IRRFAHRTSPROBLEME MIT EINER SPIEGELNDEN WAND

von

PÁL BÁRTFAI

Einleitung

Die vorliegende Arbeit enthält die Betrachtung des folgenden Irrfahrtsproblems: Es seinen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ unabhängige zufällige Variablen mit derselben Verteilung $\mathbf{P}(\xi_i = k) = p_k$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Der wandernde Punkt befinde sich im Zeitpunkt $t = 0$ im Punkte Null, und im ersten Schritt gelange er im Punkt ξ_1 der Zahlengerade. Die folgenden Schritte des wandernden Punktes seien folgendermassen angegeben: ist er nach dem $(n - 1)$-ten Schritt im Punkte k, so gelange er im n-ten Schritt in den Punkt $| k - \xi_n |$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Mit anderen Worten soll der wandernde Punkt immer Schritte in die Richtung der Nullpunktes von Länge ξ_n machen, aber derart, als ob sich im Ursprung eine spiegelnde Wand befinde.

Im folgenden wird oft bequemer sein mit einem anderen, dem vorigen äquivalenten Modell zu arbeiten (dies wird das »zweiseitige« Modell genannt werden, um es vom vorigen, »spiegelnden« Modell zu unterscheiden). Dieses Modell entsteht aus dem vorigen durch Weglassen der spiegelnden Wand im Ursprung: befindet sich also der wandernde Punkt im $(n - 1)$-ten Schritt im Punkte k, so gelangt er im Sinne des zweiseitigen Modells im n-ten Schritt in den Punkt $k - \xi_n$ bzw. $k + \xi_n$, je nachdem $k \geqq 0$ oder $k < 0$ gilt. Wollen wir in den folgenden das zweiseitige Modell benützen, so werden wir es immer ausdrücklich sagen, andernfalls soll man an das spiegelnde Modell denken.

Das eben beschriebene Modell stammt von einem — bisher ungelösten — Problem von A. RÉNYI. Dieses Problem leutet folgendermassen: zerlegen wir die Menge der ganzen Zahlen in zwei disjunkte Teilmengen A und B, und der sich nach dem $(n - 1)$-ten Schritte im Punkte k befindende wandernde Punkt schreite in $k - \xi_n$ bzw. in $k + \xi_n$ je nachdem $k \in A$ oder $k \in B$ gilt; bei welcher Wahl von A und B wird der Erwartungswert der Zeit während der der wandernde Punkt zuerst in den Ursprung wiederkehrt minimal? Mit anderen Worten: falls man abhängig vom Befindungsort des wandernden Punktes entscheiden dar, in welcher Richtung der folgende Schritt erfolgen soll, bei welcher Strategie wird die mittlere Zeit des Wiederkehrens des wandernden Punktes am kleinsten.

Der obige »zweiseitige« Modell entspricht der Wahl $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$ $B = \{-1, -2, \ldots\}$ und wir werden die mittlere Zeit des Wiederkehrens in diesem Falle berechnen.

Das in des vorliegende Arbeit betrachtete Problem kann ausser seinem theoretischen Interesse und Schönheit auch aus praktischem Hinsicht nützlich sein, da derartige Probleme auch bei bestimmten regelungstechnischen Metho-

den auftreten. Kann nämlich bei der Kontrolle eines Systems nur die Richtung nicht aber die Grösse — des etwaigen Fehlers beobachtet werden, erfolgt also die Korrektion in der beobachteten Richtung durch eine zufällig gewählte Grösse so kann die Situation durch unseren zweiseitigen Modell beschreiben werden. Die Verteilung der Korrektion ξ_n kann dann im allgemeinen auch stetig sein, welcher Fall in § 4 betrachtet wird.

§ 2 enthält die Lösung des gestellten Problems sowie die Berechnung der Grenzverteilung des wandernden Punktes für den Fall $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\xi_n) < \infty$. In § 3 wird bewiesen, dass diese Voraussetzung für die Existenz der Grenzverteilung nicht nur hinreichend sondern auch notwendig ist. In § 4 werden manche weiteren Probleme erwähnt.

§ 2. Der Fall $\mathbf{M}(\xi_n) < +\infty$

Im folgenden wird stets vorausgesetzt, dass der grösste gemeinsame Teiler der Zahlen k mit $p_k > 0$ gleich 1 ist. Geht die Irrfahrt aus dem Nullpunkt aus — und wir beschäftigen uns nur mit diesem Fall, was aber keinen wesentlichen Unterschied im Vergleich mit dem allgemeinen Fall bedeutet — so stellt die obige Voraussetzung keine Beschränkung der Allgemeinheit dar. Ist nämlich der obige grösste gemeinsame Teiler gleich d, so findet die Irrfahrt auf den Punkten ld $(l = 0, 1, \ldots)$ statt und das Erfülltsein der obigen Voraussetzung kann erreicht werden, indem man die Zustände einfach umnumeriert.

Vor allem beweisen wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Das Irrfahrtsproblem stellt eine irreduzible Markoffsche Kette dar. Die erreichbaren Zustände sind die folgenden:* $0, 1, 2, \ldots, a$, $a = \max\{k : p_k > 0\}$; *ist* $a = +\infty$, *so ist jeder der Zustände* $0, 1, 2, \ldots$ *erreichbar.*

Beweis. Wähle man eine so grosse ganze Zahl N, dass bereits die Zahlen k aus $0, 1, 2, \ldots, N$ mit positivem p_k den grössten gemeinsamen Teiler 1 haben. Diese k-Werte seien mit $k_1, k_2, \ldots, k_l$ bezeichnet, wobei $k_l = N$ vorausgesetzt werden darf.

Nach einem bekannten zahlentheoretischen Satz kann man ganze Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ mit

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i k_i = 1 \tag{1}$$

finden.

Wir beweisen, dass der Ursprung aus jedem Punkt $0 \leqq j \leqq N$ erreichbar ist. Multipliziert man (1) mit j, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{k} j \alpha_i k_i = j\,. \tag{2}$$

Benützen wir nun das »zweiseitige« Modell; machen wir, ausgegangen von j, $j\alpha_1$ Schritte von Länge k_1 nach links bzw. nach rechts, je nachdem ob das Vorzeichen von $j\alpha_1$ pozitiv, bzw. negativ ist. Dieses Vorgehen ist aber nicht immer ohne weiteres möglich; ist z. B. $\alpha_1 > 0$ so kann es vorkommen, dass man z. B. mit dem zweiten Schritt an den negativen Teil der Zahlengerade gelangt, in welchem Falle ein dritter Schritt nach links nicht möglich ist. Diese Schwierigkeit kann mit Hilfe von einem »Temposchritt« der Länge N behoben werden, wodurch man den positiven Teil der Zahlengerade erreicht, von wo

man wieder nach links schreiten kann. Mit Einschaltung solcher »Temposchritte« kann man die $j\alpha_1$ Schritte in der entsprechenden Richtung durchführen; nach diesen machen wir $j\alpha_2$ schritte von Länge k_2 in der dem Vorzeichen von $j\alpha_2$ entsprechenden Richtung — falls nötig, mit Einschaltung von »Temposchritte« — u. s. w., am Ende sollen $j\alpha_l$ Schritte von Länge k_l durchgeführt werden. Dann wird mit dem letzten Schritt notwendigerweise der Ursprung erreicht. Die Irreduzibilität der Markoffschen Kette ist dadurch bereits bewiesen, da nach den obigen der Ursprung aus jedem vom Ursprung erreichbaren Zustand j erreichbar ist.

Die zweite Behauptung des Hilfsatzes, also das jeder Zustand $0 < j \leqq a$ vom Ursprung erreichbar ist, kann mit demselben Gedankengang bewiesen werden, nur kann es vorkommen, das man nach dem letzten Schritt statt j in $j - N \leqq 0$ gelangt, von wo aber j bereits mit einem Schritt erreichbar ist.

Hilfssatz 2. *Die betrachtete Markoffsche Kette ist entweder aperiodisch oder hat die Periode zwei. Die notwendige und hinreichende Bedingung für ihre Aperiodizität ist die Existenz einer geraden Zahl k mit positivem p_k.*

Beweis. Bekanntlicherweise hat jeder Zustand einer irreduziblen Markoffschen Kette die gleiche Periode. Da die Wiederkehr in den Ursprung mit zwei Schritten immer möglich ist, muss die Periode ein Teiler von zwei sein, womit die erste Behauptung bewiesen ist.

Nehmen wir nun $p_{2k_0} > 0$ (mit irgendwelchem ganzen k_0) an; um die Aperiodizität der vorliegenden Markoffschen Kette zu zeigen, genügt einzusehen das der wandernde Punkt auch mit einer ungeraden Anzahl von Schritten in den Ursprung wiederkehren kann, also das der Ursprung aus $2k_0$ auch mit einer geraden Zahl von Schritten erreichbar ist. Der Beweis verläuft demselben des Hilfssatzes 1 ähnlich. Wähle man die Zahl N derart, dass neben den dortigen Voraussetzungen auch noch $N \geqq 2k_0$ gilt. Zu den Zahlen $2k_0, k_1, k_2, \ldots, k_l$ $(p_{k_i} > 0,\ i = 1, 2, \ldots l;\ (2k_0, k_1, k_2, \ldots, k_l) = 1)$ seien die ganze Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ bestimmt, dass

$$\alpha_0\, 2\, k_0 + \sum_{i=1}^{l} \alpha_i\, k_i = 1\,,$$

d. h.

$$2\, k_0\, \alpha_0 \cdot 2\, k_0 + \sum_{i=1}^{l} 2\, k_0\, \alpha_i \cdot k_i = 2\, k_0 \tag{3}$$

gilt. Führe man die in (3) vorgeschriebene Schritte — mit den nötigen „Temposchritte" — durch (ebenso wie es bei (2) gemacht wurde).

Die Zahl der gemachten Schritte wird dann gerade sein — da auch eine gerade Anzahl von Temposchritten nötig ist — wodurch die Erreichbarkeit des Ursprungs aus $2k_0$ mit einer endlichen Anzahl von Schritten also auch die Aperiodizität der vorliegenden Markoffschen Kette bewiesen ist. Gilt umgekehrt für jede ganze Zahl $kp_{2k} = 0$, so hat die Markoffsche Kette offenbar die Periode zwei.

Bemerkung. Das eben behandelte Problem führt zu einer intersssanten zahlentheoretischen Aufgabe, wenn man nach der minimalen ungeraden Anzahl der Schritte fragt, mit denen der vom Ursprung ausgehende wandernde Punkt in den Ursprung wiederkehren kann. Im Falle $l = 1$, wenn also nur Schritte von Länge $2k_0$ und k_1 (k_1 ungerade) möglich sind, ist diese minimale

ungerade Anzahl von Schritten gleich $2k_0 + k_1$. Für $l \geqq 2$ ist die Lösung unbekannt.

Satz 1. *Im Falle* $\mathbf{M}(\xi_n) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = M < \infty$ *ist jeder Zustand der betrachteten Markoffschen Kette oft wiederkehrend also sind sie wiederkehrende Zustände mit endlicher mittlerer Wiederkehrszeit.*

Beweis. $P_k^{(n)}$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit dafür, das sich der wandernde Punkt nach dem n-ten Schritt im Punkte k befindet. Dann gelten offenbar die folgenden rekursiven Formeln:

$$P_0^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j^{(n-1)} p_j, \tag{4}$$

$$P_k^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j^{(n-1)} p_{j+k} + \sum_{j=k}^{\infty} P_j^{(n-1)} p_{j-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Setzen wir

$$Q_N^{(n)} = \sum_{k \geqq N} P_k^{(n)}. \tag{6}$$

Erstens werden wir

$$Q_N^{(n)} < \varepsilon, \qquad \text{wenn} \quad N > N_0(\varepsilon) \tag{7}$$

beweisen, wobei N_0 von n unabhängig ist. Aus (5) erhält man durch Summieren

$$Q_N^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j^{(n-1)} \sum_{k=j+N}^{\infty} p_k + \sum_{k=0}^{\infty} p_k \sum_{j=k+N}^{\infty} P_j^{(n-1)}.$$

Daraus ergibt sich für $Q_N^{(n)}$ die folgende Abschätzung — mit der Bezeichnung $R_k = \sum_{i=k}^{\infty} p_i$ —

$$Q_N^{(n)} \leqq R_N + \sum_{k=0}^{\infty} p_k Q_{k+N}^{(n-1)}. \tag{8}$$

Indem man die Ungleichungen der Form (8) ineinander substituiert, erhält man

$$Q_N^{(n)} \leqq R_N + \sum_{k=0}^{\infty} p_k R_{k+N} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_k p_l Q_{k+l+N}^{(n-2)} \leqq$$

$$\leqq R_N + \sum_{k=0}^{\infty} p_k R_{k+N} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_k p_l R_{k+l+N} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k p_l p_j R_{k+l+j+N} + \cdots.$$

Also, die Glieder mit $R_{N+\nu}$ zusammenfassend,

$$Q_N^{(n)} \leqq R_N + \sum_{\nu=0}^{\infty} R_{N+\nu} \Big(p_\nu + \sum_{k+l=\nu} p_k p_l + \sum_{k+l+j=\nu} p_k p_l p_j + \cdots\Big). \tag{9}$$

Für die Glieder (9) führen wir neue Bezeichnungen ein:

$$A_k^{(\nu)} = \sum_{i_1+\ldots+i_k=\nu} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}$$

und

$$B_k^{(\nu)} = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=\nu \\ i_k>0}} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}.$$

Dann gilt

$$A_k^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{k} B_j p_0^{k-j},$$

also

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} B_j p_0^{k-j} = \frac{1}{1-p_0} \sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(\nu)}. \tag{10}$$

Die Grösse $\sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(\nu)}$ hat die folgende Bedeutung: betrachten wir das Irrfahrtsproblem, wenn der wandernde Punkt im n-ten Schritt um eine Strecke ξ_n nach rechts geht (im ersten Schritt vom Ursprung aus); dann ist $\sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(\nu)}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, das der wandernde Punkt nach irgendwelchem Schritt in den Punkt ν gelangt. Es gilt also

$$\sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(\nu)} \leqq 1. \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(\nu)} \leqq \frac{1}{1-p_0},$$

und infolgedessen aus (9)

$$Q_N \leqq R_N + \sum_{\nu=0}^{\infty} R_{N+\nu} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(\nu)} \leqq R_N + \frac{1}{1-p_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} R_{N+\nu}.$$

Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} R_k$ nach Voraussetzung konvergent ist $\left(\text{benützend } \sum_{k=0}^{\infty} R_k = M\right)$ strebt für $N \to \infty$ ebenso R_N wie $\sum_{\nu=0}^{\infty} R_{N+\nu}$ nach Null, womit (7) bewiesen ist.

Die Behauptung des Satzes folgt nun folgendermassen: hat die betrachtete Markoffsche Kette einen Zustand, der nicht oft wiederkehrend ist, so kann keiner ihrer Zustände oft wiederkehrend sein, also gilt, wie bekannt, $P_k^{(n)} \to 0$ für $n \to \infty$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Das widerspricht aber der eben bewiesenen Ungleichung $\sum_{k=0}^{N-1} P_k^{(n)} \geqq 1 - \varepsilon$, also muss jeder Zustand oft wiederkehrend sein, w. z. b. w.

Der folgende Satz sagt etwas mehr, er gibt die mittlere Wiederkehrszeit und auch die Grenzverteilung der Markoffschen Kette an.

Satz 2. *Auf Grund von Hilfssatz 2 kann entschieden werden ob die Markoffsche Kette aperiodisch oder von der Periode zwei ist. Ist sie aperiodisch, so hat sie eine Grenzverteilung und zwar*

$$P_0 = \lim_{n\to\infty} P_0^{(n)} = \frac{R_1}{2M}, \tag{12}$$

$$P_j = \lim_{n\to\infty} P_j^{(n)} = \frac{R_j + R_{j+1}}{2M} \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{13}$$

also ist die mittlere Zeit des Wiederkehrs in den Ursprung

$$\tau = \frac{1}{P_0} = \frac{2M}{R_1}.$$

Hat die Markoffsche Kette die Periode zwei, so gilt

$$P_{2k+1}^{(2n)} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} P_0^{(2n)} = \frac{R_1}{M} = \frac{1}{M},$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{2k}^{(2n)} = \frac{R_{2k} + R_{2k+1}}{M} = \frac{2R_{2k+1}}{M} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

ferner

$$P_{2k}^{(2n+1)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{2k+1}^{(2n+1)} = \frac{R_{2k+1} + R_{2k+2}}{M} = \frac{R_{2k+1} + R_{2k+3}}{M} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die mittlere Zeit des Wiederkehrs in den Ursprung ist $\tau = 2M$.

Beweis. Bekanntlich hat jede aperiodische Markoffsche Kette mit oft wiederkehrenden Zuständen eine Grenzverteilung, welche als die einzige Lösung eines (unendlichen) Gleichungssystems darstellbar ist, die in unserem Falle — nach (4) und (5) — folgendermassen lautet:

$$P_0 = \sum_{j=0}^{\infty} P_j p_j, \tag{14}$$

$$P_k = \sum_{j=0}^{\infty} P_j p_{j+k} + \sum_{j=k}^{\infty} P_j p_{j-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Es genügt also zu zeigen, das (12) und (13) eine Lösung dieses Gleichungssystems darstellt und dass $\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$ gilt, was man aber durch Einsetzen unmittelbar verifizieren kann. Z. B. ist das Erfülltsein von (15) mit (12) und (13) folgendermassen einzusehen: multipliziert man beide Seiten von

(15) mit $2M$ und setzt man (12) und (13) ein, ergibt sich an der rechten Seite

$$2MP_k = \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_{j+k} R_j + \sum_{j=0}^{\infty} p_{j+k} R_{j+1}\right) + \left(\sum_{j=k}^{\infty} p_{j-k} R_j + \sum_{j=k}^{\infty} p_{j-k} R_{j+1}\right) = A + B,$$

$$B = \sum_{j=k}^{\infty} p_{j-k} \sum_{i=j}^{\infty} p_i + \sum_{j=k}^{\infty} p_{j-k} \sum_{i=j+1}^{\infty} p_i =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (1 - R_{j+1}) p_{j+k} + \sum_{j=1}^{\infty} (1 - R_j) p_{j+k},$$

also $A + B = R_k + R_{k+1}$, was mit der linken Seite übereinstimmt.

Ähnlicherweise — durch Einsetzen — kann die Behauptung für den periodischen Fall verifiziert werden.

Bemerkung. Nach (12) und (13) befindet sich der wandernde Punkt im aperiodischen Fall am wahrscheinlichsten im Punkte 1.

Satz 3. *Die mittlere Anzahl pro Schritt der Spiegelungen im Ursprung ist*

$$T = \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^{\infty} R_k(R_k + R_{k+1})$$

(wobei das Erreichen des Ursprunges als eine Spiegelung gerechnet wird, das Ausgehen vom Ursprung jedoch nicht).

Beweis. Die Wahrscheinlichkeit dafür, das im n-tenSchritt eine Spiegelung stattfindet, ist offenbar

$$T_n = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{(n-1)} R_k,$$

woraus sich die Behauptung durch den Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt.

§ 3. Der Fall $\mathbf{M}(\xi_n) = +\infty$

Satz 4. *Ist die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} kp_k$ *divergent, also der Erwartungswert von* ξ_n *unendlich, so hat die betrachtete Markoffsche Kette keine oft wiederkehrende Zustände.*

Beweis. Bezeichne $P_{k0}^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der wandernde Punkt in n Schritten von k in den Ursprung gelangt. Dann gilt die folgende Rekursionsformel:

$$P_{k0}^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} P_{j0}^{(n)} p_{k+j} + \sum_{j=1}^{\infty} P_{j0}^{(n)} p_{k-j} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Führen wir noch die Bezeichnungen

$$X_0 = R_1, \tag{17}$$

$$X_j = R_j + R_{j+1} \tag{18}$$

ein. Dann folgt aus (16), durch Multiplizieren mit X_k und Summieren nach k

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{k0}^{(n+1)} X_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k0}^{(n)} X_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k X_k = R_k \leq 1, \tag{19}$$

indem man benützt, dass die Zahlen X_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ eine Lösung des Gleichungssystems (14), (15) darstellen.

Setzen wir nun vor, dass der vorliegende Markoffsche Kette aperiodisch ist. Dann folgt aus der Existenz eines oft wiederkehrenden Zustandes, dass alle Zustände oft wiederkehrend sind, und das es eine, von der Ausgangsverteilung unabhängige Grenzverteilung gibt, also gilt $P_{k0}^{(n)} \to c_0 > 0$.

Das widerspricht aber (19), da wegen $\sum_{i=0}^{\infty} R_i = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = +\infty$, $\sum_{i=0}^{\infty} x_i = +\infty$ gilt. Der periodische Fall kann auf ähnliche Weise erledigt werden.

§ 4. Der stetige Fall und andere Probleme

Der Fall, dass die ξ_n stetig verteilt sind, wird nicht ausführlich behandelt; wir beschränken uns darauf, das folgende Analogon des Satzes 2 auszusagen.

Satz 5. *Haben die Zufallsveränderlichen ξ_n die Dichtefunktion $\varphi(x)$, dann hat der durch die ξ_n in der obigen Weise definierte Markoffsche Prozess eine stationäre Verteilung mit der Dichtefunktion*

$$f(x) = \frac{1}{M} \int_x^{\infty} \varphi(x)\, dx\,, \tag{20}$$

wenn

$$M = \int_0^{\infty} x\, \varphi(x)\, dx < \infty\,.$$

Beweis. Bezeichnet $f(x)$ die Dichtefunktion der Verteilung des wandernden Punktes nach dem n-ten Schritt, so gilt

$$f_{n+1}(y) = \int_0^{\infty} f_n(x+y)\, \varphi(x)\, dx + \int_y^{\infty} f_n(x-y)\, \varphi(x)\, dx\,. \tag{21}$$

Die Behauptung des Satzes ergibt sich durch Einsetzen von (20) in (21).

Am Ende möchten wir manche offene Probleme erwähnen.

Es ist unbekannt, ob die betrachtete Irrfahrt im Falle $M = +\infty$ wiederkehrend ist, oder bei welchen Bedingungen wird es wiederkehrend. Im Falle $M < +\infty$ wäre es von Interesse, die mittlere Anzahl der zum Erreichen des Nullpunktes aus einem Punkt $k > 0$ nötigen Schritte zu bestimmen. Eine andere Frage besteht darin, ob was sich über die betrachteten Probleme sagen lässt, wenn die ξ_n auch negative (etwa einer negativen Konstante grössere) Werte annehmen dürfen.

LITERATURVERZEICHNIS

CHUNG, K. L.: *Markov Chains*. Springer Verlag, 1960.

О ЗАДАЧАХ БЛУЖДАНИЯ С ОТРАЖАЮЩЕЙ СТЕНОЙ

P. BÁRTFAI

Резюме

В статье исследуется следующая задача блуждания: Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимые, одинакого распределенные случайные величины $\mathbf{P}(\xi_i = k) = p_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Блуждающая точка, отправляющаясь из нулевой точки числовой прямой, двигается по следующим правилам: если она была в точке k после $(n-1)$-ого шага, то она будет шагать в точку $|k - \xi_n|$ (в n-ом шаге). Цепь Маркова, получаемая таким способом, несократима (Лемма 1), непериодична, или имеет период длинной два (Лемма 2). Если $\mathbf{M}(\xi_n) < +\infty$, тогда математическое ожидание времени возвращения в нулевую точку является конечным (Теорема 1); в апериодическом случае предельное распределение времени возвращения получается в виде формул (12) и (13). Математическое ожидание времени возвращения в этом случае равно $\dfrac{2\,\mathbf{M}(\xi_n)}{1 - p_0}$ (Теорема 2). Если $\mathbf{M}(\xi_n) = \infty$, тогда математическое ожидание времени возвращения является бесконечным (Теорема 4), а неизвестно, при каких условиях блуждающая точка будет возвращаться с вероятностью 1. Теорема 5 дает стационарное распределение цепи Маркова (20) в том случае, если функция плотности величины ξ_n существует, а $\mathbf{M}(\xi_n) < +\infty$.