NEUER BEWEIS EINES TUTTE'SCHEN SATZES

von

T. GALLAI

Paul Erdős zum 50. Geburtstag

Unseres Wissens nach gibt es im wesentlichen zwei verschiedene Beweise des bemerkenswerten Satzes von TUTTE über die Existenz von 1-Faktoren endlicher Graphen. Der eine beruht auf der Anwendung der hyperprimen Graphen (s. [12] und [7]), der andere gebraucht die Methode der alternierenden Züge (s. [1], [3], [13], [2] und [9]). In der vorliegenden Note wollen wir einen neuen Beweis mitteilen, der sich auf den folgenden bekannten Satz über paare Graphen[1] stützt ([8] Theorem 7., s. auch [2] S. 92 und [10] S. 112.)

(**I**) Es seien die Punkte des (paaren) Graphen[2] Γ so in zwei Klassen A und B zerlegt, daß jede Kante von Γ einen A-Punkt[3] mit einem B-Punkt verbindet. Ist für eine jede Teilmenge A' von A die Anzahl derjenigen B-Punkte, die durch Kanten von Γ mit A'-Punkten verbunden sind, nicht kleiner als die Anzahl der A'-Punkte, so kann man sämtliche A-Punkte durch Kanten von Γ mit je einem verschiedenen B-Punkt paaren, d. h. man kann zu jedem A-Punkt eine zu diesem Punkt inzidente Kante von Γ so auswählen, daß die ausgewählten Kanten paarweise keinen gemeinsamen Punkt enthalten.

Unser Beweisverfahren kann auch auf andere Probleme angewendet werden. Auf diese möchten wir in einer anderen Arbeit zurückkommen.

Wir führen einige Bezeichnungen ein und geben einige Erklärungen.

Mit Γ werden wir immer einen Graphen bezeichnen, mit $\Phi(\Gamma)$ die Menge der Punkte von Γ. Ist $A \subseteq \Phi(\Gamma)$, so soll $\Gamma - A$ denjenigen Graphen bezeichnen, der aus Γ durch Weglassen der A-Punkte und der zu den A-Punkten inzidenten Kanten von Γ entsteht. Für eine beliebige Menge M soll mit $\nu(M)$ die Anzahl der Elemente von M bezeichnet werden.

Unter einem 1-*Faktor* von Γ versteht man eine Menge F von Kanten von Γ, die folgende Eigenschaften besitzt: Je zwei Kanten von F haben keinen

[1] Dieser Satz, der mit bekannten Sätzen von KÖNIG, HALL und RADO (s. [6] S. 232—235, [4] und [11]) in enger Beziehung steht, wurde zuerst von ORE formuliert [8]. Kürzlich hat A. J. HOFFMAN [5] eine Reihe kombinatorischer Sätze auf den eben erwähnten Hall'schen Satz zurückgeführt. Er stellte ferner die Frage, ob das gleiche auch für die Faktorisationssätze ungerichteter Graphen möglich ist. Da man nach TUTTE [14] die Existenzsätze bezüglich beliebiger Faktoren auf diejenigen der 1-Faktoren zurückführen kann, gibt unser Beweis eine bejahende Antwort auf die gestellte Frage.

[2] Die vorkommenden Graphen sind stets endlich und ungerichtet, und erhalten keine Schlingen. Statt Knotenpunkte sagen wir kurz nur Punkte.

[3] d. h. einen Punkt von A

gemeinsamen Punkt und jeder Punkt von Γ ist mit einer Kante von F inzident. Wir wollen sagen, daß der leere Graph den 1-Faktor $F = \emptyset$ besitzt. Einen Graphen, der keinen 1-Faktor besitzt, werden wir *prim* nennen und die Anzahl der primen Komponenten von Γ mit $\lambda(\Gamma)$ bezeichnen.

Nun kann man den zu beweisenden Tutte'schen Satz folgendermassen formulieren:

Satz von Tutte. *Der Graph Γ besitzt dann und nur dann einen 1-Faktor, wenn für jede beliebige Menge B von Punkten aus Γ die Anzahl derjenigen Komponenten von $\Gamma - B$, die eine ungerade Anzahl von Punkten enthalten, $\leqq \nu(B)$ ist.*

Den Beweis führen wir in mehreren Schritten durch.

(**II**) Ist Γ prim, so ist $\lambda(\Gamma) > 0$.

(**III**) Ein Graph mit ungerader Anzahl von Punkten ist prim.

Diese beiden Aussagen sind trivial.

(**IV**) Besitzt Γ einen 1-Faktor, so gilt für ein jedes $B \subseteq \Phi(\Gamma)$

$$\lambda(\Gamma - B) \leqq \nu(B).$$

Beweis. Wir können $\lambda(\Gamma - B) > 0$ annehmen. Es sei F ein 1-Faktor von Γ und $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ $(k \geqq 1)$ die primen Komponenten von $\Gamma - B$. Da $\Gamma_i (1 \leqq i \leqq k)$ prim ist, können diejenigen Kanten von F, die mit Punkten von Γ_i inzident sind, nicht alle Γ_i angehören. Es gibt also für jedes $i (1 \leqq i \leqq k)$ eine Kante von F, von deren Endpunkten der eine Γ_i, der andere B angehört. Daraus folgt die Behauptung.

Wir beweisen nun die Notwendigkeit der Tutte'schen Bedingung. Es sei Γ ein Graph, für den ein solches $B \subseteq \Phi(\Gamma)$ existiert, daß die Anzahl derjenigen Komponenten von $\Gamma - B$, die eine ungerade Anzahl von Punkten enthalten, $> \nu(B)$ ist. Nach (III) ist dann $\lambda(\Gamma - B) > \nu(B)$, und daraus folgt nach (IV), daß Γ prim ist.

Die Behauptung (IV) gibt Anlaß zur folgenden Begriffsbildung:

(**V**) **Definition.** Ein Graph Γ heißt *kritisch*, falls Γ prim und zusammenhängend ist, und für jedes *nichtleere* $B \subseteq \Phi(\Gamma)$

$$\lambda(\Gamma - B) \leqq \nu(B)$$

besteht.

So ist z. B. ein Graph, der aus einem einzigen Punkt besteht, kritisch.

(**VI**) Ist Γ prim, so gibt es ein solches $B \subseteq \Phi(\Gamma)$, daß $\lambda(\Gamma - B) > \nu(B)$ gilt und sämtliche prime Komponenten von $\Gamma - B$ kritisch sind.

Beweis. Es sei Γ prim. Dann existieren Mengen $B \subseteq \Phi(\Gamma)$ mit $\lambda(\Gamma - B) > \nu(B)$ (nach (II) ist $B = \emptyset$ eine solche Menge). Es soll B_0 ein solches B mit maximaler Anzahl von Punkten bezeichnen. Es seien $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ die primen Komponenten von $\Gamma - B_0$ $(k > \nu(B_0))$. Es genügt zu zeigen, daß sämtliche $\Gamma_i (1 \leqq i \leqq k)$ kritisch sind. Nehmen wir an, daß z. B. Γ_1 nicht kritisch ist. Dann existiert ein nichtleeres $B_1 \subseteq \Phi(\Gamma_1)$ mit $\lambda(\Gamma_1 - B_1) > \nu(B_1)$. Sind $\Gamma_{11}, \ldots, \Gamma_{1j}$ die primen Komponenten von $\Gamma_1 - B_1$ $(j > \nu(B_1))$, so sind für $B' = B_0 \cup B_1$ $\Gamma_{11}, \ldots, \Gamma_{1j}, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ die primen Komponenten von $\Gamma - B'$. Die Anzahl dieser ist $j + k - 1 > \nu(B_1) + \nu(B_0) = \nu(B') > \nu(B_0)$. Dies widerspricht jedoch der Definition von B_0.

(**VII**) Ist Γ kritisch und ist x ein beliebiger Punkt von Γ, so besitzt der Graph $\Gamma - \{ x \}$ einen 1-Faktor.

Beweis. Wir führen den Beweis mit Induktion bezüglich der Anzahl der Punkte von Γ durch. Enthält Γ nur einen Punkt, so ist die Behauptung richtig. Nehmen wir an, daß sie für sämtliche solche Graphen richtig ist, die weniger als $n(n > 1)$ Punkte enthalten, und es sei Γ ein kritischer Graph mit n Punkten. Es sei x ein Punkt von Γ und nehmen wir an, daß $\Gamma' = \Gamma - \{x\}$ prim ist. Nach (VI) gibt es dann ein solches $B' \subseteq \Phi(\Gamma')$, daß die primen Komponenten von $\Gamma' - B' : \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ sämtlich kritisch sind und $k > \nu(B')$ gilt. Setzen wir $B' \cup \{x\} = B$. Es gilt $\Gamma - B = \Gamma' - B'$ und

$$(*) \qquad k \geqq \nu(B)\,.$$

Die Behauptung »$\Gamma_i (1 \leqq i \leqq k)$ ist mit dem Punkt $b \in B$ verbunden« soll bedeuten: Es gibt in Γ_i einen Punkt, der mit b durch eine Kante von Γ verbunden ist.

Wir betrachten nun eine beliebige Teilmenge H_1 der Menge $H = \{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$ und bezeichnen mit B_1 die Menge derjenigen B-Punkte, die mit wenigstens einem Element von H_1 verbunden sind.

Wir behaupten, daß $\nu(B_1) \geqq \nu(H_1)$ ist. Die Elemente[4] von H_1 sind nämlich auch Komponenten des Graphen $\Gamma - B_1$. Es ist also $\lambda(\Gamma - B_1) \geqq \nu(H_1)$. Die Behauptung $\nu(H_1) > \nu(B_1)$ wiederspricht daher im Falle $B_1 \neq \emptyset$ unmittelbar der Annahme, daß Γ kritisch ist. Im Falle $B_1 = \emptyset$ gelangen wir gleichfalls in Widerspruch mit dieser Annahme, da ein kritischer Graph zusammenhänged sein muß, und in diesem Falle $\Gamma = \Gamma - B_1$ mindestens zwei Komponenten besitzt: eine solche, die Element von H_1 ist und eine andere, die den Punkt x enthält.

Da $\nu(B_1) \geqq \nu(H_1)$ für jedes $H_1 \subseteq H$ gilt, so kann man nach (I) aus B die verschiedenen Punkte $b_1, \ldots, b_k$ so auswählen, daß b_i mit $\Gamma_i (i = 1, \ldots, k)$ verbunden ist.[5] Wegen (*) muß dann $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ bestehen, und wir können in Γ_i einen Punkt c_i finden, der durch eine Kante e_i von Γ mit b_i verbunden ist $(i = 1, \ldots, k)$. Da Γ_i kritisch ist, besitzt nach der Induktionsannahme $\Gamma_i - \{c_i\}$ einen 1-Faktor $F_i (i = 1, \ldots, k)$. Bezeichnet ferner F_0 einen 1-Faktor desjenigen Teilgraphen von Γ, der durch die Vereinigung der nichtprimen Komponenten von $\Gamma' - B'$ zustandekommt, so bildet die Vereinigung der Mengen $F_0, F_1, \ldots, F_k$ und $\{e_1, \ldots, e_k\}$ einen 1-Faktor von Γ. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung (VII).

Aus (VII) folgt unmittelbar die Behauptung:

(VIII) Die Anzahl der Punkte eines kritischen Graphen ist ungerade.

Jetzt beweisen wir, daß die Tutte'sche Bedingung hinreichend ist. Nehmen wir an, daß Γ prim ist. Es gibt dann nach (VI) ein solches $B \subseteq \Phi(\Gamma)$, daß $\lambda(\Gamma - B) > \nu(B)$ gilt und sämtliche prime Komponenten von $\Gamma - B$ kritisch sind. Nach (VIII) enthält jede dieser Komponenten eine ungerade Anzahl von Punkten. Γ genügt also nicht der Tutte'schen Bedingung. Damit haben wir den Beweis des Tutte'schen Satzes beendet.

---

[4] Wir dürfen $H_1 \neq \emptyset$ annehmen.

[5] Zur formalen Anwendung von (I) betrachte man denjenigen paaren Graphen Γ^*, deren Punktklassen H und B sind, und ein »Punkt« Γ_i von H dann und nur dann mit einem Punkt $b \in B$ durch eine Kante von Γ^* verbunden ist, falls die Komponente Γ_i in Γ mit b verbunden ist.

Um die Bezeichnung »kritisch« zu rechtfertigen, wollen wir noch die folgende einfache Behauptung beweisen:

(IX) Ist Γ prim und besitzt für jeden Punkt x von Γ der Graph $\Gamma - \{x\}$ einen 1-Faktor, so ist Γ kritisch.

Beweis. Nehmen wir an, daß Γ den gestellten Bedingungen genügt. Γ ist dann zusammenhängend. Im entgegengesetzten Falle gäbe es nämlich nach (II) eine prime Komponente Γ_1 und eine von Γ_1 verschiedene Komponente Γ_2 von Γ. Ist x ein Punkt von Γ_2, so müßte $\Gamma - \{x\}$ — entgegen unserer Annahme — prim sein. Ist nun der zusammenhängende Graph Γ nicht kritisch, so gibt es ein nichtleeres $B \subseteq \Phi(\Gamma)$ mit $\lambda(\Gamma - B) > \nu(B)$. Es sei $x \in B$, $B' = B - \{x\}$ und $\Gamma' = \Gamma - \{x\}$. Dann gilt $\Gamma' - B' = \Gamma - B$ und daher $\lambda(\Gamma' - B') > \nu(B) > \nu(B')$. Nach (IV) ist also Γ' prim, was unserer Annahme widerspricht.

Nach (VII) und (IX) lassen sich die kritischen Graphen folgendermaßen charakterisieren:

(X) Ein kritischer Graph ist ein solcher primer Graph, der durch Weglassung eines beliebigen Punktes nichtprim wird.

Endlich wollen wir noch folgendes bemerken: In jenen Beweisen des Tutte'schen Satzes, welche die Methode der alternierenden Züge gebrauchen, kommen gewiße »Blöcke« vor (s. z. B. [3] S. 137 oder [9] S. 123). Man kann nun leicht zeigen, daß diese Blöcke kritische Graphen sind, und umgekehrt, daß jeder kritische Graph, der mehr als einen Punkt enthält, als ein solcher Block aufgefasst werden kann.

(Eingegangen: 6. Februar, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] BELCK, H. B.: "Reguläre Faktoren von Graphen". *Journal für die reine und angew. Math.* **188** (1950) S. 228—252.
[2] BERGE, C.: *Théorie des graphes et ses applications.* (Paris, 1958.)
[3] GALLAI, T.: "On factorization of graphs". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **1** (1950) S. 133—153.
[4] HALL, P.: "On representatives of subsets". *Journal London Math. Soc.* **10** (1953) S. 26—30.
[5] HOFFMAN, A. J.: "Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis". *Proc. of Symposia in Applied Math.*, vol. 10 S. 113—127.
[6] KÖNIG, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* (Leipzig, 1936).
[7] MAUNSELL, F. G.: "A note on Tutte's paper: 'The factorization of linear graphs' ". *Journal London Math. Soc.* **27** (1952) S. 127—128.
[8] ORE, O.: "Graphs and matching theorems". *Duke Math. Journal* **22** (1955) S. 625—639.
[9] ORE, O.: "Graphs and subgraphs". *Trans. Amer. Math. Soc.* **84** (1957) S. 109—136.
[10] ORE, O.: *Theory of graphs.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **38** (1962).
[11] RADO, R.: "Factorization of even graphs". *Quarterly Journal of Math.* **20** (1949) S. 95—104.

[12] TUTTE, W. T.: "The factorization of linear graphs". *Journal London Math. Soc.*, **22** (1947) S. 107—111.
[13] TUTTE, W. T.: "The factors of graphs". *Canadian Journal of Math.* **4** (1952) S. 314—328.
[14] TUTTE, W. T.: "A short proof of the factor theorem for finite graphs". *Canadian Journal of Math.* **6** (1954) S. 347—352.

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ТУТТЕ

T. GALLAI

Резюме

Автор дает новое доказательство знаменитой теормеы TUTTE [12] относящейся к существованию 1-множителей. Доказательство основано на одной известной теореме о четных графах ([8], теорема 7).