EGY GRÁFELMÉLETI PROBLÉMÁRÓL

ERDŐS PÁL és RÉNYI ALFRÉD

Bevezetés

E dolgozatban egy gráfelméleti problémával foglalkozunk, amelyre a következő kérdés vezet: megadott számú repülőtér között rendszeres (oda-vissza) légijáratokat kívánunk létesíteni oly módon, hogy bármely repülőtérről bármely másik repülőtérre vagy közvetlen járattal (leszállás nélkül), vagy egyetlen átszállással el lehessen jutni, azonban a repülőterek kapacitásai korlátozottak, vagyis elő van írva, hogy egy repülőtér legfeljebb hány más repülőtérrel állhat közvetlen légi kapcsolatban; kérdés, hogyan lehet a szóbanforgó légi hálózatot úgy megtervezni, hogy a fenti feltételek teljesüljenek és egyben minél kevesebb légi járatot kelljen létesíteni? E feladat gráfelméleti megfogalmazásához a következőképpen jutunk el: minden repülőtérnek feleltessünk meg egy pontot: ezek lesznek a gráf szögpontjai (vagy röviden: pontjai). Jelöljük a repülőterek számát n-nel, akkor tehát a gráfnak n pontja lesz. Két pontot kössünk össze egy (nem irányított) éllel, ha a megfelelő repülőterek között közvetlen légi kapcsolat áll fenn. Az így létrejövő (párhuzamos élek és hurkok nélküli, nem irányított) gráfra a feltételeink azt kívánják meg, hogy a pontjai fokának (valenciájának) maximuma egy megadott számmal (amelyet k-val jelölünk) legyen egyenlő és ugyanakkor a gráf „átmérője" legfeljebb 2 legyen. Egy (összefüggő) gráf átmérőjén azt a legkisebb d számot értjük, amelyre igaz az, hogy a gráf bármely két pontja összeköthető egy legfeljebb d élből álló úttal. (Útnak nevezzük a $P_i P_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ élek sorozatát, ahol $P_1, \ldots, P_{s+1}$ a gráf különböző pontjai.) Mármost adott n és k mellett az összes, a feltételeknek eleget tevő gráfok közül (ha ilyenek egyáltalán vannak) keressük azokat, amelyek éleinek száma minimális. Ezt a minimális élszámot, amely nyilván kizárólag az n és k számoktól függ, $F_2(n, k)$-val fogjuk jelölni. Ha G_n jelöl egy tetszőleges n szögpontú gráfot, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ennek pontjait, $v(P_j)$ jelöli a P_j pont fokát G_n-ben (vagyis G_n azon pontjainak számát, amelyekkel P_j össze van kötve egy éllel), $d(G_n)$ jelöli a G_n gráf átmérőjét, és $N(G_n)$ az éleinek számát, akkor tehát $H_2(n, k)$-val jelölve azon n adott $P_1, \ldots, P_n$ szögpontból képezhető gráfok halmazát, amelyekre $d(G_n) \leq 2$ és $\max_{1 \leq j \leq n} v(P_j) = k$,

$$F_2(n, k) = \min_{G_n \in H_2(n, k)} N(G_n) \,, \tag{1}$$

feltéve, hogy a $H_2(n, k)$ halmaz nem üres; ellenkező esetben legyen $F_2(n, k) = +\infty$. A kettes index $F_2(n, k)$-ban ill. $H_2(n, k)$-ban arra utal, hogy legfeljebb

2 átmérőjű gráfokról van szó. A feladat ugyanis nyilván általánosítható oly módon, hogy ahelyett, hogy bármely repülőtérről el lehessen jutni bármely másikra legfeljebb egy átszállással, csak annyit kötünk ki, hogy legfeljebb $r-1$ átszállással el lehessen jutni, ahol $r \geq 2$. Más szóval keressük az n szögpontú gráfok közül, amelyekben a pontok fokának maximuma k és amelyek átmérője legfeljebb r, azokat, amelyek minimális számú élből állnak. Ezt a minimális élszámot $F_r(n, k)$-val jelöljük, tehát

$$F_r(n,k) = \min_{G_n \in H_r(n,k)} N(G_n), \tag{2}$$

ahol $H_r(n, k)$ azoknak a $P_1, \ldots, P_n$ szögpontokból képezett G_n gráfoknak a halmaza, amelyekre $d(G_n) \leq r$ és $\max\limits_{1 \leq j \leq n} v(P_r) = k$. (Ha $H_r(n, k)$ üres, úgy $F_r(n, k) = +\infty$.)

E dolgozat 1. és 2. §-ában az $r = 2$ esettel foglalkozunk. Az $r > 2$ esetre vonatkozólag csak a 3. §-ban teszünk néhány megjegyzést; ezen kérdés részletes diszkussziójára egy további dolgozatban szándékozunk visszatérni.

Az 1. §-ban megvizsgáljuk az $F_2(n, k)$ függvény viselkedését abban az esetben, ha n és k nagy számok, és $F_2(n, k)$-ra aszimptotikusan pontos képletet adunk meg. A 2. §-ban egy konstrukciós eljárást ismertetünk, amely bizonyos aszimptotikusan legjobb megoldásokhoz vezet.

Megjegyezzük, hogy ha találtunk egy minimális élszámú legfeljebb 2 átmérőjű n szögpontú gráfot, amelyben a pontok fokának maximuma k, és adva van n kijelölt pont, akkor ezen pontokhoz az említett gráf szögpontjait még $n!$ különböző módon rendelhetjük hozzá. Ezen hozzárendelések közül kiválaszthatunk egy olyat, amely még valamely más szempontból is optimális. Igy például ha adva vannak a repülőterek közötti távolságok, azon légi összeköttetés hálózatok közül, amelyek az adott feltételek mellett minimális számú járatból állnak, kiválaszthatjuk azt, amelynél a járatok *összhossza* minimális.

A feladat felfogható nem-lineáris programozási feladatként is. Legyen $E = (\varepsilon_{ij})$ egy $n \times n$-es 1 és 0 elemekből álló szimmetrikus mátrix, amelynek diagonális elemei 1-gyel egyenlők és sorösszegeinek maximuma $k + 1$, továbbá az E^2 mátrix minden eleme ≥ 1; ezen feltételek mellett a $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{1=j}^{n} \varepsilon_{ij}$ összeget kell minimalizálni.

Mi a kérdést gráfelméleti fogalmazásban vizsgáljuk.

A felhasznált módszerek mind elemiek, a probléma természetének megfelelően, a konstrukciónál azonban a véges testek, ill. véges geometriák elméletét is felhasználjuk. Ez nem az első eset, hogy gráfelméleti problémák megoldásánál a véges testek elmélete alkalmas segédeszköznek bizonyult; a gráfok aszimmetriájára vonatkozó vizsgálatainkban [1] is hasonló tapasztalatokat szereztünk. (Lásd továbbá a [2] dolgozatot.)

A 3. §-ban néhány 2 átmérőjű gráfokra vonatkozó további eredményt és néhány megoldatlan problémát is megemlítünk.

Ezúton is köszönetet mondunk GALLAI TIBORnak értékes megjegyzéseiért, amelyeket a végleges fogalmazásnál felhasználtunk.

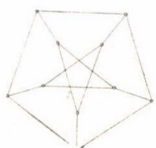
1. §. Néhány egyenlőtlenség

Először azt a kérdést vizsgáljuk, hogy mely n, k számpárokra létezhet egyáltalán n szögpontú, 2 átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maximuma k, hogy muma k. Legyen G_n egy ilyen gráf és legyenek $P_1, \ldots, P_n$ a G_n gráf szögpontjai. Egy tetszőleges pontból, pl. a P_1 pontból feltevés szerint legfeljebb k él indul ki, vagyis P_1-ből 1 hosszúságú (egy élből álló) úttal legfeljebb k pont érhető el. A P_1 pontból 2 hosszúságú (két élből álló) úttal elérhető pontok száma nyilván legfeljebb akkora, mint a P_1-ből egy éllel elérhető pontokból egy éllel elérhető és P_1-től különböző pontok száma, és így P_1-ből egy vagy két élből álló úttal elérhető pontok száma legfeljebb $k + k(k-1) = k^2$. Feltevés szerint azonban minden P_1-től különböző pont elérhető P_1-ből 1 vagy 2 hosszúságú úttal, tehát fenn kell állnia az

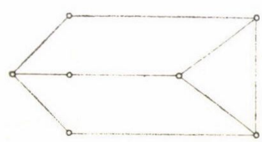
$$n \leqq k^2 + 1 \tag{1.1}$$

egyenlőtlenségnek. A fenti bizonyításból az is nyilvánvaló, hogy (1.1)-ben egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha minden pont fokszáma k, vagyis k-adfokú reguláris gráf esetében.

Az egyenlőség (1.1)-ben $k = 2$ és $k = 3$ esetben elérhető; $k = 2$ esetében az ötszögpontú körre, $k=3$ esetében az ún. PETERSEN-féle gráfra (lásd 1.



1. ábra



2. ábra

ábra) A. J. HOFFMAN és R. R. SINGLETON [4] megmutatták, hogy $k = 7$-re is elérhető az egyenlőség (1.1)-ben, és bebizonyították, hogy a $k = 2, 3$ és 7 értékeken kívül legfeljebb még $k = 57$-re létezhet $k^2 + 1$ szögpontú, k-adfokú, reguláris, 2 átmérőjű gráf; hogy valóban létezik-e ilyen gráf $k = 57$-re, az nyitott kérdés.

Mivel ismeretes, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros kell, hogy legyen, tehát ha n és k páratlanok, akkor (1.1)-ben nem állhat egyenlőség; ez esetben kell a gráfban lenni legalább egy legfeljebb $k - 1$ fokú pontnak és így ha n és k páratlanok, akkor az

$$n \leqq k(k-1) + 1 \tag{1.1'}$$

egyenlőtlenségnek kell fennállni. Az (1.1') egyenlőtlenség teljes általánosságban szintén nem javítható, mert például (1.1')-ben egyenlőség áll fenn, ha $k = 3$, $n = 7$ (lásd 2. ábra). Mindhárom példaképpen említett gráf egyben minimális élszámú is és így $F_2(5,2) = 5$, $F_2(10,3) = 15$, $F_2(7,3) = 9$. Az első két esetben ez az alábbi 1. tételből következik; azt, hogy $F_2(7,3) = 9$, később fogjuk bizonyítani.

A mondottakból az is látszik, hogy ha $k(n)$ jelöli azt a legkisebb k számot, amelyre létezik n szögpontú 2, átmérőjű gráf, amelyben a szögpontok fokának maximuma k-val egyenlő, akkor $k(n)$ nem monoton függvénye n-nek, ugyanis $k(9) = 4$ de $k(10) = 3$. Mindenesetre látható (1.1)-ből, hogy teljesülnie kell a $k(n) \geqq \sqrt{n-1}$ egyenlőtlenségnek.

Most be fogjuk bizonyítani a következő tételt.

1. Tétel. *Fennáll az*

$$F_2(n,k) \geqq \frac{\binom{n}{2}}{k} = \frac{n(n-1)}{2k} \tag{1.2}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Legyen G_n egy n szögpontú 2 átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maximuma k. Legyen G_n éleinek száma N.

Számoljuk meg a legfeljebb 2 hosszúságú utak számát G_n-ben. 1 hosszúságú út nyilván N számú van; olyan 2 hosszúságú út, amely egy kijelölt élt tartalmaz, nyilván legfeljebb $2(k-1)$ van; ilyen módon, figyelembe véve, hogy minden 2 hosszúságú út két élt tartalmaz és így az előbb kétszer lett számolva, a 2 hosszúságú utak száma legfeljebb $(k-1)N$, vagyis a legfeljebb 2 hosszúságú utak száma legfeljebb kN. Mármost bármely két pontot összeköt legfeljebb 2 hosszúságú út és így kell, hogy teljesüljön a $kN \geqq \binom{n}{2}$ egyenlőtlenség; ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

Az (1.2) egyenlőtlenség teljes általánosságban nem javítható, hiszen az $n = 5$, $k = 2$ esetben $\frac{n(n-1)}{2k} = 5$ és az ötszögpontú körnek valóban 5 éle van, vagy pl. $n = 10$, $k = 3$ esetben $\frac{n(n-1)}{2k} = 15$ és az 1. ábrán látható Petersen-gráfnak valóban 15 éle van.

Az (1.2) egyenlőtlenség $F_2(7,3)$-ra a 7 alsó korlátot adja. Ez azonban nem érhető el. Ugyanis mivel a páratlan fokú pontok száma minden gráfban páros kell, hogy legyen, egy 7 szögpontú gráfban nem lehet minden pont foka 3. Egy 7 szögpontú, 2 átmérőjű gráfban, amelynek pontjai fokának maximuma 3, kell tehát, hogy legyen legalább egy másodfokú pont. Az ugyanis nyilvánvaló, hogy első fokú pont nem lehetséges, hiszen egy gráfban, amelyben a pontok foka legfeljebb 3, egy első fokú pontból legfeljebb 5 pont érhető el legfeljebb 2 hosszúságú úttal. Ha csak egy másodfokú pont volna, akkor a gráf éleinek száma $\frac{6 \cdot 3 + 2}{2} = 10$ volna. Ha viszont egynél több másodfokú pont van, akkor a másodfokú pontok száma 3 vagy 5 volna. Az első esetben a gráfnak $\frac{4 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{2} = 9$ éle van. Ez valóban lehetséges; egy ilyen (2 átmérőjű) gráfot ábrázol a 2. ábra. Ha 5 másodfokú pont volna, akkor az élek száma $\frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{2} = 8$ volna. Az ilyen gráf azonban nem lehet 2 átmérőjű; ugyanis mivel egy másodfokú pontból, amely egy k_1 és egy k_2 fokú ponttal van összekötve, legfeljebb 2 hosszúságú úttal legfeljebb $k_1 + k_2$ pontba lehet eljutni, tehát bármely másodfokú pontnak össze kellene kötve lennie a két harmadfokú ponttal, de ez lehetetlen, mert akkor e pontok nem harmad-, hanem ötödfokúak lennének.

Így tehát $F_2(7, 3) \geqq 9$ és mivel a 2. ábrán látható gráfnak 9 éle van, tehát $F_2(7, 3) = 9$.

Megjegyzendő, hogy az (1.1) egyenlőtlenség az 1. tételből is levezethető. Ugyanis egy n szögpontú gráfnak, amelyben a pontok foka legfeljebb k, legfeljebb $\frac{nk}{2}$ éle van; így tehát 2 átmérőjű n szögpontú gráf, amelyben a pontok fokának maximuma k, csak akkor létezhet az 1. tétel szerint, ha $\frac{nk}{2} \geqq \frac{n(n-1)}{2k}$ tehát ha $k^2 \geqq n-1$, vagyis ha (1.1) fennáll. Az (1.2) bizonyításából egyébként az is leolvasható, hogy (1.2)-ben egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha létezik n szögpontú k-adfokú reguláris 2 átmérőjű gráf, tehát ha $\frac{nk}{2} = \frac{n(n-1)}{2k}$, vagyis ha $k^2 = n-1$, vagyis ha (1.1)-ben egyenlőség áll fenn. Emellett az is látható a bizonyításból, hogy ha e feltétel teljesül és létezik $\frac{n(n-1)}{2k}$ élű 2 átmérőjű n szögpontú reguláris k-adfokú gráf, úgy abban bármely két pont egy és csak egy legfeljebb 2 hosszúságú úttal van összekötve; az ilyen gráf tehát sem háromszöget, sem négyszöget nem tartalmaz.

Az 1. tétel szerint

$$\frac{F_2(n,k)\,k}{n(n-1)} \geqq \frac{1}{2}. \tag{1.3}$$

A 2. §-ban be fogjuk bizonyítani, hogy az 1. tétel abban az értelemben aszimptotikusan pontos, hogy megadható k_j, n_j számpároknak ($j = 1, 2, \ldots$) olyan végtelen sorozata, hogy $n_j \to +\infty$ (és így természetesen $k_j \to +\infty$) és ugyanakkor

$$\lim_{j\to+\infty} \frac{F_2(n_j, k_j)\cdot k_j}{n_j(n_j-1)} = \frac{1}{2}. \tag{1.4}$$

Mint fentebb rámutattunk, (1.2)-ben egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $k = \sqrt{n-1}$. Ha tehát $k > \sqrt{n-1}$, akkor szükségképpen $F_2(n, k) > \frac{n(n-1)}{2k}$. Most be fogjuk bizonyítani, hogy ha k lényegesen nagyobb, mint $\sqrt{n-1}$, akkor $F_2(n, k)$ nemcsak nagyobb kell, hogy legyen, mint $\frac{n(n-1)}{2k}$, hanem e számnak közel a kétszeresénél is nagyobbnak kell lennie. Ezt fejezi ki a

2. Tétel. *Legyen* $k^2 > 8n$, *akkor*

$$F_2(n,k) > \frac{n(n-1)}{k+\frac{8n}{k}}. \tag{1.5}$$

Megjegyzés. A 2. §-ban meg fogjuk mutatni, hogy a 2. tétel aszimptotikusan pontos.

A 2. tétel bizonyítása. Legyen G_n egy n szögpontú 2 átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maximuma k. Jelölje r a G_n gráf azon pontjainak számát, melyek foka $> k/2$; magukat e pontokat jelöljék $P_1, P_2, \ldots, P_r$. Legyenek $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-r}$ a G_n gráf többi pontjai. Jelölje N a G_n gráf éleinek számát. Jelölje x_j' G_n azon éleinek számát, amelyek egyik végpontja P_j, másik végpontja pedig a $Q_1, \ldots, Q_{n-r}$ pontok egyike; jelölje továbbá y_h a G_n gráf azon éleinek a számát, amelyek egyik végpontja Q_h másik végpontja pedig a $Q_1, \ldots, Q_{h-1}, Q_{h+1}, \ldots, Q_{n-r}$ pontok egyike. Akkor

$$(1.6)\qquad \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n-r} y_h + \sum_{j=1}^{r}\binom{x_j'}{2} + \sum_{h=1}^{n-r}\binom{y_h}{2} \geqq \binom{n-r}{2};$$

ugyanis bármely Q_i és Q_j $(i \neq j)$ pont vagy egy éllel van összekötve, vagy egy $Q_i P_h Q_j$ 2 hosszúság, úttal, vagy egy $Q_i Q_h Q_j$ $(h \neq i,\ h \neq j)$ 2 hosszúságú úttal. Tehát tekintve, hogy $x_j' \leqq k$ $(j = 1, \ldots, r)$ és $y_h \leqq \frac{k}{2}$ $(h=1, \ldots, n-r)$,

$$(1.7)\qquad \frac{k}{2}\sum_{h=1}^{n-r} y_h + k\sum_{j=1}^{r} x_j' > (n-r)(n-r-1).$$

Mivel

$$\sum_{j=1}^{r} x_j' + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n-r} y_h \leqq N,$$

tehát azt kaptuk, hogy

$$(1.8)\qquad kN \geqq (n-r)(n-r-1) > n(n-1) - 2rn.$$

Ma̋rmost nyilván

$$(1.9)\qquad \frac{rk}{2} \leqq 2N$$

és így

$$N > \frac{n(n-1)}{k + \frac{8n}{k}}.$$

Ezzel a 2. tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzendő, hogy az (1.5) egyenlőtlenség az $n - 1 \leqq k^2 \leqq 8n$ esetben is érvényes, ez esetben azonban nem mond újat az 1. tétellel szemben, mert ebben az esetben kisebb alsó korlátot ad meg $F_2(n, k)$-ra, mint az 1. tétel; ezért mondtuk ki a 2. tételt csak $k^2 > 8n$-re.

A 2. tételt kifejezhetjük a következő alakban is: *Ha* $k^2 \geqq 8n\lambda$, *ahol* $\lambda > 1$, *akkor*

$$(1.10)\qquad F_2(n, k) \geqq \frac{n(n-1)}{k\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)}.$$

Ilyen módon a 2. tételből következik, hogy ha k_j és n_j úgy tartanak végtelenhez, hogy

$$(1.11)\qquad \lim_{j\to+\infty} \frac{k_j^2}{n_j} = +\infty,$$

akkor

$$\liminf_{j\to+\infty} \frac{F_2(n_j, k_j)\, k_j}{n_j(n_j - 1)} \geqq 1.$$

A 2. §-ban meg fogjuk mutatni, hogy a k_j és n_j számsorozatok megválaszthatók oly módon, hogy teljesüljön az (1.11) feltétel és amellett fennálljon, hogy

$$(1.12)\qquad \lim_{j\to+\infty} \frac{F_2(n_j, k_j)\, k_j}{n_j(n_j - 1)} = 1.$$

Az (1.5) egyenlőtlenség tehát aszimptotikusan pontos, ha $\frac{k^2}{n} \to +\infty$.

2. §. Közel extremális 2 átmérőjű gráfok konstrukciója

Annak bizonyításához, hogy az 1. tétel aszimptotikusan pontos, a következő lemmára lesz szükségünk .

1. lemma. *Ha P tetszőleges prímszámhatvány, létezik olyan $n = P^2 + + P + 1$ szögpontú 2 átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maximuma $P + 1$.*

Megjegyzés. Az 1. lemma szerint létező gráf éleinek száma nyilván $\leq \frac{(P+1)(P^2+P+1)}{2}$, tehát az 1. lemma szerint, ha P prímszámhatvány, akkor

$$\frac{F_2(P^2+P+1, P+1)(P+1)}{(P^2+P+1)(P^2+P)} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2P}$$

és így, ha k_j a $P_j + 1$ alakú számokon fut végig, ahol P_j prímszámhatvány, és $n_j = P_j^2 + P_j + 1$, akkor (1.4) fennáll.

Az 1. lemma bizonyítása. Legyen $GF(P)$ egy P elemű véges test (Galois test). Legyen PG $(P, 2)$ az ezen test segítségével konstruált véges projektív (Desargues-féle) síkgeometria. A $PG(P, 2)$ geometria „pont"-jait homogén koordináták segítségével adjuk meg, vagyis e geometria pontjait az (a, b, c) elemhármasok reprezentálják, ahol a, b, c $GF(P)$ elemei, amelyek nem mindhárman egyenlők O-val (a $GF(P)$ test zérus-elemével). Az (a, b, c) és $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ elemhármasok, ahol λ a $GF(P)$ test egy O-tól különböző tetszőleges eleme, feltevés szerint ugyanazon pontot határozzák meg. Ilyen módon $PG(P, 2)$ különböző pontjainak száma $\frac{P^3-1}{P-1} = P^2 + P + 1$. A PG $(P, 2)$ geometria egy „egyenesén" azon (x, y, z) koordinátákkal bíró pontok halmazát értjük, amelyek eleget tesznek az $ax + by + cz = O$ egyenletnek, ahol a, b, c $GF(P)$ tetszőleges adott elemei, amelyek nem mindhárman egyenlők O-val; az a, b, c elemhármast az előbb definiált egyenes (vonal-) koordinátáinak nevezzük és az egyenest röviden $[a, b, c]$-vel jelöljük. Az $[a, b, c]$ és $[\lambda a, \lambda b, \lambda c]$ egyenesek, ahol λ $GF(P)$ egy O-tól különböző tetszőleges eleme, nyilván azonosak. Ilyen módon $PG(P, 2)$-ben $P^2 + P + 1$ különböző egyenes van. Ha $ax + by + + cz = O$, akkor azt mondjuk, hogy az (x, y, z) pont rajta fekszik az $[a, b, c]$ egyenesen (ill., hogy az $[a, b, c]$ egyenes átmegy az (x, y, z) ponton). Nyilvánvaló, hogy ez esetben az is igaz, hogy az (a, b, c) pont rajta fekszik az $[x, y, z]$ egyenesen (ill. az $[x, y, z]$ egyenes átmegy az (a, b, c) ponton). Könnyen beláthatók a következő állítások:

1. Bármely egyenesen $P + 1$ pont fekszik.
2. Bármely két különböző egyenesnek egy és csak egy közös pontja van.
3. Bármely két különböző ponton egy és csak egy egyenes megy át.

Most definiáljuk $PG(P, 2)$ pontjainak és egyeneseinek egy kölcsönösen egyértelmű egymáshoz rendelését a következőképpen: az (a, b, c) ponthoz hozzárendeljük az $[a, b, c]$ egyenest és megfordítva. Jelöljük a pontokat nagy betűkkel, az egyeneseket görög betűkkel, a leképezést, amely egy ponthoz egy egyenest ill. egy egyeneshez egy pontot rendel, T-vel, vagyis ha az A ponthoz az α egyenes van hozzárendelve, akkor azt írjuk, hogy $\alpha = TA$, ill. $A = T\alpha$. Könnyen belátható, hogy e leképezés a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1'. Ha a B pont hozzátartozik az $\alpha = TA$ egyeneshez, akkor az A pont is hozzátartozik a $\beta = TB$ egyeneshez.

2'. Ha C a TA és TB egyenesek közös pontja, akkor TC azonos az A és B pontokon átmenő egyenessel. Ha az α és β egyenesek közös pontját $\alpha \cdot \beta$-val, az A és B pontokon átmenő egyenest $A \cdot B$-vel jelöljük, akkor tehát

$$TA \cdot TB = T(A \cdot B) .$$

3'. Egy tetszőleges α egyenes pontjaihoz rendelt egyenesek együttvéve lefedik (tartalmazzák) a geometria összes pontjait, mégpedig az $A = T\alpha$ pont kivételével minden pont egyszeresen van lefedve, az $A = T\alpha$ pont viszont $P + 1$-szeresen.

4'. Az $A = (a, b, c)$ pont akkor és csak akkor fekszik rajta a TA egyenesen, ha $a^2 + b^2 + c^2 = O$.

Mármost legyenek a $G[P]$ gráf szögpontjai $PG(P, 2)$ pontjai. Az $A = (a, b, c)$ és $A' = (a', b', c')$ (különböző) pontokat $G[P]$-ben akkor és csak akkor kötjük össze egy éllel, ha A' rajta fekszik a TA egyenesen (ill. A a TA' egyenesen), vagyis, ha $aa' + bb' + cc' = O$. A fent mondottak szerint e gráfnak a következő tulajdonságai vannak:

I. $G[P]$ pontjainak száma $P^2 + P + 1$.

II. $G[P]$-ben minden pont foka $P + 1$ vagy P. (Az $A = (a, b, c)$ pont foka $P + 1$, ill. P aszerint, hogy A nem fekszik rajta, ill. rajta fekszik a TA egyenesen, tehát aszerint, hogy $a^2 + b^2 + c^2 \neq O$ vagy $= O$.) Ilyen módon $G[P]$ éleinek száma nem lehet nagyobb, mint $1/2(P + 1)(P^2 + P + 1)$.

III. $G[P]$ átmérője 2-vel egyenlő.

IV. $G[P]$ nem tartalmaz négyszöget.

I. és II. nyilvánvalóak. III. a következőképpen látható be: ha A és B tetszőleges különböző pontok, A és B összeköthetők az ACB úttal, ahol $C = TA \cdot TB$. Ilyenmódon $G[P]$ rendelkezik az 1. lemmában felsorolt tulajdonságokkal és így az 1. lemmát bebizonyítottuk.

A IV. tulajdonság a következőképpen látható be. Ha az $ABCD$ négyszög $G[P]$-hez tartoznék, akkor a TA és TC egyenesneknek B és D egyaránt közös pontjuk volna, ami nem lehetséges, ha az A, B, C, D pontok mind különbözőek.

Most bebizonyítjuk, hogy a 2. tétel is aszimptotikusan pontos a $\frac{k^2}{n} \to +\infty$ esetben. Legyen P megint egy primszámhatvány. Legyen n egy tetszőleges pozitív egész szám, amelynek $P^2 + P + 1$ valódi osztója; pl. legyen $n = s(P^2 + P + 1)$ ahol $s \geq 2$ egész.

Mármost a G_n^* gráfot a következőképpen konstruáljuk meg. Legyenek G_n^* pontjai egyrészt a $PG(P, 2)$ véges geometria pontjai (ezeket G_n^* első fajú pontjainak nevezzük), másrészt az (σ, j) elempárok, ahol σ a $PG(P, 2)$ geometria egy tetszőleges egyenese és j az $1, 2, \ldots, s - 1$ számok egyike (ezeket G_n^* másodfajú pontjainak nevezzük). Ilyen módon G_n^* pontjainak száma $(P^2 + P + 1) + (s - 1)(P^2 + P + 1) = n$. Mármost két első fajú pontot kössünk egy éllel össze akkor, ha a megfelelő pontok az 1. lemmában konstruált $G[P]$ gráfban össze vannak kötve; vagyis ha a két szóban forgó elsőfajú pont (a, b, c) és (a', b', c') az 1. lemma bizonyításában használt jelölés mellett, akkor e pontokat akkor és csak akkor kötjük össze, ha $aa' + bb' + cc' = O$. Másrészt ha (a, b, c) G_n^* egy elsőfajú pontja és (α, j) egy másodfajú pontja, ahol $\alpha = [x, y, z]$ akkor e pontokat (j értékére való tekintet nélkül) akkor és csak akkor kötjük össze egy éllel, ha az (a, b, c) pont $PG[P, 2]$-ben rajta fekszik az α egyenesen, vagyis ha $ax + by + cz = O$.

Másodfajú pontok G_n^*-ban ne legyenek egymással összekötve. Az így definiált G_n^* gráfról először bebizonyítjuk, hogy átmérője 2. Ugyanis két elsőfajú pont összeköthető egy legfeljebb 2 hosszúságú úttal, mivel G_n^*-nak az elsőfajú pontokból álló részgráfja izomorf az 1. lemma bizonyítása során konstruált $G[P]$ gráffal, amelyről láttuk, hogy 2 átmérőjű. Másrészt két másodfajú pont mindig összeköthető egy 2 hosszúságú úttal; ha ugyanis a két másodfajú pont (α, j) és (β, h) akkor vagy $\beta = \alpha$ és $j \neq h$, mely esetben mindkét pont össze van kötve G_n^* összes olyan (elsőfajú) (a, b, c) pontjával, amelyre az (a, b, c) pont $PG[P, 2]$-ben rajta fekszik az α egyenesen. Ha viszont $\alpha \neq \beta$, akkor (α, j) és (β, h) össze vannak kötve G_n^* azon (a, b, c) elsőfajú pontjával, ahol (a, b, c) az α és β egyenesek metszéspontja $PG[P, 2]$-ben.

Most már csak azt kell bebizonyítanunk, hogy bármely elsőfajú pont bármely másodfajú ponttal össze van kötve G_n^*-ban egy legfeljebb 2 hosszúságú úttal. Legyen (a, b, c) G_n^* egy tetszőleges elsőfajú pontja és (α, j) egy tetszőleges másodfajú pontja. Két esetet különböztetünk meg. Ha az (a, b, c) pont $PG(P, 2)$-ben rajta fekszik az $\alpha = [a', b', c']$ egyenesen, akkor a szóban forgó két pont G_n^*-ban éllel van összekötve. Ha viszont (a, b, c) nem fekszik rajta az $\alpha = [a', b' c']$ egyenesen, akkor legyen β az $[a, b, c]$ egyenes és legyen (x, y, z) az α és β egyenesek közös pontja. Akkor (x, y, z) rajta fekszik a $\beta = [a, b, c]$ egyenesen, tehát $ax + by + cz = O$ és így az (x, y, z) pont össze van kötve (a, b, c)-vel G_n^*-ban; másrészt (x, y, z) rajta fekszik az $\alpha = [a', b', c']$ egyenesen is, tehát $a'x + b'y + c'z = O$ és így az (x, y, z) elsőfajú pont össze van kötve az (α, j) másodfajú ponttal is, vagyis (α, j)-ből (a, b, c)-be (x, y, z)-n keresztül vezet egy 2 hosszúságú út. Ezzel bebizonyítottuk, hogy G_n^* 2 átmérőjű. Most számítsuk ki G_n^* pontjai fokának maximumát, amit k-val jelölünk és becsüljük meg G_n^* éleinek számát, amit N-nel jelölünk. Egy elsőfajú pont nyilván legfeljebb $P + 1$ elsőfajú ponttal és $(s - 1)(P + 1)$ másodfajú ponttal van összekötve, tehát foka legfeljebb $s(P + 1)$. Egy másodfajú pont viszont pontosan $P + 1$ elsőfajú ponttal van összekötve; ilyen módon $k = s(P + 1)$. Másrészt az elsőfajú pontokat összekötő élek száma egyenlő $G[P]$ éleinek számával, tehát legfeljebb $\frac{1}{2}(P + 1)(P^2 + P + 1)$, míg az elsőfajú pontokat másodfajú pontokkal összekötő élek száma $(P^2 + P + 1)(P + 1)(s - 1)$ tehát

$$N \leqq (P^2 + P + 1)(P + 1)\left(s - \frac{1}{2}\right).$$

Így tehát, mivel $P^2 + P + 1 \geqq 7$

$$\frac{Nk}{n(n-1)} \leqq \frac{(P^2 + P + 1)(P + 1)^2 s \left(s - \frac{1}{2}\right)}{s(P^2 + P + 1) \cdot [s(P^2 + P + 1) - 1]} \leqq 1 + \frac{1}{P + 1}.$$

Ennélfogva, ha $k_j = s_j(P_j + 1)$ és $n_j = s_j(P_j^2 + P_j + 1)$ ahol P_j prímszámhatvány, akkor

$$\frac{F_2(n_j, k_j)\, k_j}{n_j(n_j - 1)} \leqq 1 + \frac{1}{P_j + 1}, \tag{2.1}$$

vagyis ha $P_j \to +\infty$, akkor

$$\limsup_{j \to +\infty} \frac{F_2(n_j, k_j)\, k_j}{n_j(n_j - 1)} \leqq 1. \tag{2.2}$$

Mármost, figyelembe véve, hogy

$$\frac{k_j^2}{n_j} > s_j,$$

tehát, ha $s_j \to +\infty$, akkor a 2. tétel szerint

$$\liminf_{j \to +\infty} \frac{F_2(n_j, k_j)\, k_j}{n_j(n_j - 1)} \geqq 1 \tag{2.3}$$

és így (2.2)-ből és (2.3)-ból következik, hogy

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{F_2(n_j, k_j)\, k_j}{n_j(n_j - 1)} = 1 \quad \text{ha } P_j \to +\infty \text{ és } s_j \to +\infty. \tag{2.4}$$

A 2. tétel tehát aszimptotikusan pontos, ha $\frac{k^2}{n} \to +\infty$; a fent konstruált példa azonban nem zárja ki, hogy a 2. tétel némileg javítható legyen, ha $\frac{k^2}{n}$ nem nagy szám. A

$$\liminf_{\frac{k^2}{n} \leqq c} \frac{F_2(n, k)\, k}{n(n - 1)} = g(c)$$

függvény pontos értékét ($c > 1$) nem ismerjük; az 1. és 2. tételből és a fenti gráf-konstrukcióból csak annyi következik, hogy

$$g(c) \geqq \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1 + \frac{8}{c}}\right), \quad \text{ha} \quad c > 1.$$

Meg kívánjuk még jegyezni, hogy ha $s = 2$ és a G_n^* gráfból elhagyjuk az elsőfajú pontokat összekötő éleket, azt a páros körüljárású gráfot kapjuk, amelyet KÁRTESZI FERENC nemrégiben [2] példaként adott meg arra, hogy létezik $2(P^2 + P + 1)$ pontból álló $P + 1$-fokú reguláris gráf, amely nem tartalmaz 6-nál kevesebb élből álló körutat (P prímszámhatvány).

3. §. Néhány további probléma

Eddig $F_2(n, k)$-t azon feltevés mellett vizsgáltuk hogy k viszonylag kicsi n-hez képest (de persze $\sqrt{n-1}$-nél nagyobb (1.1)-re való tekintettel). Most vizsgáljuk meg $F_2(n, k)$-t azon feltevés mellett, hogy k kevéssel kisebb

n-nél; pontosabban vizsgálni fogjuk $F_2(n, n-d)$ értékét, ahol $d \geqq 1$ rögzített egész szám és $n = d+2, d+3, \ldots$. Nyilvánvaló, hogy k minden értékére $F_2(n, k) \geqq n-1$, hiszen egy 2 átmérőjű gráf mindenképpen összefüggő és egy n szögpontú összefüggő gráf legalább $n-1$ élt tartalmaz, és akkor és csak akkor tartalmaz pontosan $n-1$ élt, ha ún. „fa". Mármost könnyen belátható, hogy $F_2(n, n-1) = n-1$, hiszen ha a G_n n-szögpontú gráfban van egy $n-1$-fokú pont, akkor a gráf 2 átmérőjű (ún. „csillag"), ehhez további élekre nincs is szükség. Az is könnyen belátható, hogy $F_2(n, n-2) = 2n-4$; a legegyszerűbb n szögpontú 2 átmérőjű gráfot, amelyben a pontok fokának maximuma $n-2$, úgy kapjuk, hogy pl. a P_1 és P_2 pontokat összekötjük a $P_3, P_4, \ldots, P_n$ pontok mindegyikével.

Az első nem triviális eset a $d = 3$ eset.

3. Tétel. *Ha $d \geqq 3$ és $n \geqq d+2$, akkor*

$$F_2(n, n-d) \geqq F_2(n, n-4) = F_2(n, n-3) = 2n-5\,. \tag{3.1}$$

Megjegyzés. A 3. tétel azért meglepő, mert (3.1) szerint

$$F_2(n, n-3) < F_2(n, n-2)\,, \tag{3.2}$$

ami azt mutatja, hogy $F_2(n, k)$ rögzített n mellett k-nak nem monoton csökkenő függvénye, ami pedig szemléletes meggondolás alapján plauzibilisnek tűnhetne.

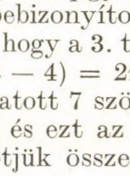
A 3. tétel bizonyítása. A tételt indukcióval bizonyítjuk. n legkisebb számba jövő értéke $n = 5$; $n = 5$-re a tétel állítása nyilvánvalóan igaz, hiszen egy 5 szögpontú 2 átmérőjű gráf, amelyekben a pontok foka legfeljebb 2, nem lehet más, mint egy 5 szögpontú kör, és ennek éleinek száma $5 = 2.5 - 5$. Tegyük fel, hogy a tétel $n-1$-re igaz ($n \geqq 6$), és legyen G_n egy n szögpontú és 2 átmérőjű gráf, amelyben a pontok fokának maximuma $\leqq n-3$. Bebizonyítjuk, hogy akkor G_n-nek legalább $2n-5$ éle van. Ha egy ilyen gráfban minden pont foka legalább 4, akkor az élek száma legalább $2n$. Ha van 3-adfokú pont, de nincs alacsonyabb fokú pont, akkor legyen ez P_1 és a vele összekötött pontok P_2, P_3 és P_4. Ez esetben a $P_5, \ldots, P_n$ pontok mind elérhetők kell, hogy legyenek P_1-ből 2 hosszúságú úttal, tehát mindegyikük össze van kötve a P_2, P_3 ill. P_4 pontok egyikével és így e pontok fokának összege legalább $n-1$, tehát az összes fokok összege $\geqq n-1+3(n-3) = 4n-10$ és így az élek száma $\geqq 2n-5$. Ha viszont van első fokú pont, akkor a gráf nem lehet 2 átmérőjű, ha pontjainak fokszáma $\leqq n-3$. Ugyanis, ha pl. P_1 egy első fokú pont, amely csak a P_2 ponttal van összekötve, akkor, mivel P_2 legfeljebb $n-3$ fokú, P_1-ből legfeljebb $n-3$ pont érhető el legfeljebb 2 hosszúságú úttal. Tehát feltehetjük, hogy G_n-nek van másodfokú pontja. (Az indukciós feltevést csak ezen eset tárgyalásánál használjuk fel.)

Legyen e pont P_1 és a vele összekötött két pont P_2 és P_3. Akkor a G_n gráf további $n-3$ pontja mind vagy P_2-vel vagy P_3-mal össze kell, hogy kötve legyen. Tegyük fel, hogy van olyan P_1-től különböző pont, amely P_2-vel és P_3-mal is össze van kötve. Ez esetben a G_n gráfból P_1-et elhagyva egy $n-1$ szögpontú G_{n-1} gráfot kapunk amelynek átmérője 2. Ugyanis a P_2, P_3 pontpáron kívül nem lehet más pontpár, amely P_1-en át van összekötve legfeljebb 2 hosszúságú úttal és a P_2, P_3 pontpár feltevés szerint össze van kötve még egy másik 2 hosszúságú úttal is. Feltehetjük, hogy a P_1 elhagyásával nyert gráfban a pontok fokának maximuma $\leqq n-4 = (n-1)-3$. Ugyanis, ha nincs G_n-ben $n-3$ fokú pont, akkor ez nyilvánvaló. Ha van G_n-ben $n-3$ fokú pont, akkor két eset lehetséges vagy van a P_2 és P_3 pontoktól különböző $n - 3$ fokú pont, vagy nincs. Utóbbi esetben nyilvánvaló, hogy a P_1 elhagyásával származó gráfban a pontok fokának maximuma $\leq n - 4$, hiszen P_2 és P_3 foka P_1 elhagyásával eggyel csökken. Ha viszont van a P_2 és P_3 (és persze a P_1) pontoktól különböző $n - 3$ fokú pont, legyen ez P_4. Akkor az eredeti G_n gráfban az élek száma legalább $2 + 2(n - 3) - 1 = 2n - 5$, ugyanis a $P_4, \ldots, P_n$ pontok mindegyike vagy P_2-vel, vagy P_3-mal össze van kötve. Ez esetben tehát nincs mit bizonyítani. Tehát feltehetjük, hogy G_{n-1}-ben a pontok fokának maximuma legfeljebb $(n - 1) - 3$. Így, ha a 3. tétel $n - 1$-re érvényes, következik, hogy a P_1 elhagyásával nyert G_{n-1} gráfban legalább $2n - 7$ él és így magában G_n-ben legalább $2n - 5$ él van. Így tehát csak az az eset van hátra, amikor a $P_4, \ldots, P_n$ pontok mindegyike vagy csak P_2-vel vagy csak P_3-mal van összekötve.

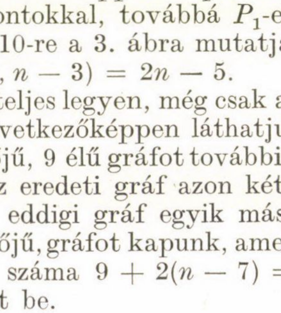
Mármost az nem lehetséges, hogy a $P_4, \ldots, P_n$ pontok mindegyike a P_2 és P_3 pontok közül ugyanazzal legyen összekötve, mert ez esetben e pont $n - 2$ fokú volna. Tehát kell lenni a $P_4, \ldots, P_n$ pontok közül olyannak, amely P_2-vel és olyannak is, amely P_3-mal van összekötve. De akkor a G_n gráfból a P_1, P_2, P_3 pontokat elhagyva egy összefüggő gráfot nyerünk, ugyanis két olyan pont, amelyek közül az egyik P_2-vel, a másik P_3-mal van összekötve, össze kell, hogy legyen kötve G_n-ben egy a P_1, P_2, P_3 pontokon át nem menő, legfeljebb 2 hosszúságú úttal. Ha meg két olyan pontot választunk, amelyek pl. P_2-vel vannak összekötve, akkor ezek bármelyike összeköthető egy a P_1, P_2, P_3 pontokat elkerülő, legfeljebb 2 hosszúságú úttal egy tetszőleges P_3-mal összekötött ponttal, és így e két pont egymással is összeköthető egy a P_1, P_2, P_3 pontokat elkerülő úttal. Mivel egy $n - 3$ szögpontú összefüggő gráf legalább $n - 4$ élt tartalmaz, maga G_n szükségképpen legalább $2 + n - 3 + n - 4 = 2n - 5$ élt tartalmaz. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $F_2(n, n - d) \geq 2n - 5$, ha $d \geq 3$, $n \geq d + 2$. Azonban lehet olyan n szögpontú 2 átmérőjű gráfot megadni, amelyben a pontok fokának maximuma $n - 3$ és az élek száma $2n - 5$. Egy ilyen gráfot a következőképpen kaphatunk. A P_1 és P_2 pontokat kössük össze a $P_5, \ldots, P_n$ pontokkal, továbbá P_1-et P_3-mal, P_2-t P_4-gyel és P_3-at P_4-gyel. E gráfot $n = 10$-re a 3. ábra mutatja be.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $F_2(n, n - 3) = 2n - 5$.

Ahhoz, hogy a 3. tétel bizonyítása teljes legyen, még csak azt kell belátni, hogy $F_2(n, n - 4) = 2n - 5$. Ezt a következőképpen láthatjuk be. Ha a 2. ábrán bemutatott 7 szögpontú, 2 átmérőjű, 9 élű gráfot további $n - 7$ ponttal egészítjük ki és ezt az $n - 7$ pontot az eredeti gráf azon két (harmadfokú) pontjával kötjük össze, amelyekkel az eddigi gráf egyik másodfokú pontja össze van kötve, egy n szögpontú 2 átmérőjű, gráfot kapunk, amelyben a pontok fokának maximuma $n - 4$ és az élek száma $9 + 2(n - 7) = 2n - 5$. Egy ilyen gráfot $n = 12$-re a 4. ábra mutat be.



3. ábra



4. ábra

Megjegyzendő, hogy a 3. ábrán bemutatott gráf ugyanazon elv szerint származtatható egy 5 szögpontú körből, mint a 4. ábrán bemutatott gráf a 2. ábrán látható gráfból. $F_2(n, n-d)$ általános kifejezését $d \geqq 5$-re nem ismerjük. $F_2(n, n-d)$ mellett kívánatos volna $F_2(n, [nc])$ $(0<c<1)$ aszimptotikus viselkedését is megvizsgálni. Valószínűnek látszik, hogy létezik a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_2(n, [nc])}{n} = h(c)$$

határérték $(0<c<1)$ és $h(c)$ monoton csökkenő és folytonos függvény, amelyre $h(1) = 2$ és $h(0) = +\infty$. A 2. tételből csak annyi következik, hogy

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{F_2(n, [nc])}{n} \geqq \frac{1}{c}, \quad \text{ha} \quad 0 < c < 1 .$$

Az $F_r(n, k)$ függvényt illetőleg, ha $r \geqq 3$, csak annyit jegyzünk meg, hogy (1.1) bizonyításához hasonló módon belátható, hogy ahhoz, hogy $F_r(n, k)$ egyáltalán értelmezve legyen (vagyis, hogy létezzék n szögpontú, r átmérőjű gráf, melyben a pontok fokának maximuma k), szükséges, hogy teljesüljön az

$$n \leqq 1 + k\,\frac{(k-1)^r - 1}{k-2}$$

egyenlőtlenség; továbbá az 1. tétel bizonyításához hasonlóan belátható, hogy

$$F_r(n, k) \geqq \frac{\binom{n}{2}(k-2)}{(k-1)^r - 1} .$$

Az eddigiekben azzal a kérdéssel foglalkoztunk, hogy mi az a legkisebb $N = F_2(n, k)$ szám, amelyre azon n szögpontú gráfok között, amelyekben a pontok fokának maximuma k és amelyek N élt tartalmaznak, *van legalább egy*, amely 2 átmérőjű. Kézenfekvő felvetni azt a kérdést is, hogy mi az a legkisebb $N = G_2(n, k)$ szám, amelyre *minden* olyan n szögpontú gráf legfeljebb 2 átmérőjű, amelyben a pontok fokának maximuma k és amely N élt tartalmaz. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor n páros. Ez esetben a kérdésnek csak akkor van értelme, ha $k \geqq \frac{n}{2}$. Ha ugyanis $k \leqq \frac{n}{2} - 1$, akkor megadható könnyen egy olyan n szögpontú gráf, amelyben minden pont foka k (tehát amely az adott fokszám-korlátozás mellett maximális számú élt tartalmaz) és amelynek átmérője $\geqq 3$; ez esetben tehát $G_2(n, k)$ nincs értelmezve.

Egy ilyen gráfot a következőképpen szerkeszthetünk. Legyen $n = 2m$. Legyenek $P_1, \ldots, P_m$ és $Q_1, \ldots, Q_m$ a gráf pontjai. Feltevés szerint $k \leqq m - 1$. A P_j pontot $(j=1, \ldots, m)$ kössük össze a $Q_{j+1}, \ldots, Q_{j+k}$ pontokkal, ahol az előforduló m-nél nagyobb indexek mod m redukálandók, tehát $Q_{m+h} = Q_h$. Ez esetben nyilván mindegyik P_j $(j = 1, \ldots, m)$ pont foka k, de hasonlóképpen mindegyik Q_h $(h = 1, \ldots, m)$ pont foka is k, ugyanis Q_h a P_{h-1}, $P_{h+2}, \ldots, P_{h+k}$ pontokkal van összekötve, ahol az indexek megint mod m redukálandók, tehát $P_{-j} = P_{m-j}$. Ez a gráf azonban nyilvánvalóan nem 2 átmérőjű, mivel egy P_i és egy Q_j pontot összekötő út mindig csak páratlan számú élből állhat és így, mivel P_1 és Q_1 nincsenek éllel összekötve, a gráf átmérője ≥ 3.

Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor n páratlan, $n = 2m + 1$. Meg fogjuk mutatni, hogy $G_2(n, k)$ csak akkor lehet értelmezve, ha $k \geq m + 1$, feltéve, hogy m páratlan, illetve, ha $k \geq m$, feltéve, hogy m páros. Ugyanis, ha $k \leq m - 1$, vizsgáljuk azt a gráfot, amelynek pontjai $P_1, \ldots, P_m$ és $Q_1, \ldots, Q_{m+1}$ és amelyben a P_j pont ($j = 1, \ldots, m$) a $Q_{j+1}, \ldots, Q_{j+k}$ pontokkal van összekötve (az $m + 1$-nél nagyobb indexek mod$(m + 1)$ redukálandók), és amelyben össze vannak kötve a Q_{2l-1}, Q_{2l} pontpárok, hacsak $2l \leq k$. Ha most k páros, akkor e gráf minden pontjának foka k, ha k páratlan, akkor minden pont foka k, kivéve a Q_k pontot. Mindkét esetben a gráf azon korlátozás mellett, hogy pontjai foka legfeljebb k, maximális számú élt tartalmaz. (Ugyanis, ha k és n páratlanok, akkor nem létezik n szögpontú k-adfokú reguláris gráf, hiszen a páratlan fokú pontok száma minden gráfban páros.) Azonban e gráfban a P_{k+1} és Q_{k+1} pontokat összekötő bármely út hossza legalább 3.

Ha $n = 2m + 1$ és $k = m$, akkor két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha m páratlan, akkor az előbbi konstrukcióval egy olyan gráfot nyerünk, amelyben a P_k pont kivételével minden pont foka k és P_k foka $k - 1$, és amelynek átmérője > 2, mivel a P_k és Q_k pontokat összekötő bármely út hossza legalább 3. Ha azonban m páros és $k = m$ akkor a fenti konstrukció egy 2 átmérőjű (reguláris) gráfra vezet.

A páros és páratlan n esetét összefoglalva tehát azt láttuk be, hogy $G_2(n, k)$ csak akkor lehet értelmezve, ha n páros és $k \geq \frac{n}{2}$, illetve ha $n = 2m + 1$, ahol m páratlan és $k \geq m + 1$, és végül, ha $n = 2m + 1$, ahol m páros és $k \geq m$.

Most bebizonyítjuk, hogy ez esetekben $G_2(n, k)$ valóban értelmezve van és meghatározzuk az értékét is.

4. tétel. *Ha $n - 2 \geq k \geq \frac{n}{2}$, továbbá ha $n = 2m + 1$, ahol m páros és $k = m$, akkor*

$$G_2(n, k) = \left\{ \frac{(n-2)k + (n-1)}{2} \right\}, \tag{3.3}$$

ahol $\{x\}$ a legkisebb egész számot jelöli, amely $\geq x$.

Bizonyítás. Legyen G_n egy n szögpontú gráf, amelyben a pontok foka $\leq k$ és az élek száma $N \geq \left\{ \frac{(n-2)k + (n-1)}{2} \right\}$. Legyenek $P_1, \ldots, P_n$ a G_n gráf szögpontjai és x_j a P_j pont foka. Akkor

$$x_1 + \ldots + x_n = 2N$$

és mivel $x_n \leq k$, tehát tetszőleges i-re és j-re ($i \neq j$)

$$x_i + x_j \geq 2N - (n-2)k \geq 2 \left\{ \frac{(n-2)k + (n-1)}{2} \right\} - (n-2)k .$$

Mármost bármely a pozitív egész számra $2\left\{\frac{a}{2}\right\} \geqq a$, tehát

$$2\left\{\frac{(n-2)k+(n-1)}{2}\right\} - (n-2)k \geqq n-1$$

és így

$$x_i + x_j \geqq n - 1 . \tag{3.4}$$

Ha P_i és P_j két olyan pontja a G_n gráfnak, amelyek nincsenek egy éllel összekötve, akkor (3.4) és a skatulya-elv szerint a többi $n-2$ pont között kell olyan P_h pontnak lenni, amely mindkettővel össze van kötve, vagyis a G_n gráf valóban 2 átmérőjű. Még csak azt kell kimutatnunk, hogy ha az élek száma $N < \left\{\frac{(n-2)k+(n-1)}{2}\right\}$, akkor nem bizonyos, hogy G_n 2 átmérőjű lesz. Legyen először $k < n-2$.

Vegyünk egy tetszőleges $n-2$ szögpontú G_{n-2} gráfot, amelyben a pontok fokának maximuma $k-1$. Ha $n-2$ vagy $k-1$ páros, akkor elérhető, hogy G_{n-2} csupa $k-1$ fokú pontból álljon; ha $n-2$ és $k-1$ páratlanok, akkor elérhető, hogy G_{n-2} $n-3$ darab $k-1$ fokú és egy $k-2$ fokú pontból álljon. Az első esetben G_{n-2} éleinek száma $\frac{(n-2)(k-1)}{2}$, az utóbbi esetben G_{n-2} éleinek száma $\frac{(n-3)(k-1)+(k-2)}{2}$ lesz. Azt, hogy egy ilyen gráfot mindig konstruálhatunk, a következő egyszerű lemmából láthatjuk be:

2. Lemma. *Legyenek m és l tetszőleges pozitív egész számok, $1 \leqq l \leqq m-1$. Akkor, ha m és l közül legalább az egyik páros, megadható olyan m szögpontú gráf, amelyben minden pont foka l, míg ha m és l mindketten páratlanok, megadható olyan m szögpontú gráf, amelyben $m-1$ pont foka l és egy pont foka $l-1$.*

Megjegyzés. A 2. lemma speciális esete a [3] dolgozatban szereplő általános tételnek, amely általában megadja annak szükséges és elégséges feltételét, hogy tetszőleges megadott fokszámokra létezzék egy gráf, melynek pontjai az előírt fokszámokkal bírnak. Mivel a nekünk szükséges speciális esetben a bizonyítás igen egyszerű, a teljesség kedvéért a 4. tétel bizonyításának befejezése után a 2. lemma egy közvetlen bizonyítását közöljük.

Mármost a keresett G_n gráfot a következőképpen konstruáljuk meg: G_n tartalmazza a G_{n-2} gráfot mint részgráfot és ezen kívül még két pontot, amelyek közül az egyik G_{n-2} tetszőlegesen kijelölt k pontjával, a másik pedig a többi $n-2-k$ pontjával és csak azokkal legyen összekötve. Akkor G_n átmérője nyilván legalább 3, pontjai fokának maximuma k, míg éleinek száma az első esetben

$$\frac{(n-2)(k-1)}{2} + n - 2 = \frac{(n-2)k+(n-2)}{2} ,$$

a második esetben

$$\frac{(n-3)(k-1)+(k-2)}{2}+n-2=\frac{(n-2)k+(n-3)}{2},$$

tehát mindkét esetben az élek száma $\left\{\frac{(n-2)k+(n-1)}{2}\right\}-1$. A $k=n-2$ eset egyszerűen elintézhető, mert $\left\{\frac{(n-2)(n-2)+(n-1)}{2}\right\}=\binom{n-1}{2}$ és ha G_n egy $n-1$ szögpontú teljes gráfból és egy izolált pontból áll, akkor nyilván nem is összefüggő, tehát nincs is átmérője.

Az $n=2m+1$, $k=m$ eset, ahol m páros, könnyen elintézhető. Ez esetben ugyanis

$$\left\{\frac{(n-2)k+(n-1)}{2}\right\}=\left\{\frac{nk}{2}\right\}=\frac{nk}{2},$$

vagyis csak azt kell kimutatni, hogy ha m páros szám, egy $2m+1$ szögpontú m rendű reguláris gráf mindig 2 átmérőjű. Ez azonban nyilvánvaló, hiszen ha P és P' egy ilyen gráf két pontja, amelyek nincsenek éllel összekötve, akkor, mivel mindkét pont foka m és a két ponton kívül a gráfnak $2m-1$ pontja van, kell lenni a gráfban legalább egy olyan Q pontnak, amely mind P-vel, mind pedig P'-vel össze van kötve egy éllel.

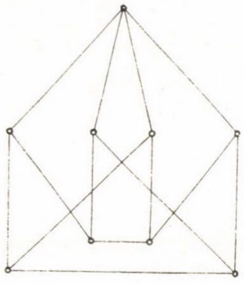
Ezzel a 4. tételt bebizonyítottuk.

A 2. lemma bizonyítása. Ha l páros, legyenek $P_1, \ldots, P_m$ a keresett gráf szögpontjai és kössük össze a P_i és P_j pontokat ($i \neq j$) egy éllel, akkor és csak akkor, ha van olyan h szám, hogy $j-i\equiv h \bmod m$ és $|h|\leq\frac{l}{2}$. Ennek a gráfnak nyilván minden pontjának foka l. Ha m páros és l páratlan, kössük össze egymással a P_i és P_j pontokat, ha van olyan h szám, hogy $j-i\equiv h \bmod m$ és $|h|\leq\frac{l-1}{2}$, továbbá kössük össze a P_i és $P_{i+\frac{m}{2}}$ pontokat $\left(i=1,\ldots,\frac{m}{2}\right)$. Ennek a gráfnak megint csak minden pontjának foka l. Ha m és l páratlanok, kössük össze egymással megint a P_i és P_j pontokat, ha $j-i\equiv h \bmod m$ és $|h|\leq\frac{l-1}{2}$, továbbá kössük össze a P_i és $P_{i+\frac{m-1}{2}}$ pontpárokat, ha $i=1,\ldots,\frac{m-1}{2}$. Ebben a gráfban a $P_1,\ldots,P_{m-1}$ pontok foka l, a P_m pont foka $l-1$ lesz. Így mindhárom esetben konstruáltunk egy a kívánt tulajdonságokkal bíró gráfot.

Ezzel a 2. lemmát bebizonyítottuk.

Az 1. Táblázat tartalmazza $F_2(n,k)$ értékeit az összes olyan (n,k) számpárokra, melyekre értelmezve van és melyekre $k<10$, $n\leq 10$.

Azt, hogy $F_2(9, 4) = 14$, az 5. ábrán látható gráf mutatja; $F_2(n, k)$ többi, a táblázatban szereplő értékei a dolgozatban bebizonyított tételek alapján könnyen igazolhatók.



5. ábra

1. táblázat

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1								
3		2							
4		4	3						
5		5	6	4					
6			7	8	5				
7			9	9	10	6			
8			12	11	11	12	7		
9				14	13	13	14	8	
10			15	16	15	15	15	16	9

IRODALOM

[1] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: „Asymmetric graphs" (sajtó alatt az *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*-ban).
[2] KÁRTESZI F.: „Egy kombinatorikus minimum problémáról". *Mat. Lapok* **11** (1960) 323—329.
[3] ERDŐS P.—GALLAI T.: „Gráfok előírt fokú pontokkal." *Mat. Lapok* **11** (1960) 264—274
[4] HOFFMAN, A. J.—SINGLETON, R. R.: „On Moore graphs with diameters 2 and 3." *IBM Journal of Research and Development* **4** (1960) 497—504.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ

P. ERDŐS и A. RÉNYI

Пусть $H_2(n,k)$ множество всех (неориентированных) графов G_n имеющих n заданных вершин, в которых максимум степени всех вершин ровно k и диаметр которых $\leqq 2$. Пусть $F_2(n,k) = \min N(G_n)$ для $G_n \in H_2(n,k)$, где $N(G)$ означает число ребер графа G. (В случае, если множество $H_2(n,k)$ пустой, положим $F_2(n,k) = +\infty$.) В работе доказаны следующие неравенства:

Теорема 1. $$F_2(n,k) \geqq \frac{n(n-1)}{2k}.$$

Теорема 2. $$F_2(n,k) \geqq \frac{n(n-1)}{k+\frac{8n}{k}}, \quad \textit{если} \quad k^2 > 8n.$$

Доказывается далее с помощью конструкции, что Теорема 1 в пределе для $n \to \infty$ не может быть улучшена, и Теорема 2 в пределе не может быть улучшена, если $\frac{k^2}{n} \to \infty$. Конструкция почти-экстремальных графов дана использованием конечных геометрий.

Возможная интерпретация задачи определения $F_2(n,k)$ следующая: Если хотим устанавливать сеть воздушных сообщений между аэропортами так, чтобы ни одного из аэропортов не было в непосредственной связи с более чем k с другими аэропортами, и чтобы было возможным ехать из каждого аэропорта в каждый другой непосредственно или с одной единственной пересадкой, тогда требуется найти минимальное число непосредственных связей с которыми такая сеть может быть осуществлена.

ON A PROBLEM IN THE THEORY OF GRAPHS

P. ERDŐS and A. RÉNYI

Abstract

Let $H_2(n,k)$ denote the set of all (non-directed) graphs G_n having n prescribed vertices, in which the maximum of the valencies of the vertices is equal to k, and the diameter of which is $\leqq 2$. We put $F_2(n,k) = \min N(G_n)$ $G_n \in H_2(n,k)$ where $N(G)$ denotes the number of edges of the graph G. (If $H_2(n,k)$ is empty we put $F_2(n,k) = +\infty$). The following inequalities are proved:

Theorem 1.

$$F_2(n,k) \geqq \frac{n(n-1)}{2k}.$$

Theorem 2.

$$F_2(n,k) \geqq \frac{n(n-1)}{k+\frac{8n}{k}} \quad \text{if} \quad k^2 > 8n\,.$$

It is shown further by effective construction that Theorem 1 is asymptotically best possible, and that Theorem 2 is also asymptotically best possible in the case $\frac{k^2}{n} \to +\infty$. The constructions are based on the use of finite geometries.

A possible interpretation of determining $F_2(n, k)$ is as follows: we want to establish a network of air connections between n airports, so that the maximal number of airports with which any given airport is connected by a (direct) connection is equal to k, further that it should be possible to travel from any given airport to any other either directly or by changing the plane exactly once; (it is supposed that each plane travels from an airport A to another airport B and back, without landing at intermediate places); the problem is to determine the minimal number of air connections with which such a communication network can be realized.