ÜBER RESTRIKTIVE LINEARE PARTIELLE DIFFERENTIAL-DIFFERENZENGLEICHUNGEN MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

von

TAMÁS FÉNYES

Einleitung

Die auf der Mikusińskischen Operatorenrechnung beruhende Theorie der Differentialgleichungen liefert eine sehr einfache und elegante Methode für die Lösung von linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bei vorgeschriebenen Anfangs- und Randbedingungen.

Laut [1] können wir die Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t)}{\partial \lambda^\mu \, \partial t^\nu} = \varphi(\lambda, t) \; ; \quad \lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2, 0 \leqq t < \infty \tag{1}$$

in der Operatorenform

$$a_m x^{(m)}(\lambda) + a_{m-1} x^{(m-1)}(\lambda) + \dots a_0 x(\lambda) = f(\lambda) \tag{2}$$

aufschreiben, wo

$$a_\mu = \alpha_{\mu n} s^n + \dots \alpha_{\mu 0} \qquad \mu = 0, 1, \dots, m,$$

und

$$f(\lambda) = \{\varphi(\lambda, t)\} + \sum_{\varkappa=0}^{n-1} s^{n-\varkappa-1} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \alpha_{\mu, n-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^\mu \, \partial t^\nu} \tag{3}$$

ist.

Die allgemeine Lösung der Operatorendifferentialgleichung (2) kann als Summe einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung geschrieben werden. Die Anzahl der willkürlichen Konstanten die letztere allgemeine Lösung enthält ist gleich der Anzahl der logarithmischen Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (2). (Siehe [1]). Insofern die Anzahl dieser positiv, gleich N ist, müssen wir für das Gewährleisten der Eindeutigkeit der Lösung für (1) N Randbedingungen vorschreiben; dadurch können wir die Werte der Konstanten bestimmen. In diesem Artikel werden wir uns mit den Anfangsbedingungen im Einzelnen beschäftigen. Aus (3) ist es zu ersehen, dass die Anfangsbedingungen von (1) in die Differentialgleichung (2) eintreten und allgemein in der Form

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \alpha_{\mu, n-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^\mu \, \partial t^\nu} = g_\varkappa(\lambda) , \qquad \varkappa = 0, 1, \dots, n-1 , \tag{4}$$

vorzuschreiben sind. (Das bedeutet, dass wir die Funktionen $g_\varkappa(\lambda)$ als Angangsbedingungen vorschreiben müssen.) In speziellen Fällen ist die Angabe der Funktionen $g_\varkappa(\lambda)$ äquivalent dem Vorschreiben der Anfangsbedingungen in der sogenannten Cauchy'schen Gestalt

$$\frac{\partial^\varkappa x(\lambda, 0)}{\partial t^\varkappa} = h^\varkappa(\lambda)\,; \qquad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{5}$$

In diesen Fällen bezeichnen wir die Differentialgleichung (1) als „nicht restriktiv". Im entgegengesetzten Falle ist (1) „restriktiv". Mikusinski hat diesbezüglich folgendes Kriterium bewiesen [1]:

Die Gleichung (1) ist dann und nur dann nicht restriktiv, wenn in ihr keine Ableitung höchster Ordnung nach t vorkommt, die eine gemischte Ableitung ist.

WLOKA hat in seinem grundlagenden Artikel [2] bewiesen, dass man die Mikusińskische Theorie der Differentialgleichungen auch auf die partielle Differential-Differenzengleichungen vom Typ

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t)}{\partial\lambda^\mu\, \partial t^\nu} + \sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{n_1} \beta_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t-\tau)}{\partial\lambda^\mu\, \partial t^\nu} = \varphi(\lambda, t)\,, \tag{6}$$

$\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$, $0 \leqq t < \infty$, $\tau > 0$, und $x(\lambda, t) = 0$, wenn $t < 0$,

erweitern kann, ja sogar man kann sie durch die Operatorenmethode ähnlich wie die Gleichung (1) lösen.

WLOKA hat gezeigt, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (6) von der Form

$$v = \sum_{i=-q}^{\infty} a_i(s)\, h^{\frac{\tau}{p} i}$$

sind, wobei $a_i(s)$ eine algebraische Funktion des Differentialoperators s (siehe [2]), und h der Verschiebungsoperator ist. Enthält diese Entwicklung von v eine Potenz von h mit einem negativen Exponenten, so ist sie kein Logarithmus, enthält sie keine, so ist sie ein Logarithmus, oder kein Logarithmus, je nachdem $a_0(s)$ ein Logarithmus ist, oder nicht. Betreffs weiterer Einzelheiten weisen wir auf die Arbeit [2] von WLOKA hin, bemerken wir jedoch, dass bei der Auflösung von (6) die Anfangsbedingungen, analog den Bedingungen (4) in der allgemeinen Form

$$\tag{7} \begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \alpha_{\mu, n-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial\lambda^\mu\, \partial t^\nu} = g^1_\varkappa(\lambda)\,, \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, n-1\,, \\ &\sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \beta_{\mu, n_1-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial\lambda^\mu\, \partial t^\nu} = g^2_\varkappa(\lambda)\,, \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, n_1-1 \end{aligned}$$

vorgeschrieben werden müssen. WLOKA hat zahlreiche numerische Beispiele ausgearbeitet, die sich jedoch ausnahmslos auf solche Gleichungen beziehen, für welche die allgemeinen Anfangsbedingungen (7) durch die einfacheren

$$\frac{\partial^\varkappa x(\lambda, 0)}{\partial t^\varkappa} = h_\varkappa(\lambda)\,, \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, \max(n, n_1) - 1\,. \tag{8}$$

Cauchy'schen Bedingungen ersetzbar waren. Es entsteht die Frage, wann kann man im Falle der Differential-Differenzengleichungen vom Typ (6) die allgemeinen Bedingungen (7) durch die Cauchyschen Anfangsbedingungen (8) ersetzen, ja sogar es fragt sich, was bedeuteten eigentlich die Bedingungen (7), falls ein solches Ersetzen unmöglich sein sollte? Es ist nämlich offenbar, dass die Funktionen $g^1_\varkappa(\lambda)$ und $g^2_\varkappa(\lambda)$ im allgemeinen nicht voneinander unabhängig vorgeschrieben werden können (zum Beispiel so, dass die beiden Gleichungssysteme (7) einander widersprechen), doch ist es auch Tatsache, dass die Funktionen $g^1_\varkappa(\lambda)$ im allgemeinen die Funktionen $g^2_\varkappa(\lambda)$ nicht eindeutig bestimmen und umgekehrt. Im Weiteren werden wir folgende Definition nötig haben:

Definition. *Unter dem Hauptteil von* (6) *verstehen wir die Gleichung*

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t)}{\partial\lambda^\mu \, \partial t^\nu} = 0$$

(*siehe* Wloka [2]), *und unter dem retardierten Teil die Gleichung*

$$\sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{n_1} \beta_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t)}{\partial\lambda^\mu \, \partial t^\nu} = 0 \,.$$

Wir werden uns im Folgenden mit der Frage beschäftigen, was wir eigentlich unter der Lösung der Gleichung (6) mit den Anfangsbedingungen von der Form (7) verstehen. Wir werden definieren, wann (6) restriktiv ist und werden Sätze in Bezug darauf angeben, wann die Bedingungen (7) durch die Cauchyschen Anfangsbedingungen ersetzbar sind. Aus diesem Gesichtspunkt betrachtet haben nämlich die Funktionaldifferentialgleichungen Eigenschaften, die von den von (1) stark abweichen. Wir werden sehen, dass es vorkommen kann, dass sowohl der Hauptteil, als auch der retardierte Teil von (6) restriktiv sind und trotzdem die Anfangsbedingungen ihrer Lösung in der einfachen Cauchyschen Gestalt vorgeschrieben werden können. Oder, es kann auch vorkommen, dass wir Anfangsbedingungen, deren Anzahl min (n, n_1) ist, in der Cauchyschen Gestalt, die übrigen max (n, n_1) — min (n, n_1) Anfangsbedingungen in der allgemeinen Gestalt vorschreiben müssen. Endlich werden wir unsere erhaltenen Resultate durch zwei Beispiele erläutern.

§ 1. Die Kriterien der Restriktivität der partiellen Differential-Differenzengleichungen

Definition. *Die Differential-Differenzengleichung* (6) *ist nicht restriktiv, wenn sämtliche Anfangsbedingungen ihrer Lösungen in der Cauchyschen Gestalt*

$$\frac{\partial^\varkappa x(\lambda, 0)}{\partial t^\varkappa} = h_\varkappa(\lambda) \,, \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, \max(n, n_1) - 1$$

geschrieben werden können. Im entgegengesetzten Falle ist die Gleichung (6) *restriktiv.*

Satz 1. *Es sei $n \neq n_1$ und derjenige Teil von* (6) *der nach t von höherer Ordnung ist, sei nach Mikusiński nicht restriktiv.*[1]

Dann ist (6) *nicht restriktiv. Es sei $n = n_1$ und von den beiden Teilen (Hauptteil und retardierten Teil) sei wenigstens der eine nach Mikusiński nicht restriktiv. Dann ist* (6) *nicht restriktiv.*

Beweis. Bei dem Beweise des ersten Teiles des Satzes können wir annehmen, dass $n > n_1$, da im Falle $n < n_1$ der Beweis vollkommen analog ist.

Schreiben wir wieder die Beziehungen (7) auf.

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \alpha_{\mu,n-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial\lambda^\mu \partial t^\nu} = g_\varkappa^1(\lambda), \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \beta_{\mu,n_1-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial\lambda^\mu \partial t^\nu} = g_\varkappa^2(\lambda), \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, n_1-1.$$

Haben wir die Funktionen $g_\varkappa^1(\lambda)$ vorgeschrieben, dann können wir die Funktionen $h_\varkappa(\lambda)$ eindeutig bestimmen (siehe MIKUSIŃSKI [1]), und nachher aus diesen, durch Substitution auch die Funktionen $g_\varkappa^2(\lambda)$. Umgekehrt, sind die Funktionen $h_\varkappa(\lambda)$ gegeben, so sind diesen die Funktionen $g_\varkappa^1(\lambda)$ und $g_\varkappa^2(\lambda)$ eindeutig zugeordnet. Folglich sind das Vorschreiben der Funktionen $g_\varkappa^1(\lambda)$ und das Vorschreiben der Funktionen $h_\varkappa(\lambda)$ einander äquivalent und demzufolge können die Anfangsbedingungen tatsächlich in der einfacheren Cauchyschen Gestalt vorgeschrieben werden und die Gleichung (7) ist nicht restriktiv.

Wenn nun $n = n_1 \neq 0$ ist, so können wir die obige Überlegung gleichfalls anwenden. Ist der Hauptteil der Gleichung (6) nicht restriktiv, dann ist das Vorschreiben von $g_\varkappa^1(\lambda)$, ist der retardierte Teil nicht restriktiv, so ist das Vorschreiben der Funktionen $g_\varkappa^2(\lambda)$ äquivalent dem Vorschreiben der Funktionen $h_\varkappa(\lambda)$. Damit ist der Satz 1. bewiesen.

Satz 2. *Es sei $n \neq n_1$ und derjenige Teil von* (6), *der nach t von höherer Ordnung ist, sei nach Mikusiński restriktiv, der Teil von niedrigerer Ordnung nach t sei nicht restriktiv. Dann ist die Gleichung* (6) *restriktiv, jedoch können die ersten min (n, n_1) Anfangsbedingungen (also für die Indices $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$, min (n, n_1)) in der Cauchyschen Gestalt vorgeschrieben werden, vorausgesetzt, dass min $(n, n_1) \neq 0$ ist.*

Beweis. Es ist hier wiederum genügend den Fall $n > n_1$ zu betrachten. Dann kann man, nachdem die Funktionen $g_\varkappa^2(\lambda)$ vorgeschrieben worden sind, die Funktionen $h_\varkappa(\lambda)$ für $\varkappa = 0, 1, 2 \ldots, n_1—1$ eindeutig bestimmen, nachher aus diesen durch Substitution auch die Funktionen $g_\varkappa^1(\lambda)$ für die Indizes $0, 1, 2 \ldots, n_1—1$. Folglich können n_1 Anfangsbedingungen tatsächlich in der Cauchyschen Gestalt

$$\frac{\partial^\varkappa x(\lambda, 0)}{\partial t^\varkappa} = h_\varkappa(\lambda); \qquad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n_1 - 1 \tag{9}$$

---

[1] Natürlich, können wir den Fall min $(n, n_1) = 0$ nicht ausschliessen. Wir wollen uns in dem Wortgebrauch übereinkommen, dass wenn ein Teil von (6) kein Ableitung nach t enthält, wir diesen Teil als nicht restriktiv betrachten. Dann kommt natürlich von den Gleichungsystemen (7) nur das eine vor. Im Weiteren werden wir dies nicht immer besonders unterstreichen. Übrigens, natürlich, kann noch der Fall auch vorkommen, dass der eine Teil von (6) überhaupt keine Ableitungen enthält. Der erwähnte Wortgebrauch bezieht sich auch auf diesen Fall.

vorgeschrieben werden. Da der Hauptteil von (6) nach Mikusiński restriktiv ist, so müssen wir die übrigen Anfangsbedingungen in der allgemeinen Gestalt

$$(10) \qquad \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \alpha_{\mu,n-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = g_{\varkappa}^{1}(\lambda) \, ; \quad \varkappa = n_1, n_1+1, \ldots, n-1$$

vorschreiben.

Offensichtlich stehen wir hier einem solchen Falle gegenüber, der bei der Untersuchung der Gleichungen von der Form (1) überhaupt nicht auftreten kann. Dort müssen wir nämlich sämtliche Anfangsbedingungen entweder in der Cauchyschen Gestalt, oder in der allgemeinen Gestalt vorschreiben, während wir bei dem eben untersuchten Typ der Differential-Differenzengleichungen Anfangsbedingungen von der Anzahl min (n, n_1) in der Cauchyschen Gestalt, doch die übrigen max (n, n_1)—min (n, n_1) Anfangsbedingungen in der allgemeinen Gestalt angeben.

Bemerkung 1. Aus dem soeben bewiesenen Satze folgt einfach, dass im Falle min $(n, n_1) = 0$ Anfangsbedingungen von der Cauchyschen Gestalt überhaupt nicht vorkommen können. (Siehe die Fussnote 1.)

Bemerkung 2. In dem Satze 2. kommt, vom Gesichtspunkt der Angabe der Anfangsbedingungen in der allgemeinen Gestalt betrachtet, von den beiden Gleichungssystemen (7) nur das eine in Betracht. Das heisst, hier tritt die Komplikation auf die wir schon in der Einleitung in bezug auf (7) hingewiesen haben, noch nicht auf.

Bisher haben wir uns auf diejenigen Fälle beschränkt, in welchen von den Haupt- bzw. retardierten Teil von (6) wenigstens der eine nicht restriktiv ist. Betrachten wir nun den Fall in welchem sowohl der Hauptteil, als auch der retardierte Teil von (6) nach Mikusiński restriktiv ist.

Satz 3. *Es seien der Hauptteil und der retardierte Teil von* (6) *restriktiv. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für die Lösungen von* (6) *genau min* (n, n_1) *Anfangsbedingungen in der Cauchyschen Gestalt* (*d. h. die übrigen max* (n, n_1) — *min* (n, n_1) *Anfangsbedingungen nur in der allgemeinen Gestalt*) *angebbar seien, ist, dass die Polynome*

$$P_{\alpha}(s) = \sum_{\mu=0}^{m} \alpha_{\mu n} s^{\mu}$$

$$P_{\beta}(s) = \sum_{\mu=0}^{m_1} \beta_{\mu n_1} s^{\mu}$$

keinen gemeinsamen Teiler besitzen (*Zahlenteiler ausgenommen*). *Wenn* $n \neq n_1$, *so ist* (6) *restriktiv. Ist* $n = n_1$ *so ist* (6) *nur dann restriktiv, wenn* P_{α} *und* P_{β} *einen gemeinsamen Teiler haben.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, weisen wir darauf hin, dass die beiden Systeme von Differentialgleichungen

$$(11) \qquad \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \alpha_{\mu,n-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = g_{\varkappa}^{1}(\lambda)$$

$$\varkappa = 0, 1, \ldots, \min(n, n_1) - 1$$

$$(12)\qquad \sum_{\mu=0}^{m_1}\sum_{\nu=0}^{\varkappa}\beta_{\mu,n_1-\varkappa+\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^\mu\,\partial t^\nu}=g_\varkappa^2(\lambda)$$

nur dann höchstens eine gemeinsame Lösung $\dfrac{\partial^\varkappa x(\lambda,0)}{\partial t^\varkappa}=h_\varkappa(\lambda)$, $\varkappa=0,1,\ldots,$ min (n, n_1)—1 besitzen können, wenn die zu (11) und (12) gehörigen entsprechenden homogenen Gleichungssysteme

$$(13)\qquad \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{\varkappa}\alpha_{\mu,n-\varkappa+\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^\mu\,\partial t^\nu}=0$$

$$(14)\qquad \sum_{\mu=0}^{m_1}\sum_{\nu=0}^{\varkappa}\beta_{\mu,n_1-\varkappa+\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^\mu\,\partial t^\nu}=0$$

keine von der trivialen Lösung verschiedene gemeinsame Lösung haben. Es genügt daher zu beweisen, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden Systeme (13) und (14) ausser der trivialen keine gemeinsame Lösung besitzen sollen ist, dass die Polynome

$$P_\alpha(s) \qquad \text{und} \qquad P_\beta(s)$$

keinen gemeinsamen Teiler haben.

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend. Schreiben wir aus den Systemen (13) und (14) die $\varkappa=0$ entsprechenden Gleichungen auf

$$(15)\qquad \sum_{\mu=0}^{m}\alpha_{\mu n}\frac{\partial^\mu x(\lambda,0)}{\partial\lambda^\mu}=0\,;\qquad \sum_{\mu=0}^{m_1}\beta_{\mu n_1}\frac{\partial^\mu x(\lambda,0)}{\partial\lambda^\mu}=0\,.$$

Haben die Polynome $P_\alpha(s)$ und $P_\beta(s)$ keinen gemeinsamen Teiler, so besitzen die Fundamentalsysteme der Differentialgleichungen (15) kein gemeinsames Element, mithin können die Gleichungen (15) nur die triviale gemeinsame Lösung

$$(16)\qquad [x(\lambda,0)]_g=0$$

besitzen.

Für $\varkappa=1$ erhalten wir aus (13) und (14):

$$(17)\qquad \begin{aligned}
&\sum_{\mu=0}^{m}\alpha_{\mu,n-1}\frac{\partial^\mu x(\lambda,0)}{\partial\lambda^\mu}+\sum_{\mu=0}^{m}\alpha_{\mu n}\frac{\partial^{\mu+1}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^\mu\,\partial t}=0\,,\\
&\sum_{\mu=0}^{m_1}\beta_{\mu,n_1-1}\frac{\partial^\mu x(\lambda,0)}{\partial\lambda^\mu}+\sum_{\mu=0}^{m_1}\beta_{\mu n_1}\frac{\partial^{\mu+1}x(\lambda,0)}{\partial\lambda^\mu\,\partial t}=0\,.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichung (16) erhalten wir

$$\left[\frac{\partial x(\lambda,0)}{\partial t}\right]_g=0\,,$$

da, doch für (17) auch nur die identisch verschwindende, die einzig mögliche gemeinsame Lösung ist. Wenn wir diesen Gedankengang für wachsende Werte von x fortgesetzt anwenden, so erhalten wir, dass

$$\left[\frac{\partial^{\varkappa} x(\lambda, 0)}{\partial t^{\varkappa}}\right]_g = 0\,; \quad \varkappa = 0, 1, 2 \ldots, \min(n, n_1) - 1\,. \tag{18}$$

Die angeführte Bedingung ist aber auch notwendig, denn, wenn die Polynome $P_\alpha(s)$ und $P_\beta(s)$ einen gemeinsamen Teiler besitzen, so existiert schon im Falle $\varkappa = 0$ eine von der trivialen verschiedene.

$$x(\lambda, 0) \neq 0$$

gemeinsame Lösung, d. h. jedenfalls, wenn $\min(n, n_1) \leq 1$ (wo also nur $\varkappa = 0$ möglich ist) die beiden homogenen Differentialgleichungssysteme haben nichttriviale gemeinsame Lösungen. Im speziellen Falle $n = n_1$ können sämtliche Anfangsbedingungen (falls $P_\alpha(s)$ und $P_\beta(s)$ keinen gemeinsamen Teiler haben) in der Cauchyschen Gestalt angegeben werden, mithin ist (6) nicht restriktiv.

Der Satz 3 gibt also ein einfaches Kriterium für das Feststellen der restriktiven, oder nichtrestriktiven Eigenschaft einer linearen partiellen Differential-Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten (siehe die unten angeführten Beispiele)!

Auf Grund unserer Untersuchungen ist also der allgemeinste Fall der in dem sowohl der Hauptteil als auch der retardierte Teil von (6) nach Mikusiński restriktiv sind, und die Polynome $P_\alpha(s)$ und $P_\beta(s)$ einen gemeinsamen Teiler besitzen. In diesem Falle müssen die Anfangsbedingungen in der allgemeinen Gestalt (7) angegeben werden. Untersuchen wir nun diese Frage ausführlicher. Schreiben wir wiederum die Bedingungen (7) auf:

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \alpha_{\mu, n-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu}\, \partial t^{\nu}} = g^1_{\varkappa}(\lambda)\,, \qquad \varkappa = 0, 1, \ldots, n-1\,, \\ &\sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \beta_{\mu, n_1-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu}\, \partial t^{\nu}} = g^2_{\varkappa}(\lambda)\,, \qquad \varkappa = 0, 1, \ldots, n_1-1\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Die Anfangsbedingungen angeben heisst, dass die Funktionen $g^1_{\varkappa}(\lambda)$ und $g^2_{\varkappa}(\lambda)$ angegeben werden müssen. Diese können, natürlich, in Allgemeinen nicht unabhängig voneinander vorgeschrieben werden. Wir verfahren folgendermassen.

Von den beiden Gleichungssystemen (19) wählen wir dasjenige aus, welches mehr Unbekannte enthält (im Falle $n = n_1$ ist es gleichgültig welches wir auswählen). Es sei dies das System

$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \alpha_{\mu, n-\varkappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu}\, \partial t^{\nu}} = g^1_{\varkappa}(\lambda)\,; \qquad \varkappa = 0, 1, \ldots, n-1\,. \tag{20}$$

Die sich auf $\varkappa = n_1, n_1 + 1, \ldots, n-1$ beziehenden Anfangsbedingungen sind durch das Vorschreiben der entsprechenden $g_\varkappa^1(\lambda)$ angegeben. Für die übrigen Werte von $\varkappa$, d. h. $\varkappa = 0,1, \ldots, n_1-1$ bestimmen wir bei den gegebenen entsprechenden $g_\varkappa^1(\lambda)$ die allgemeine Lösung des Differentialgleichungsystems, welches von (20) nur dadurch unterscheidet, dass in ihm $\varkappa$ von 0 bis n_1-1 läuft. Diese allgemeine Lösung substituieren wir in das zweite System (19). Auf diese Weise bekommen wir die Funktionen $g_\varkappa^2(\lambda)$, welche natürlich noch willkürliche Konstanten enthalten können. Um die Eindeutigkeit der Lösungen von (6) zu sichern, müssen wir auch die Werte dieser Konstanten fixieren.

Auf Grund des Satzes 3 und unserer vorhergehenden Überlegungen können wir folgende Aussage machen.

Sind der Hauptteil und der retardierte Teil von (6) *restriktiv und haben die Polynome* $P_\alpha(s)$ *und* $P_\beta(s)$ *einen gemeinsamen Teiler, so ist das Vorschreiben der Anfangsbedingungen für die Indizes* $\varkappa = 0, 1, \ldots, \min(n, n_1)-1$ *äquivalent dem Auflösen eines Systems von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.*

Dies bedeutet eine wesentliche Komplikation verglichen mit der Lösung durch die Operatorenmethode derjenigen restriktiven partiellen Differentialgleichungen, welche gleichzeitig keine Differenzengleichungen sind ($\tau = 0$.)

§ 2. Einige weitere Operatoreneigenschaften der linearen partiellen Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten

In diesem Paragraphen wollen wir uns mit einigen weiteren interessanten Operatoreneigenschaften der linearen partiellen Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten beschäftigen. Wir werden hierzu folgende Theoreme von Mikusiński [1] und Wloka [2] nötig haben:

a) *Eine reine Differentialgleichung* (1) *ist niemals restriktiv.*

b) *Es sei* $m \geqq m_1$. *Dann ist* (6) *logarithmisch, gemischt, oder rein, wenn ihr Hauptteil entsprechend diese Eigenschaft besitzt.*

c) *Es sei* $m \geqq m_1$ *und* $n = 0$. *Dann ist* (6) *immer logarithmisch.*

d) *Es sei* $m_1 > m$. *Dann ist* (6) *niemals logarithmisch.*

Im Falle der Differential-Differenzengleichungen ist a) nicht mehr gültig.

Wir beweisen folgende Sätze.

Satz 4. *Der Hauptteil von* (6) *sei nicht identisch Null. Ist* $m = 0$, *so ist* (6) *immer rein.*

Satz 5. *Es sei* $m_1 > m$ *und der Hauptteil von* (6) *sei restriktiv. Dann ist* (6) *immer gemischt.*

Satz 6. *Eine reine Differential-Differenzengleichung* (6) *kann restriktiv sein. Ist sie restriktiv und ist* $m \geqq m_1$, *so ist* $n_1 > n > 0$, *jedoch die Anfangsbedingungen*

$$\frac{\partial^\varkappa x(\lambda, 0)}{\partial t^\varkappa} = h_\varkappa(\lambda)\,; \qquad x = 0, 1, \ldots, n-1$$

können immer in der Cauchyschen Gestalt geschrieben werden. Ist sie restriktiv und $m_1 > m$, *so ist* $n_1 > n$.

Beweis des Satzes 4. Bei dem Beweise der Behauptung d) ($m_1 > m$) zeigt Wloka, dass wenigstens eine Wurzel der charakteristischen Gleichung von (6) kein Logarithmus ist, da diese in ihrer Entwicklung Potenzen von h mit negativen Exponenten enthält. Noch allgemeiner, es besteht die Tatsache, dass die charakteristische Gleichung von (6) genau m_1—m solche Wurzeln besitzt, in deren Reihendarstellung

$$v = \sum_{i=-q}^{\infty} a_i(s)\, h^{\frac{\tau}{p} i}.$$

Potenzen von h mit einem negativen Exponenten vorkommen. Die charakteristische Gleichung von (6) besitz nämlich m solche Wurzeln deren Reihenentwicklung keine Potenzen von h mit einem negativen Exponenten enthält, das heisst Wurzeln, die in der Gestalt

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(s)\, h^{\frac{\tau}{} i}$$

darstellbar sind, da die Operatoren $a_0(s)$ eben die Wurzeln der charakteristischen Gleichung m-ten Grades des Hauptteils von (6) sind. Die charakteristische Gleichung von (6) ist vom m_1-sten Grade, d. h. sie hat m_1 Wurzeln.

Folglich müssen unter diesen m_1—m solche vorhanden sein, deren Reihenentwicklungen Potenzen von h mit einem negativen Exponenten enthalten. Es sei $m = 0$ und der Hauptteil von (6) sei nicht identisch gleich Null.[2] Dann können wir auf Grund unserer Überlegungen behaupten, dass die Reihenentwicklungen sämtlicher m_1 Wurzeln Potenzen von h mit einem negativen Exponenten enthalten, mithin sind sie keine Logarithmen. Dies bedeutet zugleich, dass (6) eine reine Gleichung ist.

Beweis des Satzes 5. Laut d) kann die Gleichung (6) nicht logarithmisch sein, mithin braucht nur gezeigt zu werden, dass sie auch nicht rein sein kann. In der Tat, da der Hauptteil restriktiv ist, so ist $m > 0$. Folglich können auf Grund der im Beweise des Satzes 4 angeführten Tatsachen gewisse Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (6) von der Anzahl $m > 0$ in der Gestalt

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(s)\, h^{\frac{\tau}{p} i}$$

aufgeschrieben werden. Die Operatoren $a_0(s)$ sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung des Hauptteils von (6); auf Grund von a) ist wenigstens eine von ihnen ein Logarithmus. Jedoch m_1—m von den Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (6) sind gewiss keine Logarithmen, folglich ist die Gleichung (6) in diesem Falle gemischt.

Beweis des Satzes 6. Es sei zunächst $m \geq m_1$. Betrachten wir eine reine Gleichung (6). Aus a), b) und c) folgt, dass ihr Hauptteil nicht restriktiv sein kann und, dass $n > 0$. Haben wir nun (6) so gewählt, dass ihr retardierter Teil nach Mikusiński restriktiv ist, dann ist (6) laut der Sätze 1 und 2 zugleich auch restriktiv, vorausgesetzt, dass $n_1 > n$ und die n ersten Anfangsbedingungen

$$\frac{\partial^\varkappa x(\lambda, 0)}{\partial t^\varkappa} = h^\varkappa(\lambda)\,; \qquad x = 0, 1, \ldots, n-1$$

können tatsächlich in der Cauchyschen Gestalt vorgeschrieben werden.

[2] In diesem Falle können wir, natürlich, nicht von einer charakteristischen Gleichung des Hauptteiles von (6) sprechen.

Betrachten wir nun den Fall $m_1 > m$. Wählen wir (6) so aus, dass $m = 0$ und der retardierte Teil nach Mikusiński restriktiv sei. Dann ist die Gleichung (6) auf Grund des Satzes 4 rein und laut der Sätze 1 und 2 auch restriktiv, vorausgesetzt, dass $n_1 > n$.

Es bleibt nochübrig zu zeigen, dass im Falle $n_1 \leq n$ die reine Gleichung nicht restriktiv sein kann. In der Tat, ist $n_1 \leq n$, so kann die Gleichung (6) nur dann restriktiv sein, wenn ihr Hauptteil restriktiv ist (s. die Sätze 1. und 2.). Dann kann aber auf Grund des Satzes 5 die Gleichung (6) nicht rein sein, da sie doch gewiss gemischt ist, w. z. b. w.

Endlich weisen wir darauf hin, dass WLOKA [3] bewiesen hat, dass man die Mikusinskische algebraische Theorie der Differentialgleichungen auch auf die Gleichungen von der Gestalt

$$\sum_{k=0}^{d}{}' \sum_{\mu=0}^{m_k} \sum_{\nu=0}^{n_k}{}' \alpha_{\mu\nu}^{k} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t-\tau_k)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = \varphi(\lambda, t), \qquad \tau_0 = 0$$

erweitern kann. Die in den Paragraphen 1. und 2. mitgeteilten Sätze können auch für solche Gleichungen verallgemeinert werden. Im gegenwärtigen Artikel wollen wir auf diese Frage nicht eingehen.

§ 3. Beispiele

Wir wollen eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^3 x(\lambda,t)}{\partial t^2 \partial \lambda} + \frac{\partial^2 x(\lambda,t)}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 x(\lambda,t)}{\partial t^2} -$$

$$(21) \qquad - \frac{\partial^3 x(\lambda, t-\pi)}{\partial t^2 \partial \lambda} = \begin{cases} \sin t e^{\lambda}, & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & \text{für} \quad t > \pi \end{cases}$$

finden. Offensichtlich sind sowohl der Hauptteil als auch der retardierte Teil von (21) nach Mikusiński restriktiv. Laut des Satzes 3 müssen wir die Polynome $P_\alpha(s)$ und $P_\beta(s)$ bilden.

$$(22) \qquad P_\alpha(s) = s - 1, \qquad P_\beta(s) = -s.$$

Diese Polynome haben keinen gemeinsamen Teiler, weiterhin können die Anfangsbedingungen in der Cauchyschen Gestalt vorgeschrieben werden, da in unserem Falle $n = n_1$, weswegen die Gleichung (21) nicht restriktiv ist.

Die Anfangsbedingungen seien:

$$(23) \qquad x(\lambda, 0) = 0, \qquad \frac{\partial x(\lambda, 0)}{\partial t} = e^{\lambda}.$$

Von den Randbedingungen werden wir später sprechen. Schreiben wir die Gleichung (21) in der Operatorenform auf, doch beachten wir dabei die Anfangsbedingungen (23):

$$(24) \qquad x''(\lambda) + s^2(1 - h^{\pi})\, x'(\lambda) - s^2 x(\lambda) = e^{\lambda} \frac{1 - h^{\pi} s^2}{1 + s^2}.$$

Bestimmen wir zunächst eine partikuläre Lösung von (24). Versuchen wir (24) durch den Ansatz

$$x_0(\lambda) = A e^{\lambda} \tag{25}$$

zu lösen, wo in dieser Operatorfunktion A ein konstanter Operator ist.

Durch die Substitution von (25) in (24) ergibt sich

$$A = \frac{1}{1+s^2}$$

und daher

$$x_0(\lambda) = \frac{1}{1+s^2} e^{\lambda} .$$

Um die allgemeine Lösung von (24) zu finden schreiben wir ihre charakteristische Gleichung auf

$$v^2 + s^2(1-h^{\pi})\, v - s^2 = 0 .$$

Sie ist einfach zu lösen; ihre Lösung ist:

$$v_{1,2} = \frac{s^2(h^{\pi}-1)}{2} \pm \frac{s^2(h^{\pi}-1)}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{s^2(h^{\pi}-1)^2}} . \tag{26}$$

Wir müssen entscheiden, ob die Wurzeln (26) Logarithmen sind, oder sind sie keine. Zu diesem Zwecke müssen wir diesen Ausdruck umformen. Ziehen wir in Betracht, dass

$$\frac{4}{s^2(1-h^{\pi})^2} = \frac{4}{s^2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, h^{k\pi} = f \in C , \tag{27}$$

(s. MIKUSIŃSKI [1], S. 149), das heisst, das der Operator (27) im Intervalle $0 \leq t < \infty$ eine stetige Funktion ist. Dann folgt

$$\sqrt{1 + \frac{4}{s^2(h^{\pi}-1)^2}} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{\nu} \left(\frac{4}{s^2}\right)^{\nu} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, h^{k\pi}\right)^{\nu} = 1 + g , \quad g \in C. \tag{28}$$

(s. MIKUSIŃSKI [1], S. 157.).

Folglich können die Wurzeln (26) in der Form

$$\begin{aligned} v_1 &= s^2 h^{\pi} - s^2 + \frac{s^2(h^{\pi}-1)}{2} g , \\ v_2 &= \frac{s^2(1-h^{\pi})}{2} g \end{aligned} \tag{29}$$

geschrieben werden. Aus (28) ergibt sich sofort, dass v_2 ein Logarithmus ist. v_1 ist jedoch kein Logarithmus, da $-s^2$ kein Logarithmus ist. Die allgemeine Lösung von (24) ist

$$x(\lambda) = \frac{e^{\lambda}}{1+s^2} + C_1 \exp\left[\frac{s^2(1-h^{\pi})}{2} g \lambda\right] . \tag{30}$$

Um die Konstante C_1 zu fixieren, müssen wir eine Randbedingung angeben, diese sei

$$x(0, t) = \sin t\,,$$

oder

$$x(0) = \frac{1}{1+s^2}\,.$$

Aus (30) folgt dann:

$$x(0) = \frac{1}{1+s^2} + C_1 = \frac{1}{1+s^2}\,,$$

das heisst,

$$C_1 = 0\,,$$

und

$$x(\lambda, t) = e^{\lambda} \sin t\,.$$

Als zweites Beispiel wollen wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2 x(\lambda, t)}{\partial\lambda\,\partial t} + \frac{\partial^2 x(\lambda, t-\pi)}{\partial\lambda\,\partial t} = \begin{cases} -\sin t \operatorname{sh} \lambda, & \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq \pi, \\ 0 & \text{für} \quad t > \pi \end{cases} \tag{31}$$

auflösen.

Sowohl der Hauptteil, als auch der retardierte Teil sind nach MIKUSIŃSKI restriktiv. Laut des Satzes 3 müssen die Polynome $P_\alpha(s)$ und $P_\beta(s)$ gebildet werden. Wir erhalten:

$$P_\alpha(s) = P_\beta(s) = s\,,$$

mithin haben die beiden Polynome einen gemeinsamen Teiler und deswegen müssen die Anfangsbedingungen der Aufgabe (31) in der allgemeinen Gestalt angegeben werden.

Die Operatorenform von (31) ist

$$s x'(\lambda) + h^{\pi} s x'(\lambda) = -\frac{1+h^{\pi}}{1+s^2} \operatorname{sh} \lambda + \frac{\partial x(\lambda, 0)}{\partial \lambda} + h^{\pi} \frac{\partial x(\lambda, 0)}{\partial \lambda}\,. \tag{32}$$

Als Anfangsbedingung schreiben wir

$$\frac{\partial x(\lambda, 0)}{\partial \lambda} = \operatorname{sh} \lambda\,,$$

und als Randbedingung

$$x(0, t) = \cos t$$

vor.

Aus (32) unter Beachtung der Anfangsbedingung erhalten wir

$$x'(\lambda) + h^{\pi} x'(\lambda) = \operatorname{sh} \lambda \frac{s(1+h^{\pi})}{1+s^2}\,. \tag{33}$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$x_0(\lambda) = \frac{s}{1+s^2} \operatorname{ch} \lambda\,.$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$v + h^{\pi} v = 0 \,,$$

woraus $v = 0$ folgt. Sie ist ein Logarithmus. Die allgemeine Lösung von (33) ist

$$x(\lambda) = \frac{s}{1+s^2} \operatorname{ch} \lambda + C \,.$$

Unter Benutzung der Randbedingung erhalten wir:

$$x(0) = \frac{s}{1+s^2} + C = \frac{s}{1+s^2} \,,$$

das heisst

$$C = 0$$

und

$$x(\lambda, t) = \cos t \operatorname{ch} \lambda \,.$$

(Eingegangen: 2 August, 1962.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Mikusiński, J.: *Operatorenrechnung.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.

[2] Wloka, J.: "Über die Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **202** (1959) Heft 1/2, 107—128.

[3] Wloka, J.: "Über die Anwendung der Operatorenrechnung auf partielle Differential-Differnzengleichungen mit mehreren Differenzen." *Archiv der Mathematik* **11** (1960) 23—28.

О РЕСТРИКТИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ И В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

T. FÉNYES

Резюме

Автор исследует проблему рестриктивного свойства линейных уравнений с постоянными коэффициентами являющихся одновременно уравнениями в конечных разностях и в частных производных, что имеет большое значение для решения таких уравнений при помощи операторного исчисления Микусинского. Он дает критерии, на основании которых можно и в частных производных (6) рестриктивным или нет и иллюстрирует полученный результат на простых примерах. Автор приводит несколько дальнейших теорем, относящихся к некоторым другим операторным свойствами уравнения (6). Они тесно связаны со статьей Wloka [2].