb, de reális értéket elfogadni, mert a felső korlát túl magas értéke lassítja a későbbi iteráció konvergenciáját.

C) A népgazdaságban a t-edik időszakban produktív munkára rendelkezésre álló munkaerőkeret:

$$(2.3) \qquad W_t > 0 \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Az egyes szektorok lehetséges tevékenységeit négy csoportra: *reprodukáló*, *export-*, *import-* és *beruházási* tevékenységekre oszthatjuk. Az első három csoportbeli tevékenységek terjedelmét minden időszakra külön-külön kell meghatároznunk, a beruházási tevékenységet viszont időben adott módon lezajló folyamatnak tekintjük, amelynek terjedelmét az egész tervperiódusra egyszerre kell kialakítani. Foglalkozzunk részletesebben az i-edik szektor tevékenységeivel ($i = 1, \ldots, n$).

1. *Reprodukáló tevékenységek.* Ezeken a tervperiódus kezdetén már fennálló, az i-edik terméket kibocsátó kapacitások változatlan továbbműködtetését értjük. Technikai jellemzők alapján (például elmaradottabb vagy fejlettebb üzem) több ilyen tevékenység építhető be a modellbe. Jelölje n_i^{repr} a reprodukáló tevékenységek számát, x_{ikt}^{repr} pedig a k-adik reprodukáló tevékenység terjedelmét a t-edik időszakban ($k = 1, \ldots, n_i^{\text{repr}}$; $t = 1, \ldots, T$).

2. *Export tevékenységek.* Gazdasági jellemzők alapján (pl. piacok, relációk stb. szerint) többféle export-tevékenységet szerepeltethetünk a modellben. Jelölje n_i^{exp} az exporttevékenységek számát, x_{ikt}^{exp} pedig a k-adik exporttevékenység terjedelmét a t-edik időszakban ($k = 1, \ldots, n_i^{\text{exp}}$; $t = 1, \ldots, T$).

3. *Import-tevékenységek.* Mindenekelőtt két típusú tevékenységet szerepeltetünk. *Korlátos import*-tevékenységen olyan behozatalt értünk, amely a hazai termelőtevékenységekkel versenyezhet, azokat pótolni képes (kompetitív import), s amelynek terjedelmét valamilyen külső piaci tényező korlátozza. Gazdasági jellemzők (pl. piacok stb.) alapján többféle ilyen korlátos import-tevékenység beépíthető a modellbe. Jelölje n_i^{imp} ezek számát, x_{ikt}^{imp} pedig a k-adik korlátos import-tevékenység terjedelmét a t-edik időszakban ($k = 1, \ldots, n_i^{\text{imp}}$; $t = 1, \ldots, T$). A korlátos import mellett minden szektorban szerepeltetünk egy *szabad import*-tevékenységet is. Ez az előző importtevékenységekhez hasonlóan kompetitív jellegű, de terjedelmét sem külső piaci körülmények, sem egyéb adottságok eleve nem korlátozzák. Egyes szektorokban joggal feltételezhetjük ilyen tevékenység létezését, másokban valóságban ilyen lehetőség nem áll fenn. Ez utóbbi esetben a szerepeltetett tevékenység „fiktív" jellegű: pönálészerűen magas árral biztosítjuk, hogy a modellben ugyan szerepel a megfelelő változó, de az optimális (vagy „közelítőleg" optimális) programba nem kerül bele. Jelölje x_{i0t}^{imp} az i-edik szektorbeli szabad import-tevékenység terjedelmét a t-edik időszakban ($t = 1, \ldots, T$).

Az 1—3. pontokban felsorolt tevékenységek terjedelmének egységét természetes mértékegységben vagy Ft-ban állapíthatjuk meg. Az alább következő beruházási tevékenységeknél némileg másképpen kell eljárnunk.

4. *Beruházási tevékenységek.* Egy beruházási tevékenységet három adattal jellemzünk: a létrehozandó létesítmény jellegével, a létrehozás és üzemeltetés technológiával, továbbá a beruházás megkezdésének időpontjával. Eszerint adott létesítmény adott technológiájú létrehozásán és üzemeltetésén (úgy mondhatnánk: egy adott beruházási tevékenység-*típuson*) belül külön alternatív beruházási tevékenységek építhetők be a modellbe aszerint, hogy a beruházást melyik időszakba kezdjük el. Feltételezzük, hogy csak olyan beruházási tevékenységeket szerepeltetünk, amelyek legkésőbb az utolsó, T-edik időszakban már teljes kapacitással dolgoznak. Egy beruházási tevékenység terjedelmét ezért az utolsó, T-edik időszakban elért kapacitás mellett termelt termékmennyiség természetes vagy Ft-ban számított mennyiségével

mérjük. Jelölje n_i^{inv} a beruházási tevékenységek számát, x_{ik}^{inv} pedig a k-adik beruházási tevékenység terjedelmét ($k = 1, \ldots, n_i^{\text{inv}}$).

A TKI feladat felírásához még szükségünk van a termékek előállításával, exportálásával, importálásával és a beruházásokkal kapcsolatos input—output együtthatók, munkaerőigény-együtthatók és célfüggvény-együtthatók értelmezésére.

a) Jelölje f_{ikt}^{inv} az i-edik szektor k-adik beruházási tevékenységének egysége által a t-edik időszakban létrehozott i-edik termék mennyiségét (természetes, illetve Ft-egységekben; $k = 1, \ldots, n_i^{\text{inv}}$; $t = 1, \ldots, T$; $i = 1, \ldots, n$). Világos, hogy $f_{ikt}^{\text{inv}} \geqq 0$, mégpedig: az üzemeltetés előtt $f_{ikt}^{\text{inv}} = 0$, a felfutás időszakában f_{ikt}^{inv} (mint t függvénye) monoton nő, végül a teljes üzemeltetés időpontjától kezdve $f_{ikt}^{\text{inv}} = 1$. (Azonos beruházási tevékenységtípuson belül f_{ikt}^{inv} hasonló, de a kezdőidőszak szerint eltolt függvénye t-nek.) Mivel feltettük, hogy a létesítmény az utolsó, T-edik időszakban teljes kapacitással üzemel, írhatjuk:

(2.4) $f_{ikt}^{\text{inv}} \geqq 0, \quad t = 1, \ldots, T; \quad f_{ikT}^{\text{inv}} = 1; \quad k = 1, \ldots, n_i^{\text{inv}}; \quad i = 1, \ldots, n.$

b) Jelölje g_{jikt}^{repr}, illetve g_{jikt}^{inv} a j-edik szektor k-adik reprodukáló, illetve beruházási tevékenységének egysége által a t-edik időszakban igényelt i-edik termékmennyiséget ($k = 1, \ldots, n_j^{\text{repr}}$, illetve $k = 1, \ldots, n_j^{\text{inv}}$; $t = 1, \ldots, T$; $j = 1, \ldots, i-1, i+1\ i+1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, n$). Világos, hogy

$$\left.\begin{array}{ll} (2.5) \quad g_{jikt}^{\text{repr}} \geqq 0, & k = 1, \ldots, n_j^{\text{repr}} \\ & \\ (2.6) \quad g_{jikt}^{\text{inv}} \geqq 0, & k = 1, \ldots, n_j^{\text{inv}} \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = 1, \ldots, T \\ j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n \\ i = 1, \ldots, n; \end{array}$$

a j-edik termék k-adik reprodukáló, illetve beruházási tevékenysége a termelés, illetve a beruházás technológiai jellege szerint vagy igényli, vagy nem igényli az i-edik termék felhasználását. A termelés anyagigénye magában foglalja mind a folyó üzemeltetés anyagigényét, mind pedig a régi kapacitás fenntartásához, egyszerű újratermeléséhez szükséges nagyjavítási és pótlási, felújítási akciók anyagigényét. A beruházás anyagigénye magában foglalja az új kapacitás megteremtésének éveiben a beruházás által igényelt termékeket (pl. gépek), az üzemeltetés éveiben pedig mind a folyó termeléshez, mind pedig a már megteremtett kapacitás fenntartásához, pótlásához szükséges termékeket. Hasonlóképpen a termékkibocsátáshoz, itt is feltételezzük, hogy az egyes beruházási tevékenység-típusokra az anyagigények meghatározott időbeni tagozódása jellemző.

c) Jelölje h_{ikt}^{repr}, illetve h_{ikt}^{inv} az i-edik szektor k-adik reprodukáló, illetve beruházási tevékenységének egysége által a t-edik időszakban igényelt munkaerőkeretet ($k = 1, \ldots, n_i^{\text{repr}}$, illetve $k = 1, \ldots, n_i^{\text{inv}}$; $t = 1, \ldots, T$; $i = 1, \ldots, n$). Míg a reprodukáló tevékenységeknél ez a létszám-együttható mindig pozitív, hiszen munkaerő nélkül nincs termelés, addig a beruházási tevékenységekre ez csak az üzemelés megkezdése után érvényes. Mindenesetre

(2.7) $h_{ikt}^{\text{repr}} > 0, \quad k = 1, \ldots, n_i^{\text{repr}}; \quad t = 1, \ldots, T; \quad i = 1, \ldots, n$

(2.8) $h_{ikt}^{\text{inv}} \geqq 0, \quad t = 1, \ldots, T; \quad h_{ikT}^{\text{inv}} > 0; \quad k = 1, \ldots, n_i^{\text{inv}}; \quad i = 1, \ldots, n.$

d) Az egyes tevékenységek hasznosságát az általuk elért *devizahozam*mal mérjük. Jelölje c_{ikt}^{exp}, illetve c_{ikt}^{imp} az i-edik szektor k-adik export-, illetve import-tevékenységének egysége által a t-edik időszakban elért devizahozamot ($k = 1, \ldots, n_i^{\exp}$, illetve $k = 0, 1, \ldots, n_i^{\mathrm{imp}}$; $t = 1, \ldots, T$; $i = 1, \ldots, n$), c_{ik}^{inv} pedig a k-adik beruházási tevékenységének egysége által elért devizahozamot ($k = 1, \ldots, n_i^{\mathrm{inv}}$; $i = 1, \ldots, n$). Az export-tevékenységek devizahozama természetesen pozitív, az import-tevékenységeké negatív, a beruházási tevékenységeké pedig nempozitív (negatív abban az esetben, ha hazai termelés által nem pótolható, nem-kompetitív importot is igényel). A beruházási tevékenységek devizahozama természetesen az egész tervperiódusban felmerült nemkompetitív import költségével egyenlő. Feltételezzük ezenkívül, hogy a legkedvezőbb export-ár sem haladhatja meg a legkedvezőbb import-árat. Ezeket foglalják magukban az alábbiak:

$$\text{(2.9)} \quad \left.\begin{cases} c_{ikt}^{\exp} > 0 & k = 1, \ldots, n_i^{\exp} \\ c_{ikt}^{\mathrm{imp}} < 0 & k = 0, 1, \ldots, n_i^{\mathrm{imp}} \end{cases}\right\} t = 1, \ldots, T; \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$\text{(2.10)} \quad c_{ik}^{\mathrm{inv}} \leqq 0 \quad k = 1, \ldots, n_i^{\mathrm{inv}}; \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$\text{(2.11)} \quad \max_{1 \leqq k \leqq n_i^{\exp}} c_{ikt}^{\exp} \leqq \min_{0 \leqq k \leqq n_i^{\mathrm{imp}}} (-c_{ikt}^{\mathrm{imp}}) \quad t = 1, \ldots, T; \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ezek után felírhatjuk a hosszúlejáratú makroökonómiai tervezési feladatot TKI alakban az alábbi lineáris programozási feladatként:

$$\text{(2.12)} \quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{repr}}} x_{ikt}^{\mathrm{repr}} - \sum_{k=1}^{n_i^{\exp}} x_{ikt}^{\exp} + \sum_{k=0}^{n_i^{\mathrm{imp}}} x_{ikt}^{\mathrm{imp}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{inv}}} f_{ikt}^{\mathrm{inv}} x_{ik}^{\mathrm{inv}} - \\ &- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n_j^{\mathrm{repr}}} g_{jikt}^{\mathrm{repr}} x_{jkt}^{\mathrm{repr}} + \sum_{k=1}^{n_j^{\mathrm{inv}}} g_{jikt}^{\mathrm{inv}} x_{jk}^{\mathrm{inv}} \right) \geqq Q_{it} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} t &= 1, \ldots, T \\ i &= 1, \ldots, n; \end{aligned}$$

$$\text{(2.13)} \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{repr}}} h_{ikt}^{\mathrm{repr}} x_{ikt}^{\mathrm{repr}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{inv}}} h_{ikt}^{\mathrm{inv}} x_{ik}^{\mathrm{inv}} \right) \leqq W_t, \qquad t = 1, \ldots, T;$$

$$\text{(2.14)} \quad \left[\begin{gathered} \sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{repr}}} x_{ikt}^{\mathrm{repr}} - \sum_{k=1}^{n_i^{\exp}} x_{ikt}^{\exp} + \sum_{k=0}^{n_i^{\mathrm{imp}}} x_{ikt}^{\mathrm{imp}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{inv}}} f_{ikt}^{\mathrm{inv}} x_{ik}^{\mathrm{inv}} \leqq R_{it} \\ t = 1, \ldots, T; \quad i = 1, \ldots, n \end{gathered}\right]$$

$$\text{(2.15)} \quad \left\{\begin{gathered} \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{repr}}} a_{iskt}^{\mathrm{repr}} x_{ikt}^{\mathrm{repr}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\exp}} a_{iskt}^{\exp} x_{ikt}^{\exp} + \sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{imp}}} a_{iskt}^{\mathrm{imp}} x_{ikt}^{\mathrm{imp}} \right) + \sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{inv}}} a_{isk}^{\mathrm{inv}} x_{ik}^{\mathrm{inv}} \leqq b_{is} \\ s = 1, \ldots, m_i; \quad i = 1, \ldots, n \end{gathered}\right\}$$

$$\text{(2.16)} \quad \left.\begin{gathered} \underbrace{\begin{matrix} x_{ikt}^{\mathrm{repr}} \geqq 0 & x_{ikt}^{\exp} \geqq 0 & x_{ikt}^{\mathrm{imp}} \geqq 0 \\ k = 1, \ldots, n_i^{\mathrm{repr}}; & k = 1, \ldots, n_i^{\exp}; & k = 0, 1, \ldots, n_i^{\mathrm{imp}} \end{matrix}}_{t = 1, \ldots, T} \\ x_{ik}^{\mathrm{inv}} \geqq 0 \\ k = 1, \ldots, n_i^{\mathrm{inv}} \end{gathered}\right| \; i = 1, \ldots, n$$

$$\text{(2.17)} \quad \sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{k=1}^{n_i^{\exp}} c_{ikt}^{\exp} x_{ikt}^{\exp} + \sum_{k=0}^{n_i^{\mathrm{imp}}} c_{ikt}^{\mathrm{imp}} x_{ikt}^{\mathrm{imp}} \right) + \sum_{k=1}^{n_i^{\mathrm{inv}}} c_{ik}^{\mathrm{inv}} x_{ik}^{\mathrm{inv}} \right\} \to \max!$$

A (2.12) alatti feltételek azt fejezik ki, hogy minden termékből minden időszakra legalább az extern fogyasztást kell biztosítani. A (2.13) alatti feltételek biztosítják, hogy egyetlen időszakban se keletkezzék munkaerőhiány. E feltételek valamennyi szektort érintő, *közös* feltételek, míg a (2.14)—(2.15) feltételek csak egy-egy szektor változóira vonatkozó *speciális szektorfeltételek*. A (2.14) alatti feltételek minden termékre és minden időszakra vonatkozólag korlátozzák a népgazdaságon belül maradt termékmennyiséget: e feltételeket az illető szektor *extern korlátozó feltételei*nek nevezhetjük. A (2.15) alatti feltételek a szektorok termelési, behozatali, kiviteli és beruházási tevékenységével kapcsolatos további speciális feltételeket fejeznek ki. Feltételezzük, hogy egyikük sem vonatkozik az illető szektor szabad import-tevékenységeire: ezért e feltételeket *kötött speciális szektorfeltételek*nek mondjuk.[17] (2.16) a tevékenységek terjedelmének nemnegativitását fejezi ki, (2.17) pedig azt, hogy a népgazdasági optimalizálási kritériumnak az összes devizahozam maximalizálását tekintjük. (Vö.: [22] lábjegyzet, 609. oldal.)

A modell szektorokra bontása adva van. Kihasználva az (1.20)—(1.27) alatti egyszerűsítő megjegyzést, a központi program változóiként csak a közös feltételeknek megfelelő korlátok felosztásait tekintjük. Vezessük be ezek jelölésére az általános modell jelöléseivel összhangban az alábbiakat:

$$(2.18)\qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{\#} \\ \mathbf{b}_1^{\circ} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{u}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_n^{\#} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_n^{\circ} \end{bmatrix},$$

ahol

$$(2.19)\qquad \mathbf{u}_i^{\#} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i1}^{\#} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{iT}^{\#} \end{bmatrix} \quad i = 1, \ldots, n$$

$$(2.20)\qquad \left\{ \begin{matrix} \mathbf{u}_{it}^{\#} = [p_{i1}, \ldots, \ p_{i,i-1,t}, -p_{iit}, \ p_{i,i+1,t}, \ldots, \ p_{int}, \ w_{it}]' \\ t = 1, \ldots, T; \quad i = 1, \ldots, n \end{matrix} \right\}$$

$$(2.21)\qquad \mathbf{b}_i^{\circ} = [R_{i1}, \ldots, R_{iT}, \ b_{i1}, \ldots, \ b_{im_i}]' \quad i = 1, \ldots, n.$$

A korlátfelosztási feltételek ekkor a következők:

$$\left.\begin{aligned} &(2.22)\qquad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_{ijt} - p_{jjt} = -Q_{jt} \quad j = 1, \ldots, n \\ &(2.23)\qquad \sum_{i=1}^{n} w_{it} = W_t \end{aligned}\right\} t = 1, \ldots, T.$$

[17] Feltételezzük, hogy a kötött speciális feltételeket a bennük szereplő változókkal azonosan 0-val ki lehet elégíteni, más szóval: a szektoroknak meg van engedve, hogy az ellátási feladatot kizárólag szabad importból fedezzék.

Egészítsük ki a fentieket a $p_{jjt} \leqq R_{jt}$ $(t = 1, \ldots, T;\ j = 1, \ldots, n)$ feltételekkel, továbbá a (2.20)-ban szereplő összes központi változókra vonatkozó nemnegativitási feltétellel. Legyenek megengedettek azok a központi programok, amelyek az így nyert

$$\left.\begin{aligned}
&(2.24) \qquad p_{iit} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_{jit} + Q_{it} \leqq R_{it}, \quad i = 1, \ldots, n\\
&(2.25) \qquad \sum_{i=1}^{n} w_{it} = W_t\\
&(2.26) \qquad p_{1it} \geqq 0, \ldots,\ p_{nit}, \geqq 0,\quad w_{it} \geqq 0,\quad i = 1, \ldots, n
\end{aligned}\right\}\ t = 1, \ldots, T,$$

központi feltételrendszernek eleget tesznek.

Jelöljük röviden a (p_{ijt}, w_{it}) szimbólummal a (2.18)—(2.21) alakú központi programot. Adott (p_{ijt}, w_{it}) esetén az i-edik szektorfeladat primál alakja (1.10), illetve (2.12)—(2.17) alapján a következő:

$$\left.\begin{aligned}
&(2.27) \qquad \sum_{k=1}^{n_i^{\text{repr}}} x_{ikt}^{\text{repr}} - \sum_{k=1}^{n_i^{\text{exp}}} x_{ikt}^{\text{exp}} + \sum_{k=0}^{n_i^{\text{imp}}} x_{ikt}^{\text{imp}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{inv}}} f_{ikt}^{\text{inv}} x_{ik}^{\text{inv}} \geqq p_{iit};\\
&(2.28) \qquad \sum_{k=1}^{n_i^{\text{repr}}} g_{ijkt}^{\text{repr}} x_{ikt}^{\text{repr}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{inv}}} g_{ijkt}^{\text{inv}} x_{ik}^{\text{inv}} \leqq p_{ijt},\\
&\qquad\qquad j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n;\\
&(2.29) \qquad \sum_{k=1}^{n_i^{\text{repr}}} h_{ikt}^{\text{repr}} x_{ikt}^{\text{repr}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{inv}}} h_{ikt}^{\text{inv}} x_{ik}^{\text{inv}} \leqq w_{it};
\end{aligned}\right\}\ t = 1, \ldots, T;$$

$$(2.30) \qquad \sum_{k=1}^{n_i^{\text{repr}}} x_{ikt}^{\text{repr}} - \sum_{k=1}^{n_i^{\text{exp}}} x_{ikt}^{\text{exp}} + \sum_{k=0}^{n_i^{\text{imp}}} x_{ikt}^{\text{imp}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{inv}}} f_{ikt}^{\text{inv}} x_{ik}^{\text{inv}} \leqq R_{it}, \quad t = 1, \ldots, T$$

$$(2.31) \left\{\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{k=1}^{n_i^{\text{repr}}} a_{iskt}^{\text{repr}} x_{ikt}^{\text{repr}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{exp}}} a_{iskt}^{\text{exp}} x_{ikt}^{\text{exp}} + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{imp}}} a_{iskt}^{\text{imp}} x_{ikt}^{\text{imp}}\right) + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{inv}}} a_{isk}^{\text{inv}} x_{ik}^{\text{inv}} \leqq b_{is}\\
&\qquad\qquad s = 1, \ldots, m_i
\end{aligned}\right\}$$

$$(2.32) \left\{\begin{aligned}
&\underbrace{\begin{matrix} x_{ikt}^{\text{repr}} \geqq 0 & x_{ikt}^{\text{exp}} \geqq 0 & x_{ikt}^{\text{imp}} \geqq 0\\ k = 1, \ldots, n_i^{\text{repr}}; & k = 1, \ldots, n_i^{\text{exp}}; & k = 0, 1, \ldots, n_i^{\text{imp}}\end{matrix}}_{t = 1, \ldots, T} \quad \begin{matrix} x_{ik}^{\text{inv}} \geqq 0\\ k = 1, \ldots, n_i^{\text{inv}}\end{matrix}
\end{aligned}\right.$$

$$(2.33) \qquad \sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{k=1}^{n_i^{\text{exp}}} c_{ikt}^{\text{exp}} x_{ikt}^{\text{exp}} + \sum_{k=0}^{n_i^{\text{imp}}} c_{ikt}^{\text{imp}} x_{ikt}^{\text{imp}}\right) + \sum_{k=1}^{n_i^{\text{inv}}} c_{ik}^{\text{inv}} x_{ik}^{\text{inv}} \to \max!$$

A feltételek közgazdasági tartalmuk szerint *központi* és *speciális szektorfeltételek*re oszthatók. A (2.27) alatti központi feltételek azt fejezik ki, hogy az i-edik szektornak minden időszakra meg kell oldania a központ által kitűzött *ellátási feladatot*: a t-edik időszakban legalább p_{iit} mennyiségű i-edik terméket kell előteremtenie. A (2.28) alatti központi feltételek megadják minden időszakra és minden termékre az i-edik termék előállításához felhasználható *anyagkeretet*: a t-edik időszakban a j-edik termékből legfeljebb p_{ijt} mennyiséget használhat fel az i-edik szektor. Végül a (2.29) alatti központi feltételek megszabják az i-edik szektor *munkaerőkeretét* minden időszakra: a t-edik időszakban legfeljebb w_{it} munkaerő áll az i-edik szektor rendelkezésére. A (2.30) alatti feltételek az i-edik szektor extern korlátozó feltételei, a (2.31) alatti feltételek pedig a kötött speciális szektorfeltételek.

Jelölje π_{iit} a (2.27) alatti, π_{ijt} a (2.28) alatti ω_{it} a (2.29) alatti, ϱ_{it} a (2.30) alatti, σ_{is} pedig a (2.31) alatti feltételeknek megfelelő árnyékárat. Ekkor a (p_{ijt}, w_{it}) központi program melletti i-edik szektorfeladat duál alakját az alábbiak szerint írhatjuk fel:

$$(2.34)\quad \begin{cases} \varrho_{it} - \pi_{iit} + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_{ijkt}^{\mathrm{repr}} \pi_{ijt} + h_{ikt}^{\mathrm{repr}} \omega_{it} + \sum\limits_{s=1}^{m_i} a_{iskt}^{\mathrm{repr}} \sigma_{is} \geqq 0 \\ k = 1, \dots, n_i^{\mathrm{repr}}; \quad t = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$(2.35)\quad \begin{cases} -\varrho_{it} + \pi_{iit} + \sum\limits_{s=1}^{m_i} a_{iskt}^{\mathrm{exp}} \sigma_{is} \geqq c_{ikt}^{\mathrm{exp}} \\ k = 1, \dots, n_i^{\mathrm{exp}}; \quad t = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$(2.36)\quad \varrho_{it} - \pi_{iit} \geqq c_{i0t}^{\mathrm{imp}}; \quad t = 1, \dots, T$$

$$(2.37)\quad \begin{cases} \varrho_{it} - \pi_{iit} + \sum\limits_{s=1}^{m_i} a_{iskt}^{\mathrm{imp}} \sigma_{is} \geqq c_{ikt}^{\mathrm{imp}} \\ k = 1, \dots, n_i^{\mathrm{imp}}; \ t = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$(2.38)\quad \begin{cases} f_{ikt}^{\mathrm{inv}}(\varrho_{it} - \pi_{iit}) + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} g_{ijkt}^{\mathrm{inv}} \pi_{ijt} + h_{ikt}^{\mathrm{inv}} \omega_{it} + \sum\limits_{s=1}^{m_i} a_{isk}^{\mathrm{inv}} \sigma_{is} \geqq c_{ik}^{\mathrm{inv}} \\ k = 1, \dots, n_i^{\mathrm{inv}}; \quad t = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$(2.39)\quad \left.\begin{matrix} \varrho_{it} \geqq 0 & \\ \pi_{ijt} \geqq 0 & j = 1, \dots, n \end{matrix}\right\} t = 1, \dots, T; \quad \sigma_{is} \geqq 0, \quad s = 1, \dots, m_i$$

$$(2.40)\quad \sum_{t=1}^{T} \left(R_{it} \varrho_{it} - p_{iit} \pi_{iit} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_{ijt} \pi_{ijt} + w_{it} \omega_{it} \right) + \sum_{s=1}^{m_i} b_{is} \sigma_{is} \to \min!$$

A primál-duál alakot együtt tüntettük fel az i-edik szektorfeladat *kanonikus elrendezésében*. Egy $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{c}'\mathbf{x} \to \max!$ (primál), $\mathbf{y}'\mathbf{A} \geq \mathbf{c}'$, $\mathbf{y}' \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y}'\mathbf{b} \to \min!$ (duál) alakú lineáris programozási feladat kanonikus elrendezésén a

$$\begin{array}{c|c|c} & \mathbf{x}' & \leqq \\ \hline \mathbf{y} & \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \hline \geqq & \mathbf{c}' & \end{array} \tag{2.41}$$

táblázatot értjük. Az i-edik szektorfeladat kanonikus elrendezését

$$\begin{array}{c|c|c} & \mathbf{x}_i' & \leqq \\ \hline \mathbf{y}_i^{\#} & \mathbf{A}_i^{\#} & \mathbf{u}_i^{\#} \\ \mathbf{y}_i^{\circ} & \mathbf{A}_i^{\circ} & \mathbf{b}_i^{\circ} \\ \hline \geqq & \mathbf{c}_i' & \end{array} \tag{2.42}$$

alakban hozzuk. A TKI feladat kanonikus elrendezését ebből

$$\begin{array}{c|ccc|c} & \mathbf{x}_1' & \dots & \mathbf{x}_n' & \leqq \\ \hline \mathbf{y}^{\#} & \mathbf{A}_1^{\#} & \dots & \mathbf{A}_n^{\#} & \mathbf{b}^{\#} \\ \mathbf{y}_1^{\circ} & \mathbf{A}_1^{\circ} & & \mathbf{O} & \mathbf{b}_1^{\circ} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{y}_n^{\circ} & \mathbf{O} & & \mathbf{A}_n^{\circ} & \mathbf{b}_n^{\circ} \\ \hline \geqq & \mathbf{c}_1' & \dots & \mathbf{c}_n' & \end{array} \tag{2.43}$$

alakban állíthatjuk elő.

A fent leírt modellben érvényesek az alábbiak (részletes bizonyításukat az olvasóra bízzuk).

I. A (2.12)—(2.17) alatti konkrét TKI feladat a (2.1)—(2.11) feltételezések mellett megoldható. (Létezik megengedett TKI program, pl. $x_{i0t}^{\text{imp}} = Q_{it}$, $t = 1, \dots, T$; $i = 1, \dots, n$, a többi változó értéke 0; a TKI célfüggvény korlátos; ebből az 581. oldalon szereplő [10] lábjegyzet alatt idézett tétel alapján a fenti állítás következik.)

II. A megengedett központi programok értékelhetők és a megengedett TKI programok halmazának nemüres konvex poliedrikus generátorhalmazát alkotják. (Az $x_{i0t}^{\text{imp}} = p_{iit}$, $t = 1, \dots, T$; többi i-edik szektorváltozó értéke 0, $i = 1, \dots, n$ választással minden megengedett központi program mellett létezik minden szektorban megengedett program. (1.15) alapján ebből a megengedett központi programok értékelhetősége következik. A többi triviális, illetve az (1.19) utáni konstrukció egyszerű módosításával igazolható.)

III. A megengedett szektorárnyékárrendszer-együttesek értékelhetők. (A megengedett központi programok halmaza korlátos: ebből a [10] lábjegyzet alatt idézett tétel alapján az értékelhetőség következik.)

A fenti tulajdonságok együttesen azt jelentik, hogy a konkrét TKI feladatból származó poliedrikus játék reguláris és így alkalmazható a konkrét modellre az 1. részben kidolgozott iteratív eljárás. Ebben az esetben az iterációs szakaszok I. lépésében fellépő központi programozás igen egyszerűen, szimplex-algoritmus alkalmazása nélkül végrehajtható. Adott (π_{ijt}, ω_{it}, ϱ_{it}, σ_{is}) árnyékárrendszer-együttes (1.36) alatt értelmezett reguláris értékelése, tehát a vele szemben optimális (p^*_{ijt}, w^*_{it}) központi program meghatározása ugyanis a

$$(2.44)\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} p_{iit} = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_{jit} + Q_{it} \leqq R_{it} \quad i = 1, \ldots, n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} w_{it} = W_t \\ p_{ijt} \geqq 0\,;\; i, j = 1 \ldots, n\,;\; w_{it} \geqq 0,\; i = 1, \ldots, n \end{array}\right\} t = 1, \ldots, T \\ \sum\limits_{t=1}^{T} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \pi_{jit}\, p_{jit} - \pi_{iit}\, p_{jit} + \omega_{it} w_{it} \right) \to \max! \end{array}\right.$$

lineáris programozás megoldását jelenti. A feladat $(n + 1)\cdot T$ számú független „mikroprogramozássá" bomlik, mégpedig:

A) az i-edik termék t-edik időszakra vonatkozó „optimális" eloszlását megadó

$$(2.45)\quad \left\{\begin{array}{l} p_{iit} = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p_{jit} + Q_{it} \leqq R_{it} \\ p_{jit} \geqq 0, \quad j = 1, \ldots, n \\ \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \pi_{jit}\, p_{jit} - \pi_{iit}\, p_{iit} \to \max! \end{array}\right.$$

programozásokra ($i = 1, \ldots, n$; $t = 1, \ldots, T$), továbbá a munkaerőkeretnek a t-edik időszakra vonatkozó „optimális" elosztását megadó

$$(2.46)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{n} w_{it} = W_t \\ w_{it} \geqq 0, \quad i = 1, \ldots, n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_{it}\, w_{it} \to \max! \end{array}\right.$$

programozásokra ($t = 1, \ldots, T$). Triviálisan belátható, hogy (2.45) egy megoldása a következő: ha $j_0(\neq i)$ jelöli azt a (legkisebb) indexet, amelyre

$$(2.47)\quad \pi_{j_0 it} = \bar{\pi}_{\cdot it} = \max \{\pi_{1it}, \ldots, \pi_{i-1,i,t}, \pi_{i+1,i,t}, \ldots, \pi_{nit}\}$$

teljesül, más szóval a j_0-adik szektor i-termékre vonatkozó anyagkeretárnyékára a legnagyobb a t-edik időszakban, akkor

$$(2.48)\quad p^*_{iit} = \begin{cases} Q_{it}, & \text{ha} \quad \bar{\pi}_{\cdot it} < \pi_{iit} \\ R_{it}, & \text{ha} \quad \bar{\pi}_{\cdot it} \geqq \pi_{iit} \end{cases}$$

és

$$(2.49)\qquad p^*_{j_0it} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \bar{\pi}_{\cdot it} < \pi_{iit} \\ R_{it} - Q_{it} & \text{ha} \quad \bar{\pi}_{\cdot it} \geqq \pi_{iit} \end{cases}$$

$$(2.50)\qquad p^*_{jit} = 0, \quad \text{ha} \quad j \neq j_0, \quad j \neq i, \quad 1 \leqq j \leqq n.$$

(2.46) egy megoldása pedig az alábbi: ha i_0 jelöli azt a (legkisebb) indexet, amelyre

$$(2.51)\qquad \omega_{i_0t} = \bar{\omega}_{\cdot t} = \max\{\omega_{1t}, \ldots, \omega_{nt}\}$$

teljesül, más szóval az i_0-adik szektor munkaerőkeret-árnyékára a legnagyobb a t-edik időszakban, akkor

$$(2.52)\qquad w^*_{it} = \begin{cases} W_t, & \text{ha} \quad i = i_0 \\ 0 & \text{ha} \quad i \neq i_0, \quad 1 \leqq i \leqq n. \end{cases}$$

Az így nyert megoldásokhoz tartozó maximális célfüggvények összege, tehát a (2.44) alatti lineáris programozás maximális célfüggvényértéke a következő:

$$(2.53)\qquad \sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[(\bar{\pi}_{\cdot it} - \pi_{iit})^+ \cdot (R_{it} - Q_{it}) - \pi_{ii} Q_{it} \right] + \bar{\omega}_{\cdot t} W_t \right\}.$$

(Itt és a továbbiakban is tetszőleges α valós számnál $\alpha^+ = \max\{\alpha, 0\}$.)

A fentiek előrebocsátása után rátérünk a konkrét modell: a hosszúlejáratú makroökonómiai tervezési feladat 1. részben adott iteratív módszerrel való megoldásának leírására. Az alábbi pontban a számítások részletes menetét adjuk meg abban a formában, ahogyan azt számítógépekre lehet programozni.

2.2 A δ-optimális programot szolgáltató iteráció menete

Az iteráció kezdete előtt

A KÖZPONTI MEMÓRIÁBAN TÁROLT ADATOK

(2.54)
- δ ... a közelítés választott pozitív hibakorlátja
- n ... a szektorok száma
- T ... az időszakok száma
- Q_{it} ... az i-edik termék extern fogyasztása a t-edik időszakban; $i = 1, \ldots, n$; $t = 1, \ldots, T$
- R_{it} ... az i-edik termék extern korlátja a t-edik időszakban; $i = 1, \ldots, n$; $t = 1, \ldots, T$
- W_t ... a t-edik időszakban rendelkezésre álló munkaerőkeret; $t = 1, \ldots, T$.

AZ i-EDIK SZEKTORMEMÓRIÁBAN TÁROLT ADATOK $(i = 1, \ldots, n)$

(2.55) $\left.\begin{array}{ll} \mathbf{A}_i \ldots & \text{a szektorprogramozás mátrixa} \\ \mathbf{b}_i^{\circ} \ldots & \text{a speciális szektorfeltételek} \\ & \text{korlátjaiból álló vektor} \\ \mathbf{c}_i' \ldots & \text{a szektor-tevékenységek} \\ & \text{devizahozamaiból álló vektor} \end{array}\right\}$ az i-edik szektorprogramozás mellékelt kanonikus elrendezéséből leolvasható konstansok

*

1. SZAKASZ

I. lépés (központ). Tetszőleges[18] (p_{ijt}, w_{it}) megengedett központi program kiválasztása. Megfelel például az alábbi:

$$(2.56)\quad \left\{\begin{array}{l} p_{iit}^{(1)} = R_{it} \\[2ex] p_{1it}^{(1)} = \ldots = p_{i-1,i,t}^{(1)} = p_{i+1,i,t}^{(1)} = \ldots = p_{nit}^{(1)} = \dfrac{R_{it} - Q_{it}}{n-1} \\[2ex] w_{it}^{(1)} = \dfrac{W_t}{n} \end{array}\right\} \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n \\ t = 1, \ldots, T. \end{array}$$

Memóriában: (2.54) és (2.56).

II. lépés (központ). Az 1. szakaszban definíciószerűen

$$(2.57)\quad \left\{\begin{array}{ll} p_{ijt}^{*}\langle 1\rangle = p_{ijt}^{(1)}, & j = 1, \ldots, n \\ w_{it}^{*}\langle 1\rangle\, w_{it}^{(1)} & \end{array}\right\} \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n \\ t = 1, \ldots, T. \end{array}$$

Az i-edik szektornak $(i = 1, \ldots, n)$ leküldi a

$$(2.58)\quad \left\{\begin{array}{ll} p_{ijt}^{*}\langle 1\rangle, & j = 1, \ldots, n \\ w_{it}^{*}\langle 1\rangle & \end{array}\right\} t = 1, \ldots, T$$

központi tervszámokat. Memóriában: (2.54) és (2.56) [=(2.57)].

III. lépés (szektorok). Az i-edik szektor $(i = 1, \ldots, n)$ kitölti a (2.58) adatokkal standard elrendezésének megfelelő rovatait és szimplex-eljárással megoldja a duális szektorfeladatot. Ennek során meghatározza a (2.58) adatok melletti optimális

$$(2.59)\quad \pi_{i1t}^{(1)}, \ldots, \pi_{int}^{(1)}, \omega_{it}^{(1)}, \qquad t = 1, \ldots, T$$

$$(2.60)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varrho_{it}^{(1)}, & t = 1, \ldots, T \\ \sigma_{is}^{(1)}, & s = 1, \ldots, m_i \end{array}\right.$$

árnyékárakat, a duális célfüggvény minimális értékét, a

$$(2.61)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi_i^{(1)} = \\[1ex] = \displaystyle\sum_{t=1}^{T} \left(R_{it}\varrho_{it}^{(1)} - p_{iit}^{*}\langle 1\rangle \pi_{iit}^{(1)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} p_{ijt}^{*}\langle 1\rangle \pi_{ijt}^{(1)} + w_{it}^{*}\langle 1\rangle \omega_{it}^{(1)}\right) + \sum_{s=1}^{m_i} b_{is}\sigma_{is}^{(1)} \end{array}\right\}$$

[18] Mivel itt a megengedett központi programok halmaza korlátos, $\mathbf{U}^{\triangle} = \mathrm{U}$. (Vö.: (1.36)).

szektoroptimumot, továbbá ennek „speciális komponensét", a

(2.62) $$\Phi_i^{\circ\,(1)} = \sum_{t=1}^{T} R_{it}\,\varrho_{it}^{(1)} + \sum_{s=1}^{m_i} b_{is}\,\sigma_{is}^{(1)}$$

mennyiséget. A (2.59), (2.61) és (2.62) alatti mennyiségeket felküldi a központnak. Memóriában: (2.55), illetve a fenti számításnál használt szimplex-tábla, továbbá a kapott optimális bázis.

IV. lépés (központ). Az 1. szakaszbeli alsó optimum, azaz

(2.63) $$\varphi^*\langle 1\rangle = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(1)}$$

számítása után az 1. szakaszban definíciószerűen a „kevert" árnyékárak:

(2.64) $$\pi_{ijt}^*\langle 1\rangle = \pi_{ijt}^{(1)} \quad i, j = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, T;$$

(2.65) $$\omega_{it}^*\langle 1\rangle = \omega_{it}^{(1)} \quad i = 1, \ldots, n; \quad t = 1, \ldots, T;$$

továbbá a „kevert" speciális szektoroptimum-komponensek:

(2.66) $$\Phi_i^{\circ}\langle 1\rangle = \Phi_i^{\circ\,(1)} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Memóriában: (2.54), (2.57), továbbá (2.63), (2.64), (2.65) és (2.66).

* * *

2. SZAKASZ

I. lépés (központ).

I/1. Minden i-re és t-re ($i = 1, \ldots, n$; $t = 1, \ldots, T$) (2.64)-ből a $\pi_{1it}^*\langle 1\rangle, \ldots, \pi_{nit}^*\langle 1\rangle$ árnyékárak kiválasztása. A

(2.67) $$\pi_{j_0it}^*\langle 1\rangle = \bar{\pi}_{\cdot it}^*\langle 1\rangle = \max_{j\neq i} \pi_{jit}^*\langle 1\rangle$$

feltételnek eleget tevő (legkisebb) $j_0(\neq i)$ index kiválasztása. A

(2.68) $$p_{iit}^{(2)} = \begin{cases} Q_{it}, & \text{ha} \quad \bar{\pi}_{\cdot it}^*\langle 1\rangle < \pi_{iit}^*\langle 1\rangle \\ R_{it}, & \text{ha} \quad \bar{\pi}_{\cdot it}^*\langle 1\rangle \geqq \pi_{iit}^*\langle 1\rangle \end{cases}$$

(2.69) $$p_{j_0it}^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad \bar{\pi}_{\cdot it}^*\langle 1\rangle < \pi_{iit}^*\langle 1\rangle \\ R_{it} - Q_{it}, & \text{ha} \quad \bar{\pi}_{\cdot it}^*\langle 1\rangle \geqq \pi_{iit}^*\langle 1\rangle \end{cases}$$

(2.70) $$p_{jit}^{(2)} = 0, \quad \text{ha} \quad j \neq j_0, \quad j \neq i, \quad 1 \leqq j \leqq n$$

mennyiségek kiszámítása.

I/2. Minden t-re ($t = 1, \ldots, T$) (2.65)-ből az $\omega_{1t}^*\langle 1\rangle, \ldots, \omega_{nt}^*\langle 1\rangle$ árnyékárak kiválasztása. Az

(2.71) $$\omega_{i_0t}^*\langle 1\rangle = \bar{\omega}_{\cdot t}^*\langle 1\rangle = \max\{\omega_{1t}^*\langle 1\rangle, \ldots, \omega_{nt}^*\langle 1\rangle\}$$

feltételnek eleget tevő (legkisebb) i_0 index kiválasztása. A

$$(2.72)\qquad w_{it}^{(2)} = \begin{cases} W_t, & \text{ha } i = i_0 \\ 0, & \text{ha } i \neq i_0, \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

mennyiségek kiszámítása.

I/3. (2.67), (2.71) és (2.66) alapján a 2. szakaszbeli felső optimum kiszámítása:

$$(2.73)\qquad \begin{cases} \Phi^* \langle 2 \rangle = \\ = \sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{i=1}^{n} [(\bar{\pi}^*_{it} \langle 1 \rangle - \pi^*_{iit} \langle 1 \rangle)^+ \cdot (R_{it} - Q_{it}) - \pi^*_{iit} \langle 1 \rangle Q_{it}] + \bar{\omega}^*_t \langle 1 \rangle W_t \right\} + \\ + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^\circ \langle 1 \rangle . \end{cases}$$

I/4. Az eddigi legkisebb felső optimum kiszámítása: itt definíciószerűen

$$(2.74)\qquad \Phi^{**} \langle 2 \rangle = \Phi^* \langle 2 \rangle .$$

I/5. Kontroll: a (2.63) alatti alsó értékkel összehasonlítva a

$$(2.75)\qquad \varphi^* \langle 1 \rangle \leq \Phi^{**} \langle 2 \rangle$$

egyenlőtlenségnek kell fennállnia.

I/6 : 1. eset: $\Phi^{**}\langle 2 \rangle - \varphi^*\langle 1 \rangle \leq \delta$ esetén az iteráció leállítása. Utasítás a szektoroknak: a memóriájukban őrzött szimplex-tábla és optimális bázis felhasználásával számítsák ki a (2.59)—(2.60) alatti duál optimális változóknak megfelelő primál optimális szektorprogramokat.[19] Ezek együttese a feladat δ-optimális megoldása.

I/6 : 2. eset: $\Phi^{**}\langle 2 \rangle - \varphi^*\langle 1 \rangle > \delta$ esetén következik a II. lépés. Memóriában: (2.54), (2.57), (2.63), (2.64), (2.65), (2.66), (2.68), (2.69), (2.70), (2.72) és (2.74).

II. lépés (központ). A „kevert" központi program elkészítése:

$$(2.76)\qquad \left.\begin{matrix} p^*_{ijt} \langle 2 \rangle = \frac{1}{2} p^*_{ijt} \langle 1 \rangle + \frac{1}{2} p^{(2)}_{ijt} \quad j = 1, \ldots, n \\ \\ w^*_{it} \langle 2 \rangle = \frac{1}{2} w^*_{it} \langle 1 \rangle + \frac{1}{2} w^{(2)}_{it} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} i = 1, \ldots, n \\ \\ t = 1, \ldots, T. \end{matrix}$$

Az i-edik szektornak ($i = 1, \ldots, n$) a

$$(2.77)\qquad \left.\begin{matrix} p^*_{ijt}\langle 2 \rangle \quad j = 1, \ldots, n \\ w^*_{it} \langle 2 \rangle \end{matrix}\right\} t = 1, \ldots, T$$

[19] A szimplex-tábla „z-rovatából" a kitöltő változóknak megfelelő helyeken az optimális szektorprogram komponensei megtalálhatók. Lásd pl. S. KARLIN [9], 169—170. oldalak.

központi tervszámok leküldése. Memóriában: (2.54), (2.63), (2.64), (2.65), (2.74) és (2.76).

III. lépés (szektorok). Az i-edik szektor ($i = 1, \ldots, n$) módosítja a (2.77) alatti új tervszámokkal szimplex-tábláját, esetleg szükséges vektorcserékkel[20] előállítja az új optimális bázist és az új optimális

$$\pi_{i1t}^{(2)}, \ldots, \pi_{int}^{(2)}, \omega_{it}^{(2)}, \; t = 1, \ldots, T \tag{2.78}$$

$$\begin{Bmatrix} \varrho_{it}^{(2)} & t = 1, \ldots, T \\ \sigma_{is}^{(2)} & s = 1, \ldots, m_i \end{Bmatrix} \tag{2.79}$$

árnyékárakat, az új

$$\begin{Bmatrix} \varphi_i^{(2)} = \\ = \sum_{t=1}^{T} \left(R_{it} \varrho_{it}^{(2)} - p_{iit}^* \langle 2 \rangle \pi_{iit}^{(2)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} p_{ijt}^* \langle 2 \rangle \pi_{ijt}^{(2)} + w_{it}^* \langle 2 \rangle \omega_{it}^{(2)} \right) + \sum_{s=1}^{m_i} b_{is} \sigma_{is}^{(2)} \end{Bmatrix} \tag{2.80}$$

szektoroptimumot és az új

$$\Phi_i^{\circ(2)} = \sum_{t=1}^{T} R_{it} \varrho_{it}^{(2)} + \sum_{s=1}^{m_i} b_{is} \sigma_{is}^{(2)} \tag{2.81}$$

speciális szektoroptimum-komponenst. A (2.78), (2.80) és (2.81) alatti mennyiségeket felküldi a központnak. Memóriában: (2.55), továbbá a fent használt szimplex-tábla és optimális bázis.

IV. lépés (központ).

IV/1. A 2. szakaszbeli alsó optimum,

$$\varphi^* \langle 2 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(2)} \tag{2.82}$$

kiszámítása.

IV/2. Kontroll: a (2.74) alatti minimális felső értékkel összehasonlítva a

$$\varphi^* \langle 2 \rangle \leqq \Phi^{**} \langle 2 \rangle \tag{2.83}$$

egyenlőtlenségnek kell fennállnia.

IV/3 : 1. eset: $\Phi^{**}\langle 2 \rangle - \varphi^*\langle 2 \rangle \leqq \delta$ esetén az iteráció leállítása. Utasítás a szektoroknak: a memóriájukban őrzött szimplex-tábla és optimális bázis felhasználásával számítsák ki a (2.78)—(2.79) alatti duál optimális változóknak megfelelő primál optimális szektorprogramokat. Ezek együttese a feladat δ-optimális megoldása.

[20] Lásd pl. Y. SUZUKI [23], 95—96. oldalak.

IV/3 : 2. eset: $\Phi^{**}\langle 2\rangle - \varphi^*\langle 2\rangle > \delta$ esetén a

$$\pi^*_{ijt}\langle 2\rangle = \frac{1}{2}\pi^*_{ijt}\langle 1\rangle + \frac{1}{2}\pi^{(2)}_{ijt} \qquad i,j=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T \tag{2.84}$$

$$\omega^*_{it}\langle 2\rangle = \frac{1}{2}\omega^*_{it}\langle 1\rangle + \frac{1}{2}\omega^{(2)}_{it} \qquad i=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T \tag{2.85}$$

„kevert" árnyékárak és a

$$\Phi^\circ_i\langle 2\rangle = \frac{1}{2}\Phi^\circ_i\langle 1\rangle + \frac{1}{2}\Phi^{\circ(2)}_i \qquad i=1,\ldots,n \tag{2.86}$$

„kevert" speciális szektoroptimum-komponensek kiszámítása. Memóriában: (2.54), (2.74), (2.76), (2.82), (2.84), (2.85) és (2.86).

* * *

Tegyük fel, hogy az iterációt még nem állítottuk le az $(N-1)$-edik szakasz befejezéséig, tehát az iterációs szakaszok I/6, illetve IV/3 pontjában mindig a 2. eset állt fenn:

$$\Phi^{**}\langle k\rangle - \varphi^*\langle k-1\rangle > \delta \text{ és } \Phi^{**}\langle k\rangle - \varphi^*\langle k\rangle > \delta,\ k=2,\ldots,N-1. \tag{2.87}$$

Itt $\Phi^{**}\langle k\rangle$ a k-adik szakaszig elért minimális felső optimum:

$$\Phi^{**}\langle k\rangle = \min\{\Phi^*\langle 2\rangle,\ldots,\Phi^*\langle k\rangle\} \qquad k=2,3,\ldots \tag{2.88}$$

Az $(N-1)$-edik szakasz befejezése után

A KÖZPONTI MEMÓRIÁBAN TÁROLT ADATOK: (2.54), továbbá

$$\Phi^{**}\langle N-1\rangle \tag{2.89}$$

$$p^*_{ijt}\langle N-1\rangle \qquad i,j=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T \tag{2.90}$$

$$w^*_{it}\langle N-1\rangle \qquad i=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T \tag{2.91}$$

$$\varphi^*\langle N-1\rangle \tag{2.92}$$

$$\pi^*_{ijt}\langle N-1\rangle \qquad i,j=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T \tag{2.93}$$

$$\omega^*_{it}\langle N-1\rangle \qquad i=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T \tag{2.94}$$

$$\Phi^0_i\langle N-1\rangle \qquad i=1,\ldots,n. \tag{2.95}$$

AZ i-EDIK SZEKTOR MEMÓRIÁJÁBAN TÁROLT ADATOK ($i=1,\ldots,n$):

(2.55), továbbá az $(N-1)$-edik szakasz III. lépése során használt szimplex-tábla és optimális bázis.

N-EDIK SZAKASZ

I. lépés (központ).

I/1. Minden i-re és t-re ($i=1,\ldots,n$; $t=1,\ldots,T$) (2.93)-ból a $\pi^*_{1it}\langle N-1\rangle,\ldots,\pi^*_{nit}\langle N-1\rangle$ árnyékárak kiválasztása. A

$$\pi^*_{j_0it}\langle N-1\rangle = \bar{\pi}^*_{\cdot it}\langle N-1\rangle = \max_{j\neq i}\pi^*_{jit}\langle N-1\rangle \tag{2.96}$$

feltételnek eleget tevő (legkisebb) $j_0(\neq i)$ index kiválasztása. A

$$(2.97)\qquad p_{iit}^{(N)} = \begin{cases} Q_{it}, & \text{ha } \bar{\pi}^*_{\cdot it}\langle N-1\rangle < \pi^*_{iit}\langle N-1\rangle \\ R_{it}, & \text{ha } \bar{\pi}^*_{\cdot it}\langle N-1\rangle \geqq \pi^*_{iit}\langle N-1\rangle \end{cases}$$

$$(2.98)\qquad p_{j_0 it}^{(N)} = \begin{cases} 0, & \text{ha } \bar{\pi}^*_{\cdot it}\langle N-1\rangle < \pi^*_{iit}\langle N-1\rangle \\ R_{it} - Q_{it}, & \text{ha } \bar{\pi}^*_{\cdot it}\langle N-1\rangle \geqq \pi^*_{iit}\langle N-1\rangle \end{cases}$$

$$(2.99)\qquad p_{jit}^{(N)} = 0, \quad \text{ha} \quad j \neq j_0, \quad j \neq i, \quad l \leqq j \leqq n$$

mennyiségek kiszámítása.

I/2. Minden t-re $(t=1, \ldots, T)$ (2.94)-ből az $\omega^*_{1t}\langle N-1\rangle, \ldots, \omega^*_{nt}\langle N-1\rangle$ árnyékárak kiválasztása. Az

$$(2.100)\qquad \omega^*_{i_0 t}\langle N-1\rangle = \bar{\omega}^*_{\cdot t}\langle N-1\rangle = \max_i \omega^*_{it}\langle N-1\rangle$$

feltételnek eleget tevő (legkisebb) i_0 index kiválasztása. A

$$(2.101)\qquad w_{it}^{(N)} = \begin{cases} W_t, & \text{ha } i = i_0 \\ 0, & \text{ha } i \neq i_0, \quad 1 \leqq i \leqq n \end{cases}$$

mennyiségek kiszámítása.

I/3. (2.96), (2.100) és (2.95) alapján az N-edik szakaszbeli felső optimum kiszámítása:

$$(2.102)\qquad \begin{cases} \Phi^*\langle N\rangle = \\ = \sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{i=1}^{n} [(\bar{\pi}^*_{\cdot it}\langle N-1\rangle - \pi^*_{iit}\langle N-1\rangle)^+ \cdot (R_{it} - Q_{it}) - \right. \\ \left. - \pi^*_{\cdot it}\langle N-1\rangle Q_{it}] + \bar{\omega}^*_{\cdot t}\langle N-1\rangle W_t \right\} + \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^\circ\langle N-1\rangle . \end{cases}$$

I/4. Az eddigi legkisebb felső optimum számítása:

$$(2.103)\qquad \Phi^{**}\langle N\rangle = \min\{\Phi^{**}\langle N-1\rangle, \Phi^*\langle N\rangle\}.$$

I/5. Kontroll: A (2.92) alatti alsó értékkel összehasonlítva a

$$(2.104)\qquad \varphi^*\langle N-1\rangle \leqq \Phi^{**}\langle N\rangle$$

egyenlőtlenségnek kell fennálnia.

I/6 : 1. eset: $\Phi^{**}\langle N\rangle - \varphi^*\langle N-1\rangle \leqq \delta$ esetén az iteráció leállítása. Utasítás a szektoroknak: a memóriájukban őrzött szimplex-tábla és optimális bázis felhasználásával számítsák ki az előzőleg kapott duál optimális változóknak megfelelő primál optimális szektorprogramokat. Ezek együttese a feladat δ-optimális megoldása.

I/6 : 2. eset: $\Phi^{**}\langle N\rangle - \varphi^*\langle N-1\rangle > \delta$ esetén következik a II. lépés. Memóriában: (2.54), (2.90), (2.91), (2.92), (2.93), (2.94), (2.97), (2.98), (2.99), (2.101) és (2.103).

II. lépés (központ). A „kevert" központi program elkészítése:

$$(2.105)\quad \left\{\begin{array}{ll} p^*_{ijt}\langle N\rangle = \dfrac{N-1}{N}\, p^*_{ijt}\langle N-1\rangle + \dfrac{1}{N}\, p^{(N)}_{ijt}\ j=1,\dots,n & i=1,\dots,n \\ w^*_{it}\langle N\rangle = \dfrac{N-1}{N}\, w^*_{it}\langle N-1\rangle + \dfrac{1}{N}\, w^{(N)}_{it} & t=1,\dots,T. \end{array}\right.$$

Az i-edik szektornak ($i = 1, \dots, n$) a

$$(2.106)\quad \left.\begin{array}{ll} p^*_{ijt}\langle N\rangle & j=1,\dots,T \\ w^*_{it}\langle N\rangle & \end{array}\right\}\ t=1,\dots,T$$

központi tervszámok leküldése. Memóriában: (2.54), (2.92), (2.93), (2.94), (2.103) és (2.105).

III. lépés (szektorok). Az i-edik szektor ($i = 1, \dots, n$) módosítja a (2.106) alatti új tervszámokkal szimplex-tábláját, esetleg szükséges vektorcserékkel előállítja az új optimális bázist és az új optimális

$$(2.107)\quad \pi^{(N)}_{i1t}, \dots, \pi^{(N)}_{int}, \omega^{(N)}_{it} \qquad t=1,\dots,T$$

$$(2.108)\quad \left\{\begin{array}{ll} \varrho^{(N)}_{it} & t=1,\dots,T \\ \sigma^{(N)}_{is} & s=1,\dots,m_i \end{array}\right.$$

árnyékárakat, az új

$$(2.109)\quad \begin{array}{l} \varphi^{(N)}_i = \displaystyle\sum_{t=1}^{T} \Bigg(R_{it}\,\varrho^{(N)}_{it} - p^*_{iit}\langle N\rangle\, \pi^{(N)}_{iit} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} p^*_{ijt}\langle N\rangle\, \pi^{(N)}_{ijt} + \\ \qquad\qquad + w^*_{it}\langle N\rangle\, \omega^{(N)}_{it} \Bigg) + \displaystyle\sum_{s=1}^{m_i} b_{is}\,\sigma^{(N)}_{is}, \end{array}$$

szektoroptimumot és az új

$$(2.110)\quad \Phi^{\circ\,(N)}_i = \sum_{t=1}^{T} R_{it}\,\varrho^{(N)}_{it} + \sum_{s=1}^{m_i} b_{is}\,\sigma^{(N)}_{is}$$

speciális szektoroptimum-komponenst. A (2.107), (2.109) és (2.110) alatti értékeket felküldi a központnak. Memóriában: (2.55), továbbá a fenti számításban használt szimplex-tábla és optimális bázis.

IV. lépés (központ).

IV/1. Az N-edik szakaszbeli alsó optimum,

$$(2.111)\quad \varphi^*\langle N\rangle = \sum_{i=1}^{n} \varphi^{(N)}_i$$

kiszámítása.

IV/2. Kontroll: a (2.103) alatti minimális felső optimummal összehasonlítva a

$$(2.112)\quad \varphi^*\langle N\rangle \leq \Phi^{**}\langle N\rangle$$

egyenlőtlenségnek kell fennállnia.

IV/3 : 1. eset. $\Phi^{**}\langle N\rangle - \varphi^{*}\langle N\rangle \leq \delta$ esetén az iteráció leállítása. Utasítás a szektoroknak: a memóriájukban őrzött szimplex-tábla és optimális bázis felhasználásával számítsák ki a (2.107)—(2.108) alatti duál optimális változóknak megfelelő primál optimális szektorprogramokat. Ezek együttese a feladat δ-optimális megoldása.

IV/3 : 2. eset: $\Phi^{**}\langle N\rangle - \varphi^{*}\langle N\rangle > \delta$ esetén a

$$\pi^{*}_{ijt}\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\pi^{*}_{ijt}\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\pi^{(N)}_{ijt} \quad i,j=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T \tag{2.113}$$

$$\omega^{*}_{it}\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\omega^{*}_{it}\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\omega^{(N)}_{it} \quad i=1,\ldots,n;\ t=1,\ldots,T \tag{2.114}$$

,,kevert'' árnyékárak és a

$$\Phi^{\circ}_{i}\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\Phi^{\circ}_{i}\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\Phi^{\circ\,(N)}_{i} \qquad i=1,\ldots,n \tag{2.115}$$

,,kevert'' speciális szektoroptimum-komponensek kiszámítása.

Memóriában: (2.54), (2.103), (2.105), (2.111), (2.113), (2.114) és (2.115).

Ezután következik az $(N+1)$-edik szakasz, és így tovább.

2.3. A modell és a számítási eljárás közgazdasági tartalmáról

Az alábbiakban közgazdasági szempontból kommentáljuk modellünket. Egyrészt megkíséreljük közgazdaságilag interpretálni a modell néhány vonását, tulajdonságát. Másrészt felvetünk néhány problémát, amely a modellben szereplő paraméterek meghatározásával kapcsolatos.

1. Mint a bevezetésben már említettük, a kétszintű tervezés fenti módszerének kidolgozására a szocialista gazdasági gyakorlatban ténylegesen fennálló *oda-visszatervezés* adta az alapötletet. Eljárásunk még egy szempontból imitálja a tervezés szokásos gyakorlatát. Rendszeresen megtörténik, hogy a központ bizonyos direktívákat ad az ágazatoknak és kéri annak közlését: milyen gazdasági hatékonysággal oldható meg a feladat. Az ágazatok különböző — központilag előírt szerkezetű — ,,gazdaságossági mutatószámokkal'' fejezik ki tevékenységük hatékonyságát. Módszerünk egységes rendszerbe foglalja ezt a ,,visszajelentést'': az ágazatok az eljárás minden lépésében egyfajta gazdaságossági mutatószámokat — a programozásból nyert árnyékárakat — jelentenek vissza a központnak az onnét kapott direktívák értékelésére. Ugyanakkor egyes iparágakban már matematikai programozási módszereket is használnak az ágazati méretű tervek kidolgozásához. E programozási modellekben a korlátozó feltételek jobboldalán levő konstansként szerepelnek egyes, az Országos Tervhivataltól kapott direktívák: a kibocsátási tervfeladat, erőforrás-korlátok stb. E programozások valósággal sugallják a gondolatot: az ágazati programozások eredményeit érdemes lenne összehasonlítani és felhasználni a népgazdasági tervből átvett direktívák, keretszámok javítására. Eljárásunk hivatása: szervezett formát adni az ilyen összehasonlításoknak és az ezek alapján történő mikroökonómiai tervkorrekcióknak; szervesen összekapcsolni az iparági szinten végzett programozásokat.

2. Mit fejez ki közgazdaságilag a szektormodellek duális feladatának célfüggvénye? Tegyük fel egy pillanatra a következőket: a központ valóban olyan ,,áron" adja a szektornak az erőforrásokat, amilyen árnyékárat a szektor visszajelent s ugyanakkor megköveteli a szektortól, hogy ne legyen veszteséges. Ha a szektor túl magas, ,,rózsaszínű" árnyékárat jelentett vissza (például azt állította, hogy a létszámkeret emelése nagyobb többlet-hozamot biztosít, mint amennyire az optimális program szerint valóban képes), akkor a szektor veszteségessé válna. A korlátok árnyékárakra történő értékelésének minimalizálása, mint a modell optimalizálási követelménye, azt fejezi ki: óvakodni kell a szektor feltételekben korlátként szereplő központi direktívák módosításának, a módosítás révén a célfüggvényben mutatkozó hatásnak a *túlértékelésétől.* A duális célfüggvény minimalizálása az óvatosság, a felelősségteljes mértéktartás attitüdjét fejezi ki a visszajelentés keretében adott gazdaságossági mutatószámok meghatározásánál.

3. Figyelemreméltó, hogy közgazdaságilag reálisan interpretálható a modell *játékelméleti* jellege is. A helyzet ugyanis eredetileg is mutat bizonyos analógiát a stratégiás játékokkal. Mindkét fél rendelkezik bizonyos információkkal, de nem hozhat egymaga teljesen megnyugtató döntést, mert ehhez ismernie kellene a másik fél információit is. A központnak nagy az áttekintése, de nincs részletekbe menő ismerete azokról a sajátos problémákról (például az egyes szektorokra jellemző műszaki és költségadatokról, a szektorbeli választást korlátozó speciális feltételekről stb.), amelyeket a szektorok összessége ismer, s megfordítva: a szektorok sok részletet látnak, de nincs áttekintésük azokról a nagy összefüggésekről, amelyek csak a központ előtt lehetnek világosak. Akárcsak a stratégiás játékban, a kialakuló szituáció mindkét félen múlik. Mind a központ, mind a szektorok tisztában vannak azzal, hogy a másik ,,fél" intézkedései is nagy hatást gyakorolnak a helyzetre. Ilyen körülmények között mindkét fél a számára viszonylag leginkább megnyugtató stratégiát keresi. Ez a stratégia a játék minimax-megoldása.

Modellünkben a játékelméleti megoldásként alkalmazott minimax-stratégia elfogadása a következőket jelenti: Tegyük fel, hogy a központ ,,mindenttudó"; rendelkezik mindazokkal a speciális részlet információkkal is, amelyeket rendszerint csak a szektorok ismernek pontosan. Ebben az esetben (eszményi számítástechnikai lehetőségek mellett) egymaga, központilag kidolgozhatná az optimális népgazdasági programot (az optimális TKI programot). Az így meghatározott programhoz meghatározott célfüggvényérték, optimális népgazdasági hozam (TKI optimum) tartozik.

Ha azonban a központ (modellünkben csakúgy, mint a valóságban) hiányos információ miatt képtelen egymaga, a szektorok közreműködése nélkül meghatározni az optimális népgazdasági programot, akkor a népgazdasági hozam kevesebb az optimálisnál. A szektoroktól ,,függetlenül" hozott döntés következtében tehát relatív veszteség lép fel; a központ a veszteség csökkentésére törekszik.

A másik oldalon: a szektorok képtelenek önmaguk, a központ irányító, összehangoló tevékenysége nélkül eljutni az optimális népgazdasági programhoz. A központtól ,,függetlenül" hozott döntés esetén szükségképpen hibás értékelést adnak a nekik juttatott erőforrásokról, keretekről. Tegyük fel ismét egy pillanatra (mint már korábban a duális célfüggvény értelmezésekor feltételeztük), hogy a szektorokkal ,,büntetésképpen" megfizettetik a nekik juttatott erőforrások, keretek túlértékeléséből származó többletet. A hibás értékelés, azaz a hibás árnyékrendszer ilyen körülmények között súlyos veszteséget jelentene a szektoroknak. A szektorok ezesetben nyilván arra törekszenek, hogy ez a veszteség minél kisebb legyen.

Amint látjuk, mindkét oldalon egyfajta relatív veszteség csökkentésére törekszenek: a központ arra, hogy minél kevésbé maradjon el az optimális népgazdasági hozamtól, a szektorok pedig arra, hogy minél kevésbé lépjék túl az optimális értékeléseket. A minimax megoldáshoz akkor jutnak el, ha mindkét félnek sikerült ezt a relatív veszteséget kiküszöbölnie.

4. A cikkünkben szereplő 3. tételnek megfelelően a konkrét modellben az árnyékárak meghatározott *egalizálódási tendenciája* lép fel. Először: egalizálódik ugyanazon termék azonos időszakra vonatkozó ,,keresleti'' árnyékára a különböző szektoroknál, valamint a termék ,,keresleti'' és ,,kínálati'' árnyékára is (tehát a $\pi_{1it}, \ldots, \pi_{i-1,i,t}, \pi_{i+1,i,t}, \ldots, \pi_{nit}$ és a π_{iit} árnyékárak). Másodszor: egalizálódik a különböző szektoroknak ugyanazon időszakban juttatott munkaerőkeret árnyékára (tehát az $\omega_{1t}, \ldots, \omega_{nt}$ árnyékárak).

Ez a tendencia teljesen megfelel a ,,welfare-economics'' ismert optimumfeltételének, amely szerint azonos erőforrás marginális hozadékának felhasználása különböző területein egyenlőnek kell lennie.[21]

Az egalizálódási tendencia az azonos időszakra vonatkozó árnyékárakra érvényesül. Érdemes lesz tanulmányozni az egymást követő időszakok árnyékárainak arányait is, mert ezekből meghatározható a termékenként különböző és időszakról-időszakra változó ,,diszkontráták'' együttese.

Hasznos lesz tanulmányozni az egalizálódás folyamatát, az árnyékárrendszerhullámzását az iteráció során. E megfigyelés sok mindent feltárhat a népgazdasági terv biztosabb, más tervelőirányzattól viszonylag függetlenebb, s a más tervelőirányzatoktól erősebben függő részeire vonatkozóan.

5. Mint említettük, modellünk gazdaságpolitikai adatait a ,,hagyományos módon'' kidolgozott eredeti tervből vesszük át. Ezen túlmenően, ezt az eredeti tervet választhatjuk az iteráció kiinduló programjaként. Az iteráció első lépéseiből kitűnik majd, hogy az eredeti terv *reális-e?* Amennyiben a szektorprogramokban megjelennek fiktív (nem reális szabad import) változók is, úgy az eredeti terv nem volt egyensúlyban — s a ,,kétszintű tervezés'' további lépései hozzák egyensúlyba. Amennyiben azonban a kétszintű tervezés során a későbbi lépésekben nem sikerül a fiktív változókat kiküszöbölni, úgy ez arra figyelmeztet: a gazdaságpolitikai adatokban ellentmondás van.

A ,,kétszintű tervezés'' ilymódon módot ad az eredeti terv kritikus felülvizsgálatára, esetleges ellentmondásainak felismerésére, kijavítására. Ahogy közeledünk a központi direktívák árnyékárainak egalizálódásához (tehát pl. a Q_{it} extern fogyasztás TKI árnyékárainak megközelítően pontos ismeretéhez) úgy nyerünk további információkat az eredeti tervből átvett gazdaságpolitikai adatok kritikai értékeléséhez. (Pl. annak eldöntéséhez, nem lenne-e célszerű az extern fogyasztás más szerkezetéből kiindulni.)

6. Egy másik súlyos probléma, amelyet szintén csak megemlíthetünk: a társadalom *időbeli preferenciái*nak kifejezésre juttatása a modellben. Ezt részben megkerüljük azzal, hogy minden időszakra előírjuk az extern fogyasztást (természetesen úgy, hogy az időszakról-időszakra növekedjék, a szerkezetében a szükséges módon változzék). Nem közömbös azonban, hogy a programozás eredményeképpen jelentkező többlet-hozam mikor merül fel, korábban-e vagy

[21] Lásd erről pl. P. A. SAMUELSON [22] és A. P. LERNER [16] művét.

későbben. Célszerű lehet tehát nem egyszerűen az összes hozamok összegét maximalizálni az egész tervperiódusra, hanem azok valamilyen diszkontált összegét.

A másik nehéz kérdés *a tervperiódus véges voltá*val függ össze. Modellünk fent leírt szerkezete azzal a veszéllyel járhat, hogy csupán olyan beruházásokat irányoz majd elő a program, amelyek hozama még a tervperiódusban jelentkezik, s nem biztosítjuk az átmenetet a tervperiódus utáni időszakra. A kérdést ebből a szempontból csak a végtelen időszakra vonatkozó tervezés oldaná meg, amelyre azonban más meggondolások — főképpen a numerikus adatmeghatározással kapcsolatos nehézségek — miatt egyelőre nem akartunk rátérni. Éppen ezért, megközelítésként, úgy is mondhatnánk: kompromisszumként, a következő megoldást választottuk:

Az extern fogyasztás, Q_{it}, szükségletei közé bevesszük az úgynevezett „átmenő beruházások", a tervperiódus utáni időre áthúzódó beruházási tevékenységek igényeit is. Az erre vonatkozó becsléseket, más támpont híján, ugyancsak az eredeti tervből vesszük át. Tisztában vagyunk e megoldás problematikus vonásaival, s ezért a kérdést tovább vizsgáljuk.

7. Konkrét modellünk egyik legproblematikusabb vonása: a *célfüggvény* közgazdasági tartalma. Inkább csak példaképpen szerepel az itteni leírásban a külkereskedelmi mérleg optimalizálása mint optimum-kritérium. A problémáról tartott magyarországi vitákban felmerültek más elgondolások is. Pl. az összmunkaráfordítás minimalizálása. Vagy: az adott szerkezetű extern fogyasztás maximalizálása.[22] Mindkét esetben a kereskedelmi mérleggel kapcsolatos gazdaságpolitikai előirányzatokat a feltételi rendszerbe kell beépíteni.

Cikkünkben nem kívánunk ebben a kérdésben határozottan állást foglalni; ez még sokoldalú elméleti és gyakorlati vizsgálatot igényel. Mindenesetre az első, kísérleti számításoknál célszerű lesz párhuzamosan többféle célfüggvénnyel számolni, s az eredményeket együttesen elemezni.

Befejezés

Mint az 1.3 szakaszban már említettük, e dolgozat keretében nem foglalkoztunk azzal a kérdéssel, hogyan lehet alkalmazni az általános modellben kidolgozott felbontási és iteratív megoldási algoritmust általános lineáris programozási feladatokra. Evvel a kérdéssel LIPTÁK T. sajtó alatt levő [18] dolgozata foglalkozik. Ugyanitt található a módszer általánosítása nemlineáris esetekre is.

Világos, hogy ha valamilyen konkrét modell adott felbontása megfelel az 1. részben szereplő feltételezéseknek, tehát az eredeti lineáris programozási feladat megoldható, a belőle származó poliedrikus játék pedig reguláris, minden további nélkül alkalmazhatóvá válik az eljárás. Ez a helyzet például akkor, ha az eredeti feladat (1.1) alakú kanonikus formájában az $\mathbf{A}$ mátrix és a $\mathbf{b}$ vektor nemnegatívak. Tetszőleges felbontás után az összes értékelhető központi programok halmaza egy pozitív ortánsban fekvő korlátos halmaz,

[22] Ezt a célfüggvénytípust javasolja [10] könyvében L. V. KANTOROVICS. Ha a q_{it} arányok fejezik ki az extern fogyasztás szerkezetét a t időszakaszban ($q_{it} \geqq 0$, $i = 1, \dots, n$; $q_{1t} + \dots + q_{nt} = 1$; $t = 1, \dots, T$), akkor konkrét modellünk TKI alakját, majd ennek megfelelően a többi alakot is úgy kellene módosítani, hogy (2.12)-ben Q_{it} helyett $q_{it} J_t$ szerepelne ($i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T$), (2.17) helyett pedig $\lambda_1 J_1 + \dots + \lambda_T J_T \to \max$! ahol λ_t alkalmas diszkontáló tényező ($t = 1, \dots, T$).

a keletkező poliedrikus játék tehát reguláris. A központi programozás (2.46) alakú független részprogramozásokra esik szét, amelyek mind (a maximális szektorárnyékár kiválasztásával) triviálisan megoldhatók. Lényegében ezt az észrevételt használták fel a [19] dolgozatban, amelyben az általános iteratív eljárást a magyar pamutszövet-kivitel rövidlejáratú optimumszámítására alkalmazták. Hasonló alkalmazási területként kínálkozik a regionális tervezés problémája: itt a szektoroknak egy-egy földrajzi régió felelne meg.[23]

Befejezésül röviden összefoglaljuk a kétszintű tervezés módszerével kapcsolatos kutatásaink további irányait:

1. Matematikai, számítástechnikai vonatkozású kutatásaink elsősorban annak tisztázására irányulnak: hogyan lehetne a „kétszintű tervezés" során a konvergenciát gyorsítani. Ezzel kapcsolatban numerikus kísérleteket végzünk. Külön tanulmányozásra szorul, vajon a konkrét modell esetében nem használhatók-e fel a konvergencia gyorsítására egyébként rendelkezésre álló közgazdasági információk.

2. A numerikus kísérletek közben megkezdődött a konkrét modell gyakorlati alkalmazásának előkészítése. Az Országos Tervhivatal ezt a módszert is fel akarja használni a távlati makroökonómiai tervek jobb megalapozására. Természetesen hangsúlyozni kell, hogy e számítások ma még csak kísérleti jellegűek; a tudományos kutatás stádiumában vannak, s csak fokozatosan válhatnak a tervezés állandóan alkalmazott eszközeivé.

Bízunk abban, hogy a számítástechnikai problémák megoldása után a módszer széles körben kerülhet alkalmazásra.

(Beérkezett: 1963. II. 27.)

IRODALOM

[1] Brown, G. W.: „Some notes on computation of games solutions". *RAND Corporation* D-436, 1949.

[2] Brown, G. W.: „Iterative solution of games by fictitious play". Lásd: [11], 374—376.

[3] Dantzig, G. B. and Wolfe, Ph.: „Decomposition principle for linear programs". *Operations Research* **8** (1960) 101—111.

[4] Dantzig, G. B. and Wolfe, Ph: „The decomposition algorithm for linear programs". *Econometrica* **29** (1961) 767—778.

[5] Frisch, R.: *A survey of types of economic forecasting and programming, and a brief description of the Oslo Channel Model.* Memorandum from the Institute of Economics, University of Oslo, 1961.

[6] Gerő M.: „Az 1965. évi sakktáblamérleg". *Közgazdasági Szemle* **8** (1960) 1156—1168.

[7] Goldman, A. J.: „Resolution and separation theorems for polyhedral convex sets". Lásd: [15], 41—51.

[8] Goldman, A. J. and Tucker, A. W.: „Theory of linear programming". Lásd: [15], 53—97.

[9] Karlin, S.: *Mathematical methods and theory in games, programming and economics. Vol. I.: Matrix games, programming, and mathematical economics.* Addison-Wesley, Reading (Mass. USA)—London, 1959.

[10] Канторович Л.В.: *Экономический расчёт наилушего использования ресурсов.* Издательство АН СССР, Москва, 1959.

[11] Koopmans, T. C. (editor): *Activity analysis of production and allocation.* Cowles Commission Monographs No. 13. Wiley-Chapman, New York—London, 1951.

[12] Kornai J.: *A beruházások matematikai programozása.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1962.

---

[23] Az É. M. Számítástechnikai és Ügyvitelgépesítési Vállalat munkájának keretében Lipták T. kidolgozott ilyen modellt, „Üzemtelepítéssel és termelési program kialakításával összekapcsolt szimultán szállítási probléma megoldása kétszintű programozással" címmel (kéziratban).

[13] KORNAI J. és LIPTÁK T.: *Kétszintű tervezés. Matematikai programozási módszer a népgazdasági terv javítására.* A MTA Számítástechnikai Központja, Budapest, 1962 (sokszorosított).

[14] KORNAI J.: „Kétszintű" tervezés (Matematikai módszer a népgazdasági terv javítására). *Közgazdasági Szemle* **9** (1962) 1429—1443.

[15] KUHN, H. W. and TUCKER, A. W. (editors): *Linear inequalities and related systems.* Annals of Mathematics Studies No. 38. Princeton (N. J. USA), 1956.

[16] LERNER, A. P.: *The economics of controll.* MacMillan, New-York, 1949.

[17] LIPTÁK T.: *Kétszintű tervezés (Módosított matematikai rész).* A MTA Számítástechnikai Központja, Budapest, 1962 (sokszorosított).

[18] LIPTÁK T.: „Two level programming." *Proceedings of the Colloquium on the Application of Mathematics in Economics* (Budapest, 18—22 june, 1963). Publishing House of the Hungarian Academy of sciences, Budapest, 1963. (sajtó alatt).

[19] LIPTÁK T. és NAGY A.: *A magyar pamutszövet-kivitel rövidlejáratú optimumszámításának modellje.* Hungarotex Textilkiviteli Vállalat—Magyar Kereskedelmi Kamara, Budapest, 1962 (sokszorosított).

[20] MCKINSEY, J. C. C.: *Introduction to the theory of games.* The RAND series, McGraw-Hill, New York—Toronto—London, 1952.

[21] ROBINSON, J.: „An iterative method of solving a game". *Annals of Mathematics* **54** (1951) 296—301.

[22] SAMUELSON, P. A.: *Foundations of economic analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1947.

[23] SUZUKI, Y.: „Note on linear programming". *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **10** (1959) 89—105.

[24] TRZECIAKOWSKI, W.: *The modell of optimization of foreign planned economy and its applications.* Warsawa, 1961 (sokszorosított).

[25] WOLFE, PH.: „Determinateness of polyhedral games". Lásd: [15] 195—198.

ПЛАНИРОВАНИЕ НА ДВУХ УРОВНЯХ: МОДЕЛЬ ИЗ ОБЛАСТИ ТЕОРИИ ИГР И ИТЕРАТИВНЫЙ РАСЧЕТНЫЙ МЕТОД К РЕШЕНИЮ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ЗАДАЧ НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ*

J. KORNAI и T. LIPTÁK

Резюме

С помощью хорошо известного алгоритма симплексного метода или выработанными до нынешнего времени способами разложения (DANTZIG и WOLFE [2], [3]) задачи линейного программирования в масштабе народного хозяйства, пригодные к решению проблем перспективного планирования, были неразрешимы, по крайней мере, в отечественных условиях. Исходя из этого мы разработали новый алгоритм для решения задач такого типа, обеспечивающий в конечных шагах решение с любой точностью.

В конкретной задаче планирования мы представляем народное хозяйство как совокупность некоторого количества секторов, каждый из которых несёт ответственность за производство того или другого продукта.

* Первый вариант метода, изложенного в данной работе, авторы сообщили в мае 1962 года, в размноженной форме [13]. Т. LIPTÁK в октябре 1962 г. сообщил новый вариант математической части [17]. Экономическим изложением и разбором занимается J. KORNAI [14]. Зачатки «общей модели» общей части расчётного метода находятся уже и в работе Т. LIPTÁK-а и А. NAGY-а, выходившей в свет в размноженной форме. Находящаяся в печати работа Т. LIPTÁK-а [18] обобщает данный метод планирования к разложению общих задач линейного программирования и к решению их путём фиктивного проигрывания, а также к задачам нелинейного характера. Эта работа была предложена на Коллоквии по Приложению Математики к Вопросам Экономии, Будапешт, 18—22, Юня, 1963. г.

Деятельность секторов охватывает не только производство и капиталовложение, но и возможный вывоз или ввоз данного продукта. Секторы в своей деятельности могут использовать и продукты других секторов в виде материальных расходов, а также известное количество рабочей силы. К тому же деятельность отдельных секторов может быть подчинена специальным секторным ограничениям по отношению производства и внешнеторгового баланса продуктов.

Деятельность секторов координируется центром. Центр задаёт для каждого сектора задачу снабжения относительно его продукта и обеспечивает для него некоторые ограниченные материальные ресурсы из продуктов, произведённых другими секторами, а также рабочую силу в известном количестве, то есть определяет рамки производства. Совокупность всех этих факторов составляет центральный план. Подходящие центральные условия обусловливают равновесие народнохозяйственного продуктового баланса в случае осуществимости центрального плана, а также заботятся о том, чтобы общее количество предоставляемой отдельным секторам рабочей силы не выходило за рамки полной мощности народного хозяйства.

Компоненты центрального плана, касающиеся одного сектора, в другом плане появляются как ограничения ресурсов в условиях той задачи линейного программирования, которая охватывает лищь деятельность данного сектора, в то время, как роль максимизируемой секторной целевой функции играет девизный доход его деятельности. На основе вышесказанного цель перспективного народнохозяйственного планирования сформулируется следующим образом: следует выработать такой осуществимый центральный план, при котором сумма максимальных целевых функций секторов принимает максимальную величину. Данная задача, в отличии от исходной *полной центральной информационной* задачи (в дальнейшем сокращённо задача ПЦИ), представляемой лишь в виде линейного программирования огромного размера, называется нами задачей на двух уровнях.

В двойственном варианте секторных задач множество допустимых систем оценок («shadow prices») не зависит от центральных директив: они появляются в максимизируемой целевой функции только коэффициентами оценок соответствующих условий. Можно определить игру двух лиц в нормальной форме, с нулевой суммой, в которой один из игроков — центре, а другой — коллектив секторов. Стратегиями центра могут быть допустимые центральные планы, а стратегией коллектива секторов — допустимые совокупности систем секторных оценок. Цена этой полиэдральной игры (Wolfe [25]) — максимальный народнохозяйственный девизный доход (оптимум задачи ПЦИ), а оптимальной стратегией (или оптимальными стратегиями) центра является (являются) тот центральный план (те центральные планы), при котором (которых) сумма секторных оптимумов принимает максимальную величину.

Мы решим вышеопределённую игру методом фиктивного проигрывания Brown-а и Robinson-а [1], [2], [21]. При этом, исходя из любого центрального плана, секторы разрешают свою двойственную задачу программирования, и оценки намеченной задачи снабжения, оценки ограничения материальных ресурсов, а также оценку ограничения ресурсов рабочей силы они докладывают центру. Из этих оценок центр составляет функцию цели, максимирует её на множестве допустимых центральных планов. Эти центральные планы при приведении оценок в порядок разлагаются на простые микропланы. Центр смешивает новый центральный план со старым в пропорции 1:1, и возвращает его секторам, они снова оценивают его, и новые оценки, смешивая со старыми в пропорции 1:1, опять докладывает центру. Итерирование подробным образом продолжается, но пропорция смешивания, в N-м ходе итерации, будет 1:(N — 1). При этом центр следит за максимальным значением функции цели в центральных планах, а также за суммой минимальных значений функции цели в секторных программах: последнее, низшее значение всегда меньше; предыдущее, верхнее значение всегда больше оптимума задачи ПЦИ. Если эти два значения попадут предписанную близость друг к другу, итерирование можно закончить, из оптимальных оценок самых последних секторных планов простым переводом получаются оптимальные секторные планы, совокупность которых является решением, оптимальным планом исходной задачи, задачи перспективного планирования народного хозяйства. В то же время оценки «спроса» и «предложения» товаров (оценка продовольственного обязательства соответствующего сектора и оценки ограничения материальных ресурсов из продуктов других секторов, используемых к производству данного продукта), а также оценки ограничения ресурсов рабочей силы в отдельных секторах нивелируются в ходе итерирования.

Вышеупомянутая конкретная модель и расчётный метод излагаются во второй части нашей статьи. Преобразование задачи ПЦИ в задачу на двух уровнях, а потом в полиэдральную игру, определение условий регулярности, необходимых к сходимости расчётного процесса, а кроме этого и доказательства оказалось целосообразным проводить на модели более общей, потому что обозначения, понятия и доказательства становились таким образом более ясными. Первая часть статьи занимается этой общей моделью.

Если каноническая форма задачи ПЦИ (в прямой и двойственной формах соответственно)

$$(1)\qquad \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{c}'\mathbf{x} \to \max! \quad \text{и} \quad \mathbf{y}'\mathbf{A} \geqq \mathbf{c}',\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{y}'\mathbf{b} \to \min!$$

и после разложения на секторов в форме

$$(2)\qquad \mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n], \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}' = [\mathbf{c}_1', \dots, \mathbf{c}_n'] .$$

(1) переписывается в виде

$$(3)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0},\ i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max! \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}'\mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i',\ i = 1, \dots, n \\ \mathbf{y} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}'\mathbf{b} \to \min! \end{array} \right\}$$

соответственно, то под *центральным планом* понимаем вектор

$$(4)\qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$$

размера $\mathbf{b}$, состоящий из подвекторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, и подлежащий условиям разложения ограничений

$$\mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n = \mathbf{b}\,. \tag{5}$$

i-я секторная задача при (5) является задачей линейного программирования

$$\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i,\ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max!\ \text{и}\ \mathbf{y}_i' \mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i',\ \mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{y}_i' \mathbf{u}_i \to \min! \tag{6}$$

соответственно. Если при каком-то центральном плане каждая секторная задача разрешима, то $\mathbf{u}$ называется *оценимым центральным планом*. Доказываем, что множество $\dot{\mathrm{U}}$, состоящие из оценимых центральных планов, многогранное выпуклое множество, которое при разрешимой задачи ПЦИ является не пустым, и в виде

$$\bigcup_{\mathbf{u} \in \dot{\mathrm{U}}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} : \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i, \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}, i = 1, \ldots, n \right\} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\} \tag{7}$$

генерирует множество осуществимых ПЦИ планов.

Пусть будет U данным многогранным выпуклым подмножеством множества $\dot{\mathrm{U}}$, обладающим генерирующим свойством в виде (7). *Задачей на двух уровнях* понимается

а) решение вогнутого программирования

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \in \mathrm{U}, \sum_{i=1}^{n} \max_{\substack{\mathbf{x}_i \\ \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i \\ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}}} \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max! \tag{8}$$

б) относительно элементов множества U^*, состоящего из оптимальных по формуле (8) центральных планов $\mathbf{u}^*$ решение секторных задач

$$\mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i^*,\ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max! \qquad i = 1, \ldots, n \tag{9}$$

и наконец

в) определение множества

$$\bigcup_{\mathbf{u}^* \in \mathrm{U}^*} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} : \mathbf{x}_i \in \mathrm{X}_i^*(\mathbf{u}_i^*),\ i = 1, \ldots, n \right\} \tag{10}$$

состоящего из планов ПЦИ элементов множества $\mathrm{X}_i^*(\mathbf{u}_i^*)$ секторных планов $\mathbf{x}_i^*(\mathbf{u}_i^*)$, оптимальных по формуле (7).

ТЕОРЕМА 1. *При разрешимости задачи ПЦИ вышеопределенная задача на двух уровнях тоже разрешима, и множество (10) совпадает со множеством оптимальных ПЦИ планов. Максимальное значение целевой функции (8) равно оптимальному значению Φ задачи ПЦИ.*

Под полиэдральной задачей (U, V) *из задачи ПЦИ или из задачи на дву уровняух* понимаем игру двух лиц в нормальной форме с нулевой суммой, в которой один из игроков центр, и его множество стратегий многогранное выпуклое множество U, состоящее из осуществимых центральных планов, а другой игрок — коллектив секторов, у них множество стратегий — многогранное выпуклое множество

(11) $$\mathsf{V} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} : \mathbf{y}_i' \mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i',\ \mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0},\ i = 1, \ldots, n \right\}$$

состоящее из допустимых совокупностей систем допустимых секторных оценок, и наконец платёжной функцией является билинейная функция $\mathbf{v}'\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} \in \mathsf{U}$, $\mathbf{v} \in \mathsf{U}$), определённая на прямом произведении этих множеств. Под i-м компонентом центральной стратегии $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']' \in \mathsf{U}$ и секторной стратегии $\mathbf{v} = [\mathbf{y}_1', \ldots, \mathbf{y}_n']' \in \mathsf{V}$ понимаем векторы $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{y}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) соответственно.

ТЕОРЕМА 2. *Полиэдральная игра, происходящая из разрешимой задачи ПЦИ тоже разрешима, и значение её равно оптимуму Ф задачи ПЦИ. Оптимальные стратегии центрального игрока — оптимальные центральные планы задачи на двух уровнях. Среди оптимальных стратегий игрока-коллектива секторов всегда имеется стратегия, секторные компоненты которой совпадают. Секторная стратегия такого типа оптимальна тогда и только тогда, если она является оптимальной противной стратегией какой-то центральной стратегии. В таком случае общий компонент является системой оптимальных ПЦИ оценок, и наоборот.*

По аналогии оценимых центральных планов называем *оценимой совокупность систем секторных оценок* секторную стратегию $\mathbf{v} \in \mathsf{V}$, если имеется против неё оптимальная противная стратегия центра, то есть линейное программирование

(12) $$\mathbf{u} \in \mathsf{U},\ \mathbf{v}'\mathbf{u} \to \max!$$

разрешимо. Мы будем называть полиэдральную игру (U, V) *регулярной* в том случае, если каждая её секторная стратегия оценима. Мы доказываем, что стратегически регулярная полиэдральная игра приводима к полиэдральной игре ($\mathbf{U}^\triangle$, $\mathbf{V}^\triangle$) где $\mathbf{U}^\triangle$ и $\mathbf{V}^\triangle$ являются (ограниченными) выпуклыми полиэдрами, происходившими выпуклой оболочкой краевых точек многогранных выпуклых множеств U и V соответственно [7]. А это изоморфно конечной игре с платёжной матрицей $\mathbf{V}'\mathbf{U}$.

Под *регулярным фиктивным проигрыванием* понимаемпоследовательное определение элементов последовательностей стратегий $\{\mathbf{u}^*\langle N\rangle\}$ и $\{\mathbf{v}^*\langle N\rangle\}$ из $\mathbf{U}^\triangle$ и $\mathbf{V}^\triangle$ соответственно последующей рекурсии. Выбираем любое $\mathbf{u}^*\langle 1\rangle \in \mathbf{u}^\triangle$. Пусть будет $\mathbf{u}^{(N)} \in \mathbf{U}^\triangle$ одним из решений разрешимого программирования

(13) $$\mathbf{u} \in \mathsf{U},\ \mathbf{v}^*\langle N-1\rangle'\,\mathbf{u} \to \max!$$

и

$$\mathbf{u}^*\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\mathbf{u}^*\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\mathbf{u}^{(N)}$$

если $N = 2, 3, \ldots$. Соответственно $\mathbf{v}^{(N)} \in \mathbf{V}^{\triangle}$ будет решением разрешимого линейного программирования

$$\mathbf{v} \in \mathsf{V}, \quad \mathbf{v}'\mathbf{u}^*\langle N\rangle \to \min! \tag{14}$$

и

$$\mathbf{v}^*\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\mathbf{v}^*\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\mathbf{v}^{(N)},$$

где $N = 2, 3, \ldots$, и $\mathbf{v}^*\langle 1\rangle = \mathbf{v}^{(1)}$. Максимальное значение $\Phi^*\langle N\rangle$ целевой функции (13) получается как *верхнее значение в период* N $(N = 2, 3, \ldots)$, а минимальное значение $\varphi^*\langle N\rangle$ целевой функции (14) как низшее значение в период N $(N = 1, 2, \ldots)$. Показываем, что

$$\Phi^*\langle N\rangle \geqq \Phi, \quad N = 2, 3, \ldots \quad \text{и} \quad \varphi^*\langle N\rangle \leqq \Phi, \quad N = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

и при регулярной полиэдральной игре (U, V)

$$\lim_{N\to\infty} \Phi^*\langle N\rangle = \lim_{N\to\infty} \varphi^*\langle N\rangle = \Phi, \tag{16}$$

где Φ оптимум задачи ПЦИ. К тому же предельные точки последовательностей $\{u^*\langle N\rangle\}$ и $\{v^*\langle N\rangle\}$ являются оптимальными стратегиями.

Положим

$$\Phi^{**}\langle N\rangle = \min\{\Phi^*\langle 2\rangle, \ldots, \Phi^*\langle N\rangle\} \qquad N = 2, 3, \ldots \tag{17}$$

и N_δ наименьшее целое число, при котором $\Phi^{**}\langle N_\delta\rangle - \varphi^*\langle N_\delta\rangle \leqq \delta$ (или $\Phi^{**}\langle N_\delta + 1\rangle - \varphi^*\langle N_\delta\rangle \leqq \delta$). Под *$\delta$-остановкой* регулярного фиктивного проигрывания понимается остановка итерирования после шага N_δ (или $N_\delta + 1$) и определение оптимальных секторных планов при центральном плане $\mathbf{u}^*\langle N_\delta\rangle$. Осуществимый ПЦИ план $\mathbf{x}^{\delta *}$ называется *δ-оптимальным*, если

$$\Phi - \delta \leqq \mathbf{c}'\mathbf{x}^{\delta *} \leqq \Phi. \tag{18}$$

ТЕОРЕМА 3. *Если полиэдральная игра, происходившая из разрешимой ПЦИ задачи, регулярная, то задача ПЦИ в конечных шагах разрешима с любой точностью регулярным фиктивным проигрыванием в том смысле, что при любом положительном δ δ-остановка приводит к δ-оптимальному плану задачи ПЦИ в конечных шагах. Если кроме этого регулярная полиэдральная игра единозначно разрешима для коллектива секторов, то в последовательностях стратегий секторов $\{\mathbf{v}^*\langle N\rangle\}$ секторные компоненты «нивелируются»: при $N \to \infty$ каждый компонент задачи ПЦИ сходится к оптимальной системе оценок.*

TWO-LEVEL PLANNING: A GAME-THEORETICAL MODEL AND ITERATIVE COMPUTING PROCEDURE FOR SOLVING LONG-TERM PLANNING PROBLEMS OF THE NATIONAL ECONOMY*

by

J. KORNAI and TH. LIPTÁK

Abstract

The familiar simplex algorithm and the decomposition procedures so far worked out (DANTZIG and WOLFE [3], [4]), did not make it possible — at least under Hungarian circumstances — to compute linear programming problems suited to solving long-term planning problems of the national economy. Setting out from this fact, a new algorithm has been proposed which provides a solution to within any prescribed degree of accuracy of such problems, in a finite number of steps.

In the concrete planning problem the national economy is imagined as being divided into an appropriate number of sectors, each of which is responsible for producing one product. The activities of the sectors, beyond reproductive and investment activities, also comprise the possible exports and imports of the product concerned. The activities of the sectors may, in the form of the consumption of materials, require products made by the other sectors, moreover labour power. Beyond this, within each sector there may be special sector conditions in connection with the production and foreign trade balance of the product.

The activities of the sectors are intended to be coordinated by a centre. The latter allocates to each sector a supply target with regard to its own product, material quotas for each of the products of other sectors, moreover a manpower quota. These together make up the central program. Suitable central conditions guarantee that with the feasible central programs the product balance of the national economy should be in equilibrium, furthermore, the manpower quotas allocated to the sectors should not exceed the overall manpower fund of the national economy.

The components of the central program relating to a sector appear as constraints bounds in the conditions of a linear programming shceme comprising only the activities of that sector, while the sectoral objective function to be maximized, is the sum of the foreign exchange returns of these activities. Hence the aim of long-term planning for the national economy, may be formulated as follows: To construct a feasible central program, such that the sum of the maximal value of the sectoral objective functions should be a maximum. This problems is distinguished from the original *overall central information*

---

* The authors published the first version of the method discussed in this paper in May, 1962, in duplicated form [13]. In October, 1962, TH. LIPTÁK published a new version of the mathematical part [17]. A paper by J. KORNAI [14] discusses and analyses the method from the economic point of view. An earlier version of the „general model" which discusses the general part of the computing procedure, may also be found in a duplicated paper by TH. LIPTÁK and A. NAGY [19]. The generaliza'ion of the above planning procedure for the decomposition of large-scale general linear programming problems and their solution by fictitious playing, moreover the generalization for the non-linear case are treated in a paper of TH. LIPTÁK [18] (in print) which was delivered in the Colloquium on the Application of Mathematics in Economics, held in Budapest, 18—22 june, 1963.

problem (OCI problem for short), which may be formulated as a large-scale linear programming problem, by being called the *two-level problem*.

In the dual version of the sector problems the set of feasible shadow price systems does not depend on central program — the latter only appear in the dual objective function (which is to be minimized) as coefficients of the shadow prices of the appropriate constraints. It is possible to define a zero-sum two-person game in the normal form in which one of the players is the centre, the other is the team of sectors. The strategies of the centre are the feasible central programs, those of the team of sectors are the teams of feasible sectoral shadow price systems. The value of this polyhedral game (WOLFE [25]) is the maximum of the foreign exchange return of the national economy (the OCI optimum), while the optimal strategies of the centre are those central programs where the sum of the sectoral optima is a maximum.

The game which has thus been defined is solved by the method of fictitious play according to BROWN [1], [2] and ROBINSON [21]. During the course of this, setting out from an arbitrary feasible central program, the sectors solve their dual programming problems and report back to the centre the sectoral shadow prices of the supply assignment, the materials and the manpower quotas. From these the centre constructs an objective function for itself which is to be maximized on the set of feasible central programs. This central programming problem is decomposed into simple ,,micro-programming problems'' that may be solved by arranging the shadow prices in the order of magnitude. The new central program is mixed with old in the proportion of 1 : 1 and again sent down to the sectors, which once more solve their dual programming problems, and mixing the new shadow prices with the old in the proportion of 1 : 1, send them back to the centre and so on. The iteration is continued in a similar way, and the mixing proportion in the N-th phase of iteration will be $1 : (N - 1)$. In the meanwhile the centre notes the maximal values of the objective function achieved in the central programming and the sum of the minimal values of the dual objective functions achieved in the sector programming processes. The first, the upper optimum, provides an upper estimate for the OCI optimum, the second, the lower optimum, a lower estimate for it. When the two values have approached to each other within the prescribed accuracy, the iteration may be terminated and the team of the optimal sector programs which may be obtained by simple conversions from the optimal shadow prices of the last sector programming processes, provide the optimal solution of the long-term planning problem of the economy within the required accuracy. At the same time during the course of iteration the ,,supply'' and ,,demand'' shadow prices of the products (the shadow price of the supply target of the sector concerned and the shadow prices of its materials quotas of products from other sectors), moreover the shadow prices of the manpower quotas of the various sectors, are all ,,equalized''.

The above concrete model and computing procedure are discussed in Part 2 of the paper. It appeared advisable to carry out the transformation of the OCI problem into a two-level problem and subsequently into a polyhedral game, moreover to enunciate the regularity conditions necessary for the convergence of the computing procedure and to carry out the proofs, with respect to a somewhat more general model, for here the notation, terminology and proofs become more perspicuous. Part 1 of the paper is concerned with this general model.

If

$$\text{(1)}\qquad \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{c}'\mathbf{x} \to \max! \quad \text{resp.} \quad \mathbf{y}'\mathbf{A} \geqq \mathbf{c}', \mathbf{y} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{y}'\mathbf{b} \to \min!$$

are the canonical forms of the OCI problem (in primal-dual form), and (1) may, after decomposition into n sectors according to

$$\text{(2)}\qquad \mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n], \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}' = [\mathbf{c}_1', \ldots, \mathbf{c}_n']$$

be written as

$$\text{(3)}\qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_i \geqq 0, \; i = 1, \ldots, n \\ \sum_{i=1}^{n} \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max! \end{array} \right\} \text{ resp. } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}'\mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i', \; i = 1, \ldots, n \\ \mathbf{y}' \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{y}'\mathbf{b} \to \min! \end{array} \right\}.$$

then the *central program* is defined as the vector

$$\text{(4)}\qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$$

consisting of the component vectors $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ which are of the same size as $\mathbf{b}$ and satisfy the *partitioning condition*

$$\text{(5)}\qquad \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n = \mathbf{b}.$$

The *i-th sector problem* under (4) is the linear programming problem

$$\text{(6)}\qquad \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i, \; \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}, \; \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max! \quad \text{resp.} \quad \mathbf{y}_1' \mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i', \; \mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0}, \; \mathbf{y}_i' \mathbf{u}_i \to \min!.$$

If all the sector problems are solvable under a central program $\mathbf{u}$, then $\mathbf{u}$ is called an *evaluable central program*. It is shown that the set $\dot{\mathsf{U}}$ consisting of evaluable central programs is a convex polyhedral set, which is in the case of a solvable OCI problem non-void and *generates* the set of feasible OCI programs in the form

$$\text{(7)}\qquad \bigcup_{\mathbf{u} \in \dot{\mathsf{U}}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} : \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i, \; \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}, \; i = 1, \ldots, n \right\} = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}, \; \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}.$$

Let U be a fixed, non-void, convex polyhdral subset of $\dot{\mathsf{U}}$, which also possesses the generating property of the form of (7). The *two-level problem* belonging to the sector decomposition (2)—(3) and the fixed U, is understood to mean (i) the solution of the concave programming problem

$$\text{(8)}\qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \in \mathsf{U}, \; \sum_{i=1}^{n} \max_{\substack{\mathbf{x}_i \\ \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i \\ \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}}} \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max!$$

(ii) the solution of the sector programming problems

$$(9) \qquad \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \leqq \mathbf{u}_i^*, \quad \mathbf{x}_i \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}_i' \mathbf{x}_i \to \max!$$

for the elements of the set U^* consisting of those central programs $\mathbf{u}^*$ which were found optimal in (8); finally, (iii) the determination of the union

$$(10) \qquad \bigcup_{\mathbf{u}^* \in \mathsf{U}^*} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} : \mathbf{x}_i \in \mathsf{X}_i^*(\mathbf{u}_i^*), \quad i = 1, \ldots, n \right\}$$

of the sets constructed from the sets $\mathsf{X}_i^*(\mathbf{u}_i^*)$ consisting of the sector programs $\mathbf{x}_i^*(\mathbf{u}_i^*)$ which were found optimal in (9).

THEOREM 1. *In the case of a solvable OCI problem the above two-level problem is also solvable and the set* (10) *coincides with the set of optimal OCI programs. The maximum value of the objective function in* (8) *is equal to the optimum value* Φ *of the OCI problem.*

The polyhedral game (U, V) *derived from the OCI problem or from the two-level problem* is defined as being a zero-sum two-person game in the normal form, in which the maximizing player is the centre, with the convex polyhedral set U consisting of the feasible central programs as its set of strategies, while the minimizing player is the team of sectors, having the convex polyhedral set

$$(11) \qquad \mathsf{V} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix} : \mathbf{y}_i' \mathbf{A}_i \geqq \mathbf{c}_i', \quad \mathbf{y}_i \geqq \mathbf{0}, \quad i = 1, \ldots, n \right\}$$

consisting of the team of feasible sector shadow price systems as its set of strategies, moreover where the payoff function is the bilinear function $\mathbf{v}'\mathbf{u}$ ($\mathbf{u} \in \mathsf{U}$, $\mathbf{v} \in \mathsf{V}$). The i-th component of the *central strategy* $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1', \ldots, \mathbf{u}_n']'$ and of the *sector strategy* $\mathbf{v} = [\mathbf{y}_1', \ldots, \mathbf{y}_n']'$ is understood to be the vector $\mathbf{u}_i$ and $\mathbf{y}_i$, respectively.

THEOREM 2. *A polyhedral game derived from a solvable OCI problem is itself solvable, and its value equals the OCI optimum* Φ. *The optimal strategies of the centre player are the optimal central programs appearing in the two-level problem. The optimal strategies of the sector team player always include a strategy whose sector components are equal. This type of sector strategy is optimal if and only if it is the optimal counter-strategy to some central strategy. In this case the common component is an optimal OCI shadow price system and vice versa.*

Upon the analogy of the evaluable central program, let a sector strategy $\mathbf{v} = [\mathbf{y}_1', \ldots, \mathbf{y}_n']'$ be called an *evaluable sector strategy* if there is an optimal central counter-strategy opposite it, i.e. if the linear programming problem

$$(12) \qquad \mathbf{u} \in \mathsf{U}, \quad \mathbf{v}'\mathbf{u} \to \max!$$

is solvable. Let the polyhedral game (U, V) be called *regular* if all its sector strategies are evaluable. It is shown that a regular polyhedral game may be strategically reduced to the polyhedral game $(\mathbf{U}^\triangle, \mathbf{V}^\triangle)$, where $\mathbf{U}^\triangle$ and $\mathbf{V}^\triangle$ are (bounded) convex polyhedra, formed as the convex hull of the extreme points of the convex polyhedral sets U and V, respectively [7]. This in turn is isomorphic with the finite game having the payoff matrix $\mathbf{V}'\mathbf{U}$.

The *regular fictitious play* of a regular polyhedral game is understood to mean the successive determination of the elements of the strategy series $\{\mathbf{u}^*\langle N\rangle\}$ in $\mathbf{U}^\triangle$ and $\{\mathbf{v}^*\langle N\rangle\}$ in $\mathbf{V}^\triangle$ according to the following recursion. $\mathbf{u}^*\langle 1\rangle \in \mathbf{U}^\triangle$ may be arbitrarily chosen. Let $\mathbf{u}^{(N)} \in \mathbf{U}^\triangle$ be a solution of the solvable linear programming problem

$$\text{(13)} \qquad \mathbf{u} \in \mathsf{U}, \quad \mathbf{v}^*\langle N-1\rangle'\mathbf{u} \to \max!$$

and let

$$\mathbf{u}^*\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\mathbf{u}^*\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\mathbf{u}^{(N)} \text{ if } N = 2, 3, \ldots$$

Let $\mathbf{v}^{(N)} \in \mathbf{V}^\triangle$ be a solution of the solvable linear programming problem

$$\text{(14)} \qquad \mathbf{v} \in \mathsf{V}, \quad \mathbf{v}'\mathbf{u}^*\langle N\rangle \to \min!$$

and let

$$\mathbf{v}^*\langle N\rangle = \frac{N-1}{N}\mathbf{v}^*\langle N-1\rangle + \frac{1}{N}\mathbf{v}^{(N)}, \text{ if } N=2,3,\ldots$$

while $\mathbf{v}^*\langle 1\rangle = \mathbf{v}^{(1)}$. The maximal value $\Phi^*\langle N\rangle$ of the objective function in (13) is the *upper optimum of the N-th phase* ($N = 2, 3, \ldots$), while the minimal value $\varphi^*\langle N\rangle$ of the objective function in (14) is the *lower optimum of the N-th phase* ($N = 1, 2, \ldots$). It is shown that

$$\text{(15)} \qquad \Phi^*\langle N\rangle \geqq \Phi, \quad N = 2, 3, \ldots \text{ and } \varphi^*\langle N\rangle \leqq \Phi, \quad N = 1, 2, \ldots$$

and in the case of a regular polyhedral game

$$\text{(16)} \qquad \lim_{N\to\infty} \Phi^*\langle N\rangle = \lim_{N\to\infty} \varphi^*\langle N\rangle = \Phi,$$

where Φ is the OCI optimum. Moreover the limit points of the series $\{\mathbf{u}^*\langle N\rangle\}$ and $\{\mathbf{v}^*\langle N\rangle\}$ are optimal strategies.

Let

$$\text{(17)} \qquad \Phi^{**}\langle N\rangle = \min\{\Phi^*\langle 2\rangle, \ldots, \Phi^*\langle N\rangle\}, \quad N = 2, 3, \ldots$$

and N_δ be the smallest integer for which the difference $\Phi^{**}\langle N_\delta\rangle - \varphi^*\langle N_\delta\rangle$ (or $\Phi^{**}\langle N_\delta + 1\rangle - \varphi^*\langle N_\delta\rangle$) is no longer greater than the positive number δ. The *δ-termination* of the regular fictitious play is understood to mean the termination of the iteration after the N_δ-th (or $(N_\delta + 1)$-st) phase and the determination of the optimal sector programs under the central program $\mathbf{u}^*\langle N_\delta\rangle$. Let a feasible OCI program $\mathbf{x}^{\delta*}$ be called *δ-optimal*, if

$$\text{(18)} \qquad \Phi - \delta \leqq \mathbf{c}'\mathbf{x}^{\delta*} \leqq \Phi.$$

THEOREM 3. *If a polyhedral game derived from a solvable OCI problem is regular, then the regular fictitious play of the game will permit the OCI problem to be solved to an arbitrary degree of accuracy in a finite number of steps, in the sense that for an arbitrarily small positive δ the δ-termination will lead to a δ-optimal OCI program in a finite number of steps. If, moreover, the solution of the regular polyhedral game is unique for the sector team player the sector components are "equalized" in the sector strategy series $\{\mathbf{v}^*\langle N\rangle\}$: i.e. for $N \to \infty$ all the components will converge to the optimal shadow price system of the OCI problem.*

	$x^{\mathrm{repr}}_{i,1,1}$	$\cdots$	$x^{\mathrm{repr}}_{i,n_i^{\mathrm{repr}},1}$	$x^{\mathrm{repr}}_{i,1,1}$	$\cdots$	$x^{\mathrm{exp}}_{i,n_i^{\mathrm{exp}},1}$	$x^{\mathrm{imp}}_{i,0,1,}$	$x^{\mathrm{imp}}_{i,1,1}$	$\cdots$	$x^{\mathrm{imp}}_{i,n_i^{\mathrm{imp}},1}$	$\cdots$
$\pi_{i,1,1}$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,1,1,1}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,1,n_i^{\mathrm{repr}}}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\pi_{i,i-1,1}$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,i-1,1,1}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,i-1,n_i^{\mathrm{repr}},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	
$\pi_{i,i,1}$	-1	$\cdots$	-1	$+1$	$\cdots$	$+1$	-1	-1	$\cdots$	-1	
$\pi_{i,i+1,1}$	$g^{\mathrm{repr}}_{i.i+1,1,1}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,i+1,n_i^{\mathrm{repr}},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\pi_{i,n,1}$	$g^{\mathrm{repr}}_{i.n,1,1}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,n,n_i^{\mathrm{repr}},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	
$\omega_{i,1}$	$h^{\mathrm{repr}}_{i,1,1}$	$\cdots$	$h^{\mathrm{repr}}_{i,n_i^{\mathrm{repr}},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	
$\vdots$											
$\pi_{i,1,t}$											
$\vdots$											
$\pi_{i,i-1,t}$											
$\pi_{i,i,t}$											
$\pi_{i,i+1,t}$											
$\vdots$											
$\pi_{i,n,t}$											
$\omega_{i,t}$											
$\vdots$											
$\pi_{i,1,T}$											
$\vdots$											
$\pi_{i,i-1,T}$											
$\pi_{i,i,T}$											
$\pi_{i,i+1,T}$											
$\vdots$											
$\pi_{i,n,T}$											
$\omega_{i,T}$											
$\varrho_{i,1}$	$+1$	$\cdots$	$+1$	-1	$\cdots$	-1	$+1$	$+1$	$\cdots$	$+1$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\varrho_{i,t}$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\varrho_{i,T}$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	
$\sigma_{i,1}$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,1,1,1}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,1,n_i^{\mathrm{repr}},1}$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,1,1,1}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,1,n_i^{\mathrm{exp}},1}$	0	$a^{\mathrm{imp}}_{i,1,1,1}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{imp}}_{i,1,n_i^{\mathrm{imp}},1}$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\sigma_{i,s}$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,s,1,1}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,s,n_i^{\mathrm{repr}},1}$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,s,1,1}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,s,n^{\mathrm{exp}},1}$	0	$a^{\mathrm{imp}}_{i,s,1,1}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{imp}}_{i,s,n_i^{\mathrm{imp}},1}$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
σ_{i,m_i}	$a^{\mathrm{repr}}_{i,m_i,1,1}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,m_i,n_i^{\mathrm{repr}},1}$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,m_i,1,1}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,m_i,n_i^{\mathrm{exp}},1}$	0	$a^{\mathrm{imp}}_{i,m_i,1,1}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{imp}}_{i,m_i,n_i^{\mathrm{imp}},1}$	
$\geqq$	0	$\cdots$	0	$c^{\mathrm{exp}}_{i,1,1}$	$\cdots$	$c^{\mathrm{exp}}_{i,n_i^{\mathrm{exp}},1}$	$c^{\mathrm{imp}}_{i,0,1}$	$c^{\mathrm{imp}}_{i,1,1}$	$\cdots$	$c^{\mathrm{imp}}_{i,n_i^{\mathrm{imp}},}$	$\cdots$

	$x^{\mathrm{repr}}_{i,1,t}$	$\cdots$	$x^{\mathrm{repr}}_{i,n_i^{\mathrm{repr}},t}$	$x^{\mathrm{exp}}_{i,1,t}$	$\cdots$	$x^{\mathrm{exp}}_{i,n_i^{\mathrm{exp}},t}$	$x^{\mathrm{imp}}_{i,0,t}$	$x^{\mathrm{imp}}_{i,1,t}$	$\cdots$	$x^{\mathrm{imp}}_{i,n_i^{\mathrm{imp}},t}$	$\cdots$
$\pi_{i,1,1}$											
$\vdots$											
$\pi_{i,i-1,1}$											
$\pi_{i,i,1}$											
$\pi_{i,i+1,1}$											
$\vdots$											
$\pi_{i,n,1}$											
$\omega_{i,1}$											
$\vdots$											
$\pi_{i,1,t}$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,1,1,t,}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,1,n_i^{\mathrm{repr}},t}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\pi_{i,i-1,t}$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,i-1,1,t,}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,i-1,n_i^{\mathrm{repr}},t}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	
$\pi_{i,i,t}$	-1	$\cdots$	-1	$+1$	$\cdots$	$+1$	-1	-1	$\cdots$	-1	
$\pi_{i,i+1,t}$	$g^{\mathrm{rep}}_{i,i+1,1,t,}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,i+1,n_i^{\mathrm{repr}},t}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\pi_{i,n,t}$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,n,1,t,}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,n,n_i^{\mathrm{repr}},t}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	
$\omega_{i,t}$	$h^{\mathrm{repr}}_{i,1,t,}$	$\cdots$	$h^{\mathrm{repr}}_{i,n_i^{\mathrm{repr}},t}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	
$\vdots$											
$\pi_{i,1,T}$											
$\vdots$											
$\pi_{i,i-1,T}$											
$\pi_{i,i,T}$											
$\pi_{i,i+1,T}$											
$\vdots$											
$\pi_{i,n,T}$											
$\omega_{i,T}$											
$\varrho_{i,1}$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\varrho_{i,t}$	$+1$	$\cdots$	$+1$	-1	$\cdots$	-1	$+1$	$+1$	$\cdots$	$+1$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\varrho_{i,T}$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	
$\sigma_{i,1}$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,1,1,t,}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,1,n_i^{\mathrm{repr}},t}$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,1,1,t}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,1,n_i^{\mathrm{exp}},t}$	0	$a^{\mathrm{imp}}_{i,1,1,t}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{imp}}_{i,1,n_i^{\mathrm{imp}},t}$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
$\sigma_{i,s}$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,s,1,t,}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,s,n_i^{\mathrm{repr}},t}$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,s,1,t}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,s,n_i^{\mathrm{exp}},t}$	0	$a^{\mathrm{imp}}_{i,s,1,t}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{imp}}_{i,s,n_i^{\mathrm{imp}},t}$	
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
σ_{i,m_i}	$a^{\mathrm{repr}}_{i,m_i,1,t,}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,m_i,n_i^{\mathrm{repr}},t}$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,m_i,1,t}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,m_i,n_i^{\mathrm{exp}},t}$	0	$a^{\mathrm{imp}}_{i,m_i,1,t}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{imp}}_{i,m_i,n_i^{\mathrm{imp}},t}$	
$\geqq$	0	$\cdots$	0	$c^{\mathrm{exp}}_{i,1,t}$	$\cdots$	$c^{\mathrm{exp}}_{i,n_i^{\mathrm{exp}},t}$	$c^{\mathrm{imp}}_{i,0,1}$	$c^{\mathrm{imp}}_{i,1,t}$	$\cdots$	$c^{\mathrm{imp}}_{i,n^{\mathrm{imp}},t}$	

	$x^{\mathrm{repr}}_{i,1,T}$	$\cdots$	$x^{\mathrm{repr}}_{i,n_i^{\mathrm{repr}},T}$	$x^{\mathrm{exp}}_{i,1,T}$	$\cdots$	$x^{\mathrm{exp}}_{i,n_i^{\mathrm{exp}},T}$	$x^{\mathrm{imp}}_{i,0,T}$	$x^{\mathrm{imp}}_{i,1,T}$	$\cdots$	$x^{\mathrm{imp}}_{i,n_i^{\mathrm{imp}},T}$	$x^{\mathrm{inv}}_{i,1}$	$\cdots$	$x^{\mathrm{inv}}_{i,n_i^{\mathrm{inv}}}$	$\leqq$
$\pi_{i,1,1}$											$g^{\mathrm{inv}}_{i,1,1,1}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{inv}}_{i,1,n_i^{\mathrm{inv}},1}$	$p_{i,1,1}$
$\vdots$											$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\pi_{i,i-1,1}$											$g^{\mathrm{inv}}_{i,i-1,1,1}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{inv}}_{i,i-1,n_i^{\mathrm{inv}},1}$	$p_{i,i.1}$
$\pi_{i,i,1}$											$-f^{\mathrm{inv}}_{i,1,1}$	$\cdots$	$-f^{\mathrm{inv}}_{i,n_i^{\mathrm{inv}},1}$	$-p_{i,i,1}$
$\pi_{i,i+1,1}$											$g^{\mathrm{inv}}_{i,i+1,1,1}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{inv}}_{i,i+1,n_i^{\mathrm{inv}},1}$	$p_{i,i+1,1}$
$\vdots$											$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\pi_{i,n,1}$											$g^{\mathrm{inv}}_{i,n,1,1}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{inv}}_{i,n,n_i^{\mathrm{inv}},1}$	$p_{i,n,1}$
$\omega_{i,1}$											$h^{\mathrm{inv}}_{i,1,1}$	$\cdots$	$h^{\mathrm{inv}}_{i,n_i^{\mathrm{inv}},1}$	$\omega_{i,1}$
$\vdots$														$\vdots$
$\pi_{i,1,t}$											$g^{\mathrm{inv}}_{i,1,1,t}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{inv}}_{i,1,n_i^{\mathrm{inv}},t}$	$p_{i,1,t}$
$\vdots$											$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\pi_{i,i-1,t}$											$g^{\mathrm{inv}}_{i,i-1,1,t}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{inv}}_{i,i-1,n_i^{\mathrm{inv}},t}$	$p_{i,i-1,t}$
$\pi_{i,i,t}$											$-f^{\mathrm{inv}}_{i,1,t}$	$\cdots$	$-f^{\mathrm{inv}}_{i,n_i^{\mathrm{inv}},t}$	$-p_{i,i,t}$
$\pi_{i,i+1,t}$											$g^{\mathrm{inv}}_{i,i+1,1,t}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{inv}}_{i,i+1,n_i^{\mathrm{inv}},t}$	$p_{i,i+1,t}$
$\vdots$											$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\pi_{i,n,t}$											$g^{\mathrm{inv}}_{i,n,1,t}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{inv}}_{i,n,n_i^{\mathrm{inv}},t}$	$p_{i,n,t}$
$\omega_{i,t}$											$h^{\mathrm{inv}}_{i,1,t}$	$\cdots$	$h^{\mathrm{inv}}_{i,n_i^{\mathrm{inv}},t}$	$\omega_{i,t}$
$\vdots$														$\vdots$
$\pi_{i,1,T}$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,1,1,T}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,1,n_i^{\mathrm{repr}},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$g^{\mathrm{inv}}_{i,1,1,T}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{inv}}_{i,1,n_i^{\mathrm{inv}},T}$	$p_{i,1,T}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\pi_{i,i-1,T}$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,i-1,1,T}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,i-1,n_i^{\mathrm{repr}},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$g^{\mathrm{inv}}_{i,i-1,1,T}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{inv}}_{i,i-1,n_i^{\mathrm{inv}},T}$	$p_{i,i-1,T}$
$\pi_{i,i,T}$	-1	$\cdots$	-1	$+1$	$\cdots$	$+1$	-1	-1	$\cdots$	-1	$-f^{\mathrm{inv}}_{i,1,T}$	$\cdots$	$-f^{\mathrm{inv}}_{i,n_i^{\mathrm{inv}},T}$	$-p_{i,i,T}$
$\pi_{i,i+1,T}$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,i+1,1,T}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,i+1,n_i^{\mathrm{repr}},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$g^{\mathrm{inv}}_{i,i+1,1,T}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{inv}}_{i,i+1,n_i^{\mathrm{inv}},T}$	$p_{i,i+1,T}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\pi_{i,n,T}$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,n,1,T}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{repr}}_{i,n,n_i^{\mathrm{repr}},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$g^{\mathrm{inv}}_{i,n,1,T}$	$\cdots$	$g^{\mathrm{inv}}_{i,n,n_i^{\mathrm{inv}},T}$	$p_{i,n,T}$
$\omega_{i,T}$	$h^{\mathrm{repr}}_{i,1,T}$	$\cdots$	$h^{\mathrm{repr}}_{i,n_i^{\mathrm{repr}},1}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$h^{\mathrm{inv}}_{i,1,T}$	$\cdots$	$h^{\mathrm{inv}}_{i,n_i^{\mathrm{inv}},T}$	$\omega_{i,T}$
$\varrho_{i,1}$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$f^{\mathrm{inv}}_{i,1,1}$	$\cdots$	$f^{\mathrm{inv}}_{i,n_i^{\mathrm{inv}},1}$	$R_{i,1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\varrho_{i,t}$	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0	$f^{\mathrm{inv}}_{i,1,t}$	$\cdots$	$f^{\mathrm{inv}}_{i,n_i^{\mathrm{inv}},t}$	$R_{i,t}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\varrho_{i,T}$	$+1$	$\cdots$	$+1$	-1	$\cdots$	-1	$+1$	$+1$	$\cdots$	$+1$	$f^{\mathrm{inv}}_{i,1,T}$	$\cdots$	$f^{\mathrm{inv}}_{i,n_i^{\mathrm{inv}},T}$	$R_{i,T}$
$\sigma_{i,1}$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,1,1,T}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,1,n_i^{\mathrm{repr}},T}$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,1,1,T}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,1,n_i^{\mathrm{exp}},T}$	0	$a^{\mathrm{imp}}_{i,1,1,T}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{imp}}_{i,1,n_i^{\mathrm{imp}},T}$	$a^{\mathrm{inv}}_{i,1,1}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{inv}}_{i,1,n_i^{\mathrm{inv}}}$	$b_{i,1}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\sigma_{i,s}$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,s,1,T}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,s,n_i^{\mathrm{repr}},T}$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,s,1,T}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,s,n_i^{\mathrm{exp}},T}$	0	$a^{\mathrm{imp}}_{i,s,1,T}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{imp}}_{i,s,n_i^{\mathrm{imp}},T}$	$a^{\mathrm{inv}}_{i,s,1}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{inv}}_{i,s,n_i^{\mathrm{inv}}}$	$b_{i,s}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
σ_{i,m_i}	$a^{\mathrm{repr}}_{i,m_i,1,T}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{repr}}_{i,m_i,n_i^{\mathrm{repr}},T}$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,m_i,1,T}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{exp}}_{i,m_i,n_i^{\mathrm{exp}},T}$	0	$a^{\mathrm{imp}}_{i,m_i,1,T}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{imp}}_{i,m_i,n_i^{\mathrm{imp}},T}$	$a^{\mathrm{inv}}_{i,m_i,1}$	$\cdots$	$a^{\mathrm{inv}}_{i,m_i,n_i^{\mathrm{inv}}}$	b_{i,m_i}
$\geqq$	0	$\cdots$	0	$c^{\mathrm{exp}}_{i,1,t}$	$\cdots$	$c^{\mathrm{exp}}_{i,n_i^{\mathrm{exp}},T}$	$c^{\mathrm{imp}}_{i,0,T}$	$c^{\mathrm{imp}}_{i,1,T}$	$\cdots$	$c^{\mathrm{imp}}_{i,n_i^{\mathrm{imp}},t}$	$c^{\mathrm{inv}}_{i,1}$	$\cdots$	$c^{\mathrm{inv}}_{i,n^{\mathrm{inv}}}$	