KRITISCHE GRAPHEN I

von

T. GALLAI

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit kommen nur solche endliche Graphen vor, die weder Schlingen, noch mehrfache Kanten enthalten. Unter einer *zulässigen Färbung* des Graphen G verstehen wir eine Zuordnung von „Farben" zu den Knotenpunkten (im folgenden kurz: Punkten) von G, wobei jeder Punkt eine Farbe bekommt, und je zwei durch eine Kante verbundenen Punkte stets verschiedene Farben erhalten. Die kleinste Anzahl von Farben, mit der eine zulässige Färbung des Graphen G durchgeführt werden kann, heißt die *chromatische Zahl* von G, die wir mit $\varkappa(G)$ bezeichnen. Für den leeren Graphen G sei $\varkappa(G) = 0$. Der Graph G heißt *kritisch*, wenn für jeden echten Teilgraphen G' von G $\varkappa(G') < \varkappa(G)$ gilt. G heißt *k-kritisch* ($k \geqq 1$), wenn G kritisch ist und $\varkappa(G) = k$ besteht. Der Begriff der kritischen Graphen wurde von G. A. DIRAC eingeführt, und er bewies auch eine Reihe interessanter Eigenschaften dieser Graphen (s. [2]—[8]). In der vorliegenden Arbeit zeigen wir einige weitere Eigenschaften der kritischen Graphen. Mehrere der Resultate sind Verschärfungen gewisser Ergebnisse von DIRAC und anderer Verfasser.

Man kann leicht zeigen (s. [2], [12]), daß in einem k-kritischen Graphen der Grad[1] eines jeden Punktes $\geqq k—1$ ist. Der Kürze halber werden wir die Punkte (k—1)-ten Grades eines k-kritischen Graphen die *Nebenpunkte*, alle übrigen Punkte die *Hauptpunkte* des Graphen nennen. Es existieren kritische Graphen, die nur Nebenpunkte besitzen. Die vollständigen Graphen[2] und die ungeraden Kreise[3] sind solche Graphen, und man kann zeigen (s. (3.1)), daß außer diesen keine weitere existeren. Für $k = 1, 2, 3$ existieren überhaupt keine anderen k-kritischen Graphen (s. [12]). Die aus lauter Nebenpunkten bestehenden Graphen sind also von sehr einfacher Natur. Nun stellte sich heraus, daß die Nebenpunkte in jedem kritischen Graphen einen Teilgraphen von sehr einfacher Struktur spannen[4], sowie daß dieser Teilgraph eben aus vollständigen Graphen und ungeraden Kreisen zusammengesetzt ist. Es gilt diesbezüglich der

[1] Der Grad eines Punktes ist die Anzahl der zu dem Punkt inzidenten Kanten.

[2] Ein vollständiger j-Graph ($j \geqq 0$) besitzt j Punkte, und je zwei dieser sind durch eine Kante des Graphen verbunden. (Wir betrachten also den leeren Graphen als vollständigen 0-Graphen, den einpunktigen Graphen als vollständigen 1-Graphen.)

[3] Ein Kreis heißt ungerade, wenn er eine ungerade Anzahl von Kanten besitzt.

[4] Ist A eine Menge von Punkten des Graphen G, so besteht der durch A gespannte Teilgraph von G aus den Punkten von A und aus sämtlichen solchen Kanten von G, die Punkte von A verbinden.

Satz (E. 1). *Es sei G ein k-kritischer Graph und G_N der durch die Nebenpunkte von G gespannte Teilgraph von G. Dann sind die Glieder*[5] *von G_N vollständige j-Graphen ($0 \leqq j \leqq k$) und ungerade Kreise. (Enthält G keinen Nebenpunkt, so ist G_N der vollständige 0-Graph, d. h. der leere Graph.)*

Läßt man den vollständigen k-Graphen außer Betracht, so reicht im Falle $k \geqq 4$ die in (E. 1) ausgesprochene Eigenschaft, mit einer trivialen Ergänzung, zur Charakterisierung der Teilgraphen G_N aus. Dies besagt der

Satz (E. 2). *Es sei $k \geqq 4$ und G' ein Graph, dessen Glieder vollständige j-Graphen ($0 \leqq j \leqq k—1$) und ungerade Kreise sind und in dem jeder Punkt einen Grad $\leqq k—1$ besitzt. Dann existiert ein solcher k-kritischer Graph G, in dem die Nebenpunkte einen mit G' isomorphen Graphen spannen.*

Satz (E. 2) enthält auch die Behauptung, daß es für $k \geqq 4$ k-kritische Graphen ohne Nebenpunkte existieren. Bei dem Beweis dieser Behauptung ist die Angebung einen 4-kritischen Graphen ohne Nebenpunkte die Hauptaufgabe. Man kann nämlich mit Hilfe einen solchen 4-kritischen Graphen in sehr einfacher Weise für jedes beliebige $k > 4$ einen k-kritischen Graphen ohne Nebenpunkte konstruieren (s. unter (2.1)). In (2.3) geben wir unendlich viele solche 4-kritischen Graphen an, in denen jeder Punkt den Grad 4 hat. Bezüglich diesen Graphen werden wir auch die folgende interessante Tatsache beweisen (s. (2.4)): Man kann unter den angegebenen Graphen unendlich viele solche Graphen finden, die keine ,,kleine'' ungerade Kreise enthalten, genauer gesagt deren ungerade Kreise mindestens $\sqrt{n}$ Kanten enthalten, wobei n die Punktanzahl der Graphen bezeichnet.[6]

Neben der Angebung k-kritischen Graphen ohne Nebenpunkte, beruht der Beweis von (E. 2) auf solche Konstruktionen, mit Hilfe derer man aus kritischen Graphen neue kritische Graphen herstellen kann. Zum Beweis von (E. 1) wenden wir dieselbe Methode des Farbenwechsels an, mit welchem BROOKS seinen Färbungssatz bewiesen hat.

Wir zeigen mehrere Anwendungen des Satzes (E. 1). Der vorher erwähnte Brooks'sche Satz ergibt sich als unmittelbare Folge (s. (3.2)). Wir stellen dann mit Hilfe (E. 1) in direkter Form diejenigen kritischen Graphen dar, die genau einen Hauptpunkt besitzen (Satz (3.3)). Diese Graphen waren vorher von DIRAC durch ein rekurrentes Verfahren hergestellt worden (s. [8]). Unsere Darstellung gibt die Möglichkeit aus diesen Graphen solche auszuwählen, deren größte Kreise ,,klein'' sind. Wir können so bei jedem festen $k \geqq 4$ für unendlich viele n solche n-punktigen k-kritischen Graphen angeben, deren größten Kreise weniger als $c_k \log n$ Kanten enthalten (c_k bezeichnet eine nur von k abhängige Konstante) (Satz (5.2)). Dies bedeutet eine Verschärfung früherer Resultate von J. B. KELLY und L. M. KELLY, DIRAC und R. C. READ ([10], [5], [13]). Es sei

---

[5] Die Glieder eines zusammenhängenden, mehrpunktigen Graphen G sind durch die folgenden Eigenschaften bestimmt: Durch je zwei Kanten desselben Gliedes geht ein Kreis von G, durch zwei solche Kanten, die zu verschiedenen Gliedern gehören, geht kein Kreis von G. Der leere sowie der einpunktige Graph besitzt ein einziges Glied: den Graphen selbst. Man versteht unter den Gliedern eines nicht zusammenhängenden Graphen die Glieder seiner Komponenten (s. [11], [12]).

[6] Siehe ERDŐS, P.: ,,On circuits and subgraphs of chromatic graphs''. *Mathematika* **9** (1962) S. 171.

noch erwähnt, daß man mit Hilfe von (E.1) auch jene kritischen Graphen herleiten kann, die genau zwei Hauptpunkte besitzen.

Der Satz (E.1) gibt auch die Möglichkeit zur Bestimmung einer unteren Schranke für die Kantenanzahl kritischer Graphen. Wir zeigen, daß ein k-kritischer ($k \geqq 4$) Graph mit n ($n > k$) Punkten stets mehr als $n(k-1)/2 + n/(2(k+9))$ Kanten enthält (Satz (4.4)). Unsere Schranke ist zwar für "kleine" n kleiner, als die von DIRAC angegebene (s. [8] und (4.2)) — diese hat den Wert $n(k-1)/2 + (k-3)/2$ — sie hat jedoch die Eigenschaft, daß ihr Unterschied von der „trivialen Schranke" $n(k-1)/2$ mit n ins Unendliche wächst.[7]

1. Beweis des Satzes (E.1)

In diesem Abschnitt führen wir zuerst mehrere Bezeichungen ein und geben einige Erklärungen. Dann beweisen wir mehrere Hilfsätze und gelangen durch diese zum Beweis des Satzes (E.1).

(1.1) Bezeichnungen und Erklärungen. Ist M eine endliche Menge, so bezeichne $\mathcal{N}(M)$ die Anzahl der Elemente von M. Mit G (auch mit verschiedenen Zeichen versehen) werden wir immer Graphen bezeichnen. $\mathcal{P}(G)$ bzw. $\mathcal{K}(G)$ bezeichnet die Menge der Punkte bzw. Kanten von G; $\pi(G)$ bzw. $\nu(G)$ die Anzahl der Punkte bzw. Kanten von G. Ist $\mathcal{P}(G) = \emptyset$ und $\mathcal{K}(G) = \emptyset$, so heißt G leer ($G = \emptyset$).

Der Graph $G_1 \cup G_2$, bzw. $G_1 \cap G_2$ ist durch $\mathcal{P}(G_1 \cup G_2) = \mathcal{P}(G_1) \cup \mathcal{P}(G_2)$, $\mathcal{K}(G_1 \cup G_2) = \mathcal{K}(G_1) \cup \mathcal{K}(G_2)$ bzw. $\mathcal{P}(G_1 \cap G_2) = \mathcal{P}(G_1) \cap \mathcal{P}(G_2)$, $\mathcal{K}(G_1 \cap G_2) = \mathcal{K}(G_1) \cap \mathcal{K}(G_2)$ definiert. Falls $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ ist, so sagen wir daß G_1 und G_2 *fremd* sind.

$\varrho_G(x)$ ist der Grad des Punktes x in G. Ist $\varrho_G(x) = 0$, so heißt x ein *isolierter* Punkt von G. xy oder yx bezeichnet die Kante, die die Punkte x und y verbindet. Sind A und B Punktmengen, dann nennen wir ihre Punkte kurz A-bzw. *B-Punkte*. Eine *AB-Kante* ist eine solche Kante, die einen A-Punkt mit einem B-Punkt verbindet. Ist $A = \{a\}$, so schreiben wir statt AB-Kante *aB-Kante*. $x \in G$ ist gleichbedeutend mit $x \in \mathcal{P}(G)$, $xy \in G$ mit $xy \in \mathcal{K}(G)$.[8] Ist $xy \in G$, so sagen wir auch, daß x und y in G *verbunden* oder *benachbart* sind. Gilt $A \subseteq \mathcal{P}(G)$, $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ und enthält G jede AB-Kante, dann sagen wir, daß A und B in G *vollständig verbunden* sind.

$G' \subseteq G$ drückt aus, daß G' ein Teilgraph von G ist ($G' \subset G$, daß G' ein echter Teilgraph ist). Ist $A \subseteq \mathcal{P}(G)$, so bezeichnet $[A]_G$ den durch A gespannten Teilgraphen von G. Wir setzen $G-A = [\mathcal{P}(G)-A]_G$ ($A \subseteq \mathcal{P}(G)$) und $G-x = G-\{x\}$ ($x \in \mathcal{P}(G)$). Ist $xy \in G$, dann bezeichnet $G-xy$ jenen Graphen, der aus G durch Weglassung der Kante xy entsteht.

Für den mit G bezeichneten Graphen werden wir von den Zeichen $\varrho_G(x)$ und $[A]_G$ den Index G meistens weglassen. Die Begriffe „Grad" „benachbart" u. s. w. beziehen sich — wenn anders nicht gesagt wird — gleichfalls auf den mit G bezechneten Graphen.

[7] Unseres Wissens nach hat auch DIRAC bewiesen, daß der Unterschied zwischen der Kantenanzahl und $n(k-1)/2$ mit n ins Unendliche wächst.

[8] Die Punkte werden immer mit kleinen lateinischen Buchstaben, die Kanten mit Buchstabenpaaren bezeichnet.

Die Punktmenge A ist eine *trennende Punktmenge* des zusammenhängenden Graphen G, wenn $A \subseteq \mathscr{P}(G)$ besteht und $G—A$ nicht zusammenhängend ist. Ist $\{x\}$ eine trennende Menge von G, so heißt x ein *trennender Punkt* von G. Unter den trennenden Punkten eines nicht-zusammenhängenden Graphen G verstehen wir die trennenden Punkte der Komponenten von G. Ist x kein trennender Punkt von G, so gehört er zu genau einem Glied von G (s. die Fußnote[5] der Einleitung). Wir nennen ein solches x einen *inneren Punkt* des Gliedes, dem es angehört. Ein Glied von G heißt *Endglied*, wenn es höchstens einen trennenden Punkt von G enthält. Jeder Graph besitzt mindestens einen Endglied, diejenigen mit trennenden Punkten mindestens zwei (s. [12] S. 88). Ist G zusammenhängend und mehrpunktig, so enthält jedes Endglied von G innere Punkte.

$W = (x_1 \ldots x_n)$ $(n \geqq 1)$ bezeichnet im Falle $n \geqq 2$ jenen Weg, der aus den (verschiedenen) Punkten $x_1, \ldots, x_n$ und aus den Kanten $x_1x_2, \ldots, x_{n-1}x_n$ besteht; im Falle $n = 1$ den einpunktigen Graphen (Weg) (x_1), der aus x_1 besteht. Wir werden W auch einen x_1x_n-Weg nennen.

$V = (x_1x_2 \ldots x_nx_1)$ $(n \geqq 3)$ bezeichnet jenes Vieleck (Kreis), das aus den (verschiedenen) Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und aus den Kanten $x_1x_2, \ldots, x_{n-1}x_n, x_nx_1$ besteht. Zwei Punkte x_i und x_j von V zerlegen V in zwei Wege, diese heißen die *durch x_i und x_j bestimmten Bogen* von V. Die *Diagonalen* von V sind diejenigen Kanten, die Punkte von V verbinden, jedoch nicht zum Graphen V gehören.

Unter der *Größe (Länge)* eines Weges bzw. Kreises (Vielecks) verstehen wir die Anzahl seiner Kanten. Ein Weg bzw. ein Kreis heißt *gerade* oder *ungerade*, je nach dem seine Länge gerade oder ungerade ist.

Den ausdruck ,,vollständiger j-Graph'' werden wir mehrmals durch das Zeichen $\langle j \rangle$ ersetzen. $G = \langle j \rangle$ bedeutet also, daß G ein vollständiger j-Graph ist.

Für die Färbung der Punkte sollen die nichtnegativen ganzen Zahlen benützt werden. Ist f eine Färbung von G, ist ferner $x \in G$ $G' \subseteq G$ und $A \subseteq \mathscr{P}(G)$, dann bezeichnet $f(x)$ die Farbe von x in f, $f(G')$ bzw. $f(A)$ die Menge der in G' bzw. A vorkommenden Farben von f. Eine *k-Färbung* $(k \geqq 1)$ von G ist eine zulässige Färbung von G mit höchtens k Farben. G heißt *k-färbbar*, wenn er eine k-Färbung besitzt. (Ein k-färbbarer Graph ist also auch $(k + r)$-färbbar $(r > 0)$.) Ist $\varkappa(G) = k$, so heißt G *k-chromatisch*. Gilt für jedes $x \in G$ $\varkappa(G—x) < \varkappa(G)$, so heißt G *punktkritisch*.

Es sei $\varkappa(G) = k$ und $x \in G$. f heißt eine *zu x gehörige Färbung* (von G), wenn f eine solche k-Färbung von G ist, bei der die Farbe $f(x)$ in keinem von x verschiedenen Punkt vorkommt.

Die folgenden drei Behauptungen sind trivial:

(1.2) *Zu jedem Punkt x des kritischen Graphen G existiert eine zu x gehörige Färbung von G.*

(1.3) *Es sei G k-kritisch $(k \geqq 2)$, x ein Nebenpunkt von G $(\varrho(x) = k—1)$ und f eine zu x gehörige Färbung von G. Sind dann $x_1, \ldots, x_{k-1}$ die Nachbarpunkte von x in G, so sind $f(x_1), \ldots, f(x_{k-1})$ verschieden.*

(1.4) *Es sei G kritisch, $x \in G$, f eine zu x gehörige Färbung von G und y ein solcher Nachbarpunkt von x, dessen Farbe $f(y)$ bei keinem anderen Nachbarpunkt* *von x vorkommt. Vertauscht man dann die Farben von x und y, ohne die Farbe der übrigen Punkte zu ändern, so geht f in eine zu y gehörige Färbung über.*

Aus (1.3) und (1.4) folgt unmittelbar

(1.5) *Es sei G k-kritisch ($k \geqq 2$), x ein Nebenpunkt von G und f eine zu x gehörige Färbung von G. Ist y ein beliebiger Nachbarpunkt von x, so führt die Vertauschung der Farben von x und y, bei Festhaltung der Farben der übrigen Punkte, die Färbung f in eine zu y gehörige Färbung über.*

Der in (1.5) vorkommende Farbenwechsel wurde erst von Brooks im Beweis seines Färbungssatzes angewendet [1].

(1.6) **Lemma.** *Es sei G k-kritisch ($k \geqq 3$), $x_0, x_1, \ldots, x_l$ Nebenpunkte von G und $V = (x_0x_1 \ldots x_lx_0)$ ein Vieleck von G. Ferner sei f eine zu x_0 gehörige Färbung von G. Permutiert man dann die Farben von $x_1, \ldots, x_l$ in zyklischer Ordnung, ohne die Farbe der übrigen Punkte zu ändern, so gelangt man wieder zu einer zu x_0 gehörigen Färbung von G.*

Beweis. Es sei $f(x_0) = 0$ und $f(x_i) = \alpha_i$ ($i = 1, \ldots, l$). Vertauscht man nacheinander die Farben von x_0 und x_1, x_1 und $x_2, \ldots, x_{l-1}$ und x_l, und endlich diejenigen von x_l und x_0, ohne die Farbe der übrigen Punkte zu ändern, so erhält man zufolge (1.5) der Reihe nach die zu den Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_l, x_0$ gehörigen Färbungen $f_1, f_2, \ldots, f_l$ und f'. In f_i ($1 \leqq i \leqq l-1$) erhalten die Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_l$ die Farben $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_l$, in f_l diejenigen von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, 0$ und in f' die Farben $0, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_l, \alpha_1$.

(1.7) *Es sei G k-kritisch ($k \geqq 3$) und V ein solches Vieleck von G, das nur Nebenpunkte von G enthält. Gibt es dann in V einen Punkt x_0 mit der Eigenschaft, daß G keine aus x_0 ausgehende Diagonale von V enthält, so muß V ein ungerades Vieleck sein.*

Beweis. Es sei $V = (x_0x_1 \ldots x_lx_0)$ ($l \geqq 2$) und A die Menge jener Nachbarpunkte von x_0, die nicht zu V gehören, also die Menge sämtlicher Nachbarpunkte mit Ausnahme von x_1 und x_l. Ferner sei f eine zu x_0 gehörige Färbung von G. Wir zeigen erst, daß keine der Farben $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_l)$ in $f(A)$ enthalten ist. Für $f(x_0)$ ist das trivial, für $f(x_1)$ und $f(x_l)$ folgt dies aus (1.3). Im Falle $l > 2$ sei $f(x_i) = \alpha$ ($1 < i < l$). Durch ($i-1$)-malige zyklische Permutation der Farben von $x_1, \ldots, x_l$ (in den übrigen Punkten werden dabei die Farben festgehalten) bekommt man eine solche Färbung f' von G, für die $f'(x_1) = \alpha$ besteht. Nach (1.6) ist f' eine zu x_0 gehörige Färbung von G, und so ist nach (1.3) $\alpha \notin f'(A) = f(A)$.

Anderseits folgt nach (1.3) aus unsern Annahmen, daß $f(A)$ genau $k-3$ Farben enthält. Die Farbe $f(x_0)$ kann in keinem von x_0 verschiedenen Punkt vorkommen. Es bleiben also für die Punkte $x_1, \ldots, x_l$ nur zwei Farben. Diese müßen in der Folge $f(x_1), \ldots, f(x_l)$ abwechselnd auftreten. Nach (1.3) ist jedoch $f(x_1) \neq f(x_l)$, und so muß l gerade sein.

(1.7) ist mit der folgenden Aussage gleichwertig:

(1.8) *Ist G k-kritisch ($k \geqq 3$) und V ein solches gerades Vieleck von G, das nur Nebenpunkte von G enthält, dann läuft aus jedem Punkt von V mindestens eine zu G gehörige Diagonale von V aus.*

Zum Beweis des Satzes (E.1) wird nur von der in (1.8) formulierter Eigenschaft der kritischen Graphen Gebrauch gemacht. Es genügt sogar weniger: Wir werden nur benützen, daß der Graph G von (1.8) *mindestens zwei Diagonalen* des Vielecks von (1.8) enthält. Es gilt nämlich folgender Satz:

(1.9) **Satz.** *Es enthälte der Graph G zusammen mit jedem geraden Vieleck auch mindestens zwei Diagonalen dieses Vielecks. Dann sind sämtliche Glieder von G vollständige Graphen und ungerade Vielecke.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß ein beliebiges mehrkantiges Glied von G ein vollständiger Graph oder ein ungerades Vieleck ist.

I) Wir zeigen zuerst, daß G zusammen mit einem geraden Vieleck auch sämtliche Diagonalen des Vielecks enthält. Nehmen wir das Gegenteil an, und bezeichne $V = (x_1, \ldots x_l x_1)$ ein kleinstes gerades Vieleck von G, dessen Diagonalen nicht alle zu G gehören. Da mindestens zwei Diagonalen von V in G enthalten sind, muß $l \geqq 6$ sein. Nennen wir in diesem Beweis eine Diagonale xy von V *gerade* oder *ungerade*, je nachdem ob die durch x und y bestimmten Bogen von V beide gerade oder beide ungerade sind. (Da l gerade ist, ist jede Diagonale von V entweder gerade oder ungerade.)

a) Wir beweisen, daß G auch ungerade Diagonalen von V enthält. G enthält zwei Diagonalen von V. Wir dürfen annehmen, daß $x_1x_j \in G$, $x_gx_h \in G$ $(1 < g < j < l,\ g + 1 < h)$ besteht. Es seien diese beiden Diagonalen gerade (sonst gibt es nichts zu beweisen). Es ist also $j \equiv 1$ und $h \equiv g \pmod 2$, und so besteht

$$(*) \qquad g - 1 \equiv h - j \pmod 2 .$$

Ist $h \leqq j$, dann ist wegen (*) $V' = (x_1x_2 \ldots x_gx_h \ldots x_jx_1)$ ein gerades Vieleck von G. Dieses ist kleiner als V, und so enthält nach unserer Annahme G alle Diagonalen von V'. Es ist also $x_2x_j \in G$ und x_2x_j ist eine ungerade Diagonale von V.

Ist $h > j$, so sind wegen (*) die zu G gehörigen Vielecke $V_1 = (x_1x_2 \ldots x_gx_hx_{h-1} \ldots x_jx_1)$ und $V_2 = (x_1x_jx_{j-1} \ldots x_gx_hx_{h+1} \ldots x_lx_1)$ beide gerade. Die Summe der Längen von V_1 und V_2 ist $l + 4$. Da $l > 4$ ist, muß der eine von V_1 und V_2 kleiner als V sein. Wir dürfen annehmen, daß V_1 kleiner als V ist. G enthält dann sämtliche Diagonalen von V_1. Es gilt also $x_2x_j \in G$ und $x_1x_{j+1} \in G$. Wegen $l > 4$ ist jedoch der eine von x_2x_j und x_1x_{j+1} sicher eine Diagonale von V, undzwar eine ungerade Diagonale.

b) Es sei nun x_1x_j eine zu G gehörige ungerade Diagonale von V. Dann sind die in G liegenden Vielecke $V_1 = (x_1x_2 \ldots x_jx_1)$ und $V_2 = (x_1x_jx_{j+1} \ldots x_lx_1)$ beide gerade und beide kleiner als V. G enthält also alle Diagonalen von V_1 und V_2. Es sei x_gx_h $(\neq x_1x_j)$ eine solche Diagonale von V, die weder Diagonale von V_1 noch von V_2 ist. Wir können $1 < g < j < h \leqq l$ annehmen. Nach den obigen liegt das Viereck $V_3 = (x_1x_gx_jx_hx_1)$ in G, und so enthält G beide Diagonalen von V_3. Es ist also $x_gx_h \in G$. G enthält daher sämtliche Diagonalen von V. Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung.

II) Es sei jetzt $V = (x_1x_2 \ldots x_l)$ ein ungerades Vieleck von G und nehmen wir an, daß G eine Diagonale von V enthält. Z. B. sei $x_1x_j \in G$ $(1 < j < l)$. Wir zeigen, daß dann G sämtliche Diagonalen von V enthält. Da V ungerade ist, muß das eine der zu G gehörigen Vielecke $V_1 = (x_1x_2 \ldots x_jx_1)$ und $V_2 =$

$= (x_1 x_j x_{j+1} \ldots x_l x_1)$ gerade sein. Es sei z. B. V_1 gerade. Dann enthält nach I) G sämtliche Diagonalen von V_1. Daher gehört das gerade Vieleck $V_3 = (x_1 x_{j-1} x_j x_{j+1} \ldots x_l x_1)$ zu G, und so enthält G auch sämtliche Diagonalen von V_3. Für eine solche Diagonale von V, die weder Diagonale von V_1, noch von V_3 ist, kann man in der gleichen Weise wie in I) *b*) beweisen, daß sie zu G gehört. G enthält also tatsächlich alle Diagonalen von V.

III) Es sei jetzt G_1 ein mehrkantiges Glied von G und $V = (x_1 \ldots x_l)$ ein größtes Vieleck von G_1.

a) Nehmen wir erst an, daß G_1 sämtliche Diagonalen von V enthält. Wir beweisen dann, daß jeder Punkt von G_1 zu V gehört, woraus $G_1 = \langle l \rangle$ folgt ($\langle l \rangle$ = vollständiger l-Graph). Es sei nämlich x ein solcher Punkt von G, der nicht zu V gehört. G_1 enthält ein solches Vieleck V_1, das den Punkt x und eine Kante aus V enthält. Es sei $V_1 = (x x'_1 x'_2 \ldots x'_m x)$ und g der kleinste, h der größte Wert jener Indizes $i\,(1 \leqq i \leqq m)$ für die $x'_i \in V$ besteht. Dann ist $1 \leqq g < h \leqq m$ und von dem Bogen $W' = (x'_g \ldots x'_1 x\, x'_m \ldots x'_h)$ liegen nur x'_g und x'_h auf V. Wir dürfen annehmen, daß $x'_g = x_1$ und $x'_h = x_j$ $(1 < j \leqq l)$ besteht. Nach unseren Annahmen gehört der Weg $W = (x_1 \ldots x_{j-1} x_l \ldots x_j)$ zu G_1, und dann gehört auch das Vieleck $W \cup W'$ zu G_1. $W \cup W'$ ist jedoch größer als V. Dieser Widerspruch beweist unsere Behaptung.

b) Nehmen wir jetzt an, daß G_1 und damit auch G nicht alle Diagonalen von V enthält. Nach I) und II) ist dann V ungerade und G_1 enthält keine der Diagonalen von V. Wir beweisen daß in diesem Fall $G_1 = V$ ist. Es genügt dazu zu zeigen, daß jeder Punkt von G_1 zu V gehört. Es sei $x \in G_1$ und $x \notin V$. Ferner sollen x'_g, x'_h, W', x_j dieselbe Bedeutung haben, wie in *a*). Es gilt $j \neq 2$ und $j \neq l$. Sonst wäre das zu G_1 gehörge Vieleck $W' \cup (x_2 \ldots x_l x_1)$ bzw. $W' \cup (x_1 \ldots x_l)$ größer als V. $x_1 x_j$ ist also eine Diagonale von V und es besteht daher $x_1 x_j \notin G_1$. Bezeichnen ferner W_1 und W_2 die durch x_1 und x_j bestimmten Bogen von V, so bildet (da V ungerade ist) W' entweder mit W_1 oder mit W_2 ein gerades Vieleck von G_1. $x_1 x_j$ ist Diagonale dieses Vielecks, und daher gehört nach I) $x_1 x_j$ zu G, und damit auch zu G_1. Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung. Damit haben wir den Beweis von Satz (1.9) beendet.

(1.10) Der Satz (E.1) der Einleitung ist nun eine unmittelbare Folge von (1.8) und (1.9). Man kann sogar mit Hilfe unseres Beweisverfahren zu einem schärferen Satz gelangen. Man kann nämlich bei jedem beliebigen (nicht unbedingt kritischen) Graphen von Neben- und Hauptpunkten sprechen: Der Punkt x des Graphen G heißt ein *kritischer Punkt* von G, wenn $\varkappa(G—x) < \varkappa(G)$ gilt. Ist $\varkappa(G) = k$ und x ein kritischer Punkt von G, so gilt $\varrho(x) \geqq k—1$. Der kritische Punkt x des k-chromatischen Graphen G heißt ein Nebenpunkt oder ein Hauptpunkt je nach dem ob $\varrho(x) = k—1$ oder $\varrho(x) > k—1$ besteht. Offensichtlich gibt es zu jedem kritischen Punkt x von G eine zu x gehörige Färbung von G (s. (1.2)) und man sieht, daß die Behauptungen (1.3), (1.4), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), und demzufolge auch der Satz (E.1), auch dann richtig bleiben, wenn man in diesen statt k-kritische Graphen beliebige k-chromatische Graphen nimmt.

2. Der Beweis des Satzes (E.2)
Verfahren, die aus kritischen Graphen kritische Graphen ergeben

Wir wollen uns zuerst mit der Herstellung k-kritischen Graphen ohne Nebenpunkte beschäftigen. Haben wir einen 4-kritischen Graphen ohne

Nebenpunkte, so kann man auf Grund des folgenden einfachen Satzes[9] für jedes beliebige $k > 4$ leicht einen k-kritischen Graphen ohne Nebenpunkte angeben.

(2.1) *Ist G_1 k_1-kritisch, G_2 k_2-kritisch und $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, so ist derjenige Graph, der aus $G_1 \cup G_2$ dadurch entsteht, daß man sämtliche Punkte von G_1, mit sämtlichen Punkten von G_2 verbindet, $(k_1 + k_2)$-kritisch.*

Wählt man nämlich für G_1 den oben erwähnten 4-kritischen Graphen (dieser muß mehr als 4 Punkte enthalten), für G_2 einen $\langle k - 4\rangle$ (d. h. einen vollständigen $(k - 4)$-Graphen), so ergibt die Konstruktion von (2.1) einen k-kritischen Graphen mit lauter Hauptpunkten.

Wegen späteren Anwendungen soll hier auch derjenige 4-kritische Graph erwähnt werden, der durch das Verfahren (2.1) aus einem ungeraden Kreis (3-kritischer Graph) und aus einem einpunktigen Graph zustande kommt (s. [6]). Wir wollen diesen ein *ungerades Rad* nennen.

(2.2) Gleichfalls wegen späteren Anwendungen formulieren wir hier auch zwei triviale Umkehrungen von (2.1) und führen eine neue Benennung ein.

Ist G ein kritischer Graph, und besitzt $\mathcal{P}(G)$ eine solche Zerlegung in zwei nichtleere Teilmengen A_1 und A_2, daß A_1 und A_2 in G vollständig verbunden sind, so sind $[A_1]$ und $[A_2]$ kritische Graphen und es gilt $\varkappa([A_1]) + \varkappa([A_2]) = \varkappa(G)$.

Ist G ein kritischer Graph und gibt es eine solche Zerlegung von $\mathcal{P}(G)$ in zwei nichtleere Teilmengen A_1 und A_2, daß $[A_1]$ und $[A_2]$ beide kritisch sind und $\varkappa([A_1]) + \varkappa([A_2]) = \varkappa(G)$ besteht, so sind A_1 und A_2 in G vollständig verbunden.

Es sei bemerkt, daß die beiden Umkehrungen zusammen mit (2.1) ihre Gültigkeit auch dann erhalten, wenn man in diesen überall statt kritischen Graphen punktkritische Graphen nimmt.

Wir nennen einen kritischen (punktkritischen) Graphen G *zerlegbar*, wenn eine solche Zerlegung von $\mathcal{P}(G)$ in zwei nichtleere Teilmengen A_1 und A_2 existiert, daß A_1 und A_2 in G vollständig verbunden sind.

(2.3) Wir wollen jetzt solche 4-kritischen Graphen angeben, in denen jeder Punkt den Grad 4 hat. Es seien p und q ($p \geq 4$, $q \geq 3$) natürlich Zahlen und q sei ungerade: $q = 2q' + 1$. Betrachte man die Gitterpunkte

$$a_{ij} = (i, j) \qquad (i = 0, 1, \ldots, p; j = 0, 1, \ldots, q)$$

der Ebene und die Strecken

$$a_{ij}a_{i'j'} \text{ mit } |i' - i| + |j' - j| = 1$$
$$(i, i' = 0, 1, \ldots, p;\ j, j' = 0, 1, \ldots, q)\,.$$

Diese Strecken zerlegen das Rechteck $Q = a_{00}a_{p0}a_{pq}a_{0q}$ in die Quadrate $Q_{ij} = a_{ij}a_{i+1,j}a_{i+1,j+1}a_{i,j+1}(i = 0, 1, \ldots, p-1;\ j = 0, 1, \ldots, q-1)$. Durch die Identifizierung der gegenüberliegenden Seiten stelle man aus Q einen Klein'schen Schlauch S her. Die Identifizierung soll in solcher Weise durchgeführt werden, daß a_{i0} mit a_{iq} $(i = 0, 1, \ldots, p)$ und a_{0j} mit $a_{p,q-j}$ $(j = 0, 1, \ldots, q)$ zusammenfalle.

[9] Wir haben die Behauptung (2.1) von G. A. DIRAC kennengelernt. Die triviale Verifizierung von dieser wollen wir übergehen.

Es sei nun G derjenige Graph, dessen Knotenpunkte bzw. Kanten die in S vorkommenden Punkte a_{ij} bzw. „Strecken" $a_{ij}a_{i'j'}$ $(|i'-i|+|j'-j|=1)$ sind. Dann enthält G genau pq Knotenpunkte und *jeder Knotenpunkt hat den Grad* 4.

Wir beweisen zuerst, daß $\varkappa(G) \geqq 4$ ist. Nehmen wir das Gegenteil an, und es sei f eine 3-Färbung von G. Die in f vorkommenden Farben sollen mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bezeichnet werden. Betrachte man den eindimensionalen simplizialen Komplex

$$F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_2\alpha_3\}$$

sowie jenen eindimensionalen simplizialen Komplex K, der aus den Knotenpunkten a_{ij} und aus den „gerichteten" Kanten $a_{ij}a_{i'j'} = -a_{i'j'}a_{ij}$ von G besteht. Bilde man nachher die eindimensionalen Ketten

$$R_{ij} = a_{ij}a_{i+1,j} + a_{i+1,j}a_{i+1,j+1} + a_{i+1,j+1}a_{i,j+1} + a_{i,j+1}a_{ij}$$

$(R_{ij}$ is der „Rand" von $Q_{ij})$ sowie die Kette

$$R = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} R_{ij}.$$

Offensichtlich gilt dann

$$R = -2\sum_{j=0}^{q-1} a_{0j}a_{0,j+1}. \tag{1}$$

Wir wollen nun die Färbung f als eine simpliziale Abbildung von K in F auffassen. Es soll dann $\hat{f}$ die durch f induzierte Abbildung der Ketten von K in den Ketten von F bezeichnen. Da man in jeder 3-Färbung eines Vierecks zwei solche nicht benachbarte Knotenpunkte finden kann, die die gleiche Farbe besitzen, gilt für jedes R_{ij} $(i = 0, 1, \ldots p-1;\ j = 0, 1, \ldots, q-1)$ $\hat{f}(R_{ij}) = 0$. In der Tat, ist z. B. $\hat{f}(a_{ij}) = \hat{f}(a_{i+1,j+1}) = \alpha_g$ $(1 \leqq g \leqq 3)$, so ist mit $\hat{f}(a_{i+1,j}) = \alpha_h$ und $\hat{f}(a_{i,j+1}) = \alpha_{h'}$ $(1 \leqq h \leqq 3,\ 1 \leqq h' \leqq 3)$

$$\hat{f}(R_{ij}) = \alpha_g\alpha_h + \alpha_h\alpha_g + \alpha_g\alpha_{h'} + \alpha_{h'}\alpha_g = 0.$$

Daraus folgt

$$\hat{f}(R) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \hat{f}(R_{ij}) = 0.$$

Anderseits ist nach (1), wenn wir $\hat{f}(a_{0j}) = \alpha_{i_j}$ $(1 \leqq i_j \leqq 3)$ setzen

$$\hat{f}(R) = -2\sum_{j=0}^{q-1} \alpha_{i_j}\alpha_{i_{j+1}}. \tag{2}$$

Die auf der rechten Seite von (2) stehende Kette kann jedoch nicht gleich 0 sein, da wegen der Zulässigkeit von f $\alpha_{i_j} \neq \alpha_{i_{j+1}}$ und daher $\alpha_{i_j}\alpha_{i_{j+1}} \neq 0$ $(j = 0, 1, \ldots, q-1)$ gilt und q eine ungerade Zahl ist. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung $\varkappa(G) \geqq 4$.

Um zu beweisen, daß G 4-kritisch ist zeigen wir, daß die Weglassung einer jeden Kante von G einen 3-färbbaren Graphen ergibt (s. (2.6)). Wegen Symmetriegründen genügt es nur die Weglassung folgender Kanten zu untersuchen:

$$\begin{aligned} &1)\ a_{1i}a_{2i} \quad (i = 0, 1, \ldots, q'), \\ &2)\ a_{2j}a_{2,j+1}(j = 0, 1, \ldots, q'). \end{aligned} \qquad (q = 2q' + 1)$$

Wir wollen hier nur jenen Fall behandeln, wo p gerade ist: $p = 2p'$. (Im Falle wo p ungerade ist, kann man ähnlich schließen.)

Bezeichne G' jenen Graphen, der aus G durch die Weglassung einer der erwähnten Kanten zustandekommt. Die 3-Färbbarkeit von G' werden wir folgendermaßen beweisen: Wir geben eine solche Menge A von Knotenpunkten aus G' an, daß je zwei Knotenpunkte von A in G' nicht verbunden sind, und von der man (durch eine Skizze) einfach einsehen kann, daß der Graph $G'—A$ 2-färbbar ist. (Um die Schreibweise zu vereinfachen geben wir die Punkte a_{ij} in der Form (i, j) an.)

1) Die weggelassene Kante ist $a_{1i}a_{2i}$ $(0 \leq i \leq q')$.

Ist $i = 2i'$, so besteht A aus den Punkten:

$$\begin{aligned} &(2, 2\alpha - 1), \quad (1, 2\alpha) \qquad (\alpha = i' + 1, \ldots, q'), \\ &(2\beta - 1, 2q'), \ (2\beta, 2q' + 1) \ (\beta = 2, \ldots, p') \end{aligned}$$

und im Falle $i' > 0$ außer diesen noch aus den Punkten

$$(2, 2\gamma), \qquad (1, 2\gamma + 1) \qquad (\gamma = 0, \ldots, i' - 1)\,.$$

Ist $i = 2i'—1$, so besteht A aus den Punkten

$$\begin{aligned} &(1, 2\alpha), \qquad (2, 2\alpha + 1) \quad (\alpha = i', \ldots, q'), \\ &(2\beta - 1, 2q'), \ (2\beta, 2q' + 1) \ (\beta = 2, \ldots, p') \end{aligned}$$

und im Falle $i' > 1$ außer diesen noch aus den Punkten

$$(1, 2\gamma - 1), \quad (2, 2\gamma) \qquad (\gamma = 1, \ldots, i' - 1)\,.$$

2) Die weggelassene Kante ist $a_{2j}a_{2,j+1}$ $(0 \leq j \leq q')$.

Ist $j = 2j'$, so besteht A aus den Punkten

$$\begin{aligned} &(2, 2j' + 1) \\ &(1, 2\alpha), \qquad (2, 2\alpha + 1) \quad (\alpha = j' + 1, \ldots, q'), \\ &(2\beta - 1, 2q'), \ (2\beta, 2q' + 1) \ (\beta = 2, \ldots, p') \end{aligned}$$

und im Falle $j' > 0$ außer diesen noch aus den Punkten

$$(1, 2\gamma - 1), \quad (2, 2\gamma) \qquad (\gamma = 1, \ldots, j')\,.$$

Ist $j = 2j' - 1$, so besteht A aus den Punkten

$$\begin{aligned} &(0, 0), (1, 1) \\ &(3, 2\alpha), \qquad (2, 2\alpha + 1) \quad (\alpha = j', \ldots, q'), \\ &(2\beta, 2q' + 1), \ (2\beta + 1, 2q') \ (\beta = 1, \ldots, p' - 1) \end{aligned}$$

und im Falle $j' > 1$ außer diesen noch aus den Punkten

$$(2, 2\gamma), \qquad (1, 2\gamma + 1) \quad (\gamma = 1, \ldots, j' - 1).$$

Damit haben wir im Falle $p = 2p'$ bewiesen, daß G ein 4-kritischer Graph ist.

(2.4) Wir wollen im Falle $p = 2q'$ noch eine interessante Eigenschaft des oben definierten Graphen G zeigen. Wir beweisen nämlich, daß die kleinsten ungeraden Kreise von G die Länge $2q' + 1$ besitzen. Betrachte man die Punktmenge

$$B = \{(0, q'), (1, q'), \ldots, (2q' - 1, q'), (2q', q')\}.$$

Man kann dann den Graphen $G—B$ mit zwei Farben zulässig färben, woraus folgt, daß jeder ungerade Kreis von G einen B-Punkt enthalten muß. Es ist ferner $[B]$ ein Kreis mit der Länge $2q' + 1$. Man setze

$$C = \{(0, 0), (1, 0), \ldots, (2q' - 1, 0)\}$$

und

$$D_i = \{(i, 0), (i, 1), \ldots, (i, 2q')\} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2q' - 1).$$

Es sei nun V ein beliebiger ungerader kreis von G. Enthält V Punkte aus C so muß $\nu(V) \geqq 2q' + 1$ sein, da der „Abstand" zwischen einem C- und einem B-Punkt mindestens q' ist. Enthält anderseits V für jedes i ($i = 0, 1, \ldots, 2q'—1$) einen D_i-Punkt, so ist offensichtlich $\nu(V) \geqq 2q' + 1$. Nehmen wir nun an, daß V keinen C-Punkt enthält und daß ein i_0 ($0 \leqq i_0 \leqq 2q'—1$) gibt für das V keinen D_{i_0}-Punkt enthält. Wir dürfen $i_0 = 0$ annehmen. Dies führt jedoch zum Widerspruch, da man den Graphen $G—(C \cup D_0)$ offensichtlich mit zwei Farben zulässig färben kann. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Für den betrachteten Graphen G ist

$$\pi(G) = 2q'(2q' + 1) < (2q' + 1)^2,$$

und so haben wir für unendlich viele n solche n-punktigen 4-kritischen Graphen konstruiert, in denen die Längen der ungeraden Kreise größer als $\sqrt{n}$ sind.

(2.5) Die kleinsten Werte von p und q, mit welchen die Konstruktion von (2.3) einen 4-kritischen Graphen ergibt, sind $p = 4$ und $q = 3$. Wegen späteren Anwendungen wollen wir den zu diesen Werte gehörigen Graphen einen *$\Gamma_{(4)}$-Graphen* nennen. Ferner wollen wir einen solchen k-kritischen ($k > 4$) Graphen, der aus einem $\Gamma_{(4)}$-Graphen und aus einem $\langle k—4\rangle$ durch das Verfahren (2.1) entsteht, einen *$\Gamma_{(k)}$-Graphen* nennen.

(2.6) Wir wollen einige bekannte einfache Tatsachen über kritische Graphen erwähnen.

Jeder kritische Graph ist zusammenhängend und enthält keinen trennenden Punkt (s. [2]).

Ist G k-kritisch und $xy \in G$, so gilt $\varkappa(G—xy) = k—1$ und für jede $(k—1)$-Färbung f von $G—xy$ besteht $f(x) = f(y)$.

Wollen wir beweisen, daß ein Graph G, der keine isolierten Punkte enthält (also z. B. ein zusammenhängender Graph) kritisch ist, so genügt es zu zeigen, daß er *kantenkritisch* ist, d. h. daß für jedes $xy \in G$ $\varkappa(G—xy) < \varkappa(G)$ besteht.

Wir führen zwei neue Begriffe, nämlich diejenigen der Vereinigung und Zerspaltung von Punkten, ein.

Es sei G ein Graph, $x_1, x_2 \in G$, $x_1x_2 \notin G$ und bezeichne A_i die Menge der Nachbarpunkte von x_i in G $(i = 1, 2)$.

Nimmt man dann zu dem Graphen $G—\{x_1, x_2\}$ einen neuen Punkt x hinzu, und verbindet man x mit sämtlichen Punkten von $A_1 \cup A_2$, so entsteht ein neuer Graph, von dem wir sagen wollen, daß er aus G durch die *Vereinigung der Punkte* x_1 und x_2 zustande gekommen ist. Der Punkt x heißt die *Vereinigung der Punkte* x_1 *und* x_2.

Umgekehrt, sei G ein Graph, $y \in G$, $\varrho(y) \geqq 2$ und bezeichne B die Menge der Nachbarpunkte von y in G. Zerlegt man in irgendeiner Weise B in die zwei nichtleeren Teilmengen B_1 und B_2, nimmt man zu dem Graphen $G—y$ zwei neue Punkte y_1 und y_2 hinzu und verbindet man y_i mit jedem Punkt von B_i $(i = 1, 2)$, so entsteht ein neuer Graph, von dem wir sagen wollen, daß er aus G durch die *Zerspaltung des Punktes* y *in die Punkte* y_1 *und* y_2 zustande gekommen ist.

Es gilt nun der folgende Satz von DIRAC (s. [4] und das Theorem 1 der Arbeit „On the structure of 5- and 6-chromatic abstract graphs" (erscheint in *Journal f. reine u. angew. Math.*)):

(2.7) (DIRAC) *a) Es sei G ein k-kritischer ($k \geqq 3$) Graph und $\{a, b\}$ ein trennendes Punktpaar von G. Dann ist $ab \notin G$ und $G—\{a, b\}$ besteht aus genau zwei Komponenten. Bezeichne man diese Komponenten mit $[C_1]$ und $[C_2]$ $(C_i \cup \mathscr{P}(G), i = 1, 2)$ und setze $G_i = [C_i \cup \{a, b\}]$ $(i = 1, 2)$. Dann sind G_1 und G_2 beide $(k—1)$-färbbar und man bekommt aus dem einen (und nur aus einem) dieser Graphen durch die Hinzunahme der Kante ab, aus dem anderen (und nur aus diesem) durch die Vereinigung der Punkte a und b einen k-kritischen Graphen.*

b) Es seien G' und G'' zwei fremde k-kritische ($k \geqq 3$) Graphen, $ab \in G'$, $G_1 = G'—ab$, $c \in G''$ und G_2 derjenige Graph, der aus G'' durch die Zerspaltung des Punktes c in die Punkte c_1 und c_2 zustande kommt $(c_1, c_2 \notin G')$. Ist dann G_2 $(k—1)$-färbbar, so wird jener Graph G, der aus $G_1 \cup G_2$ dadurch entsteht, daß man die Punkte a und c_1 vereinigt und b mit c_2 verbindet, k-kritisch.

Bemerkungen. 1) Bisher ist kein vollständiger Beweis von (2.7) erschienen. Wir haben deshalb für nötig gehalten einen solchen Beweis mitzuteilen (bezüglich des ersten Absatzes des Beweises s. [4]).

2) Wegen $k \geqq 3$ ist $\varrho_{G''}(c) \geqq 2$. Die Zerspaltung von c kann also tatsächlich durchgeführt werden.

3) Der Teil *a*) des Satzes bleibt auch dann richtig, wenn man statt kritische Graphen punktkritische Graphen nimmt. Für den Teil *b*) gilt jedoch die gleiche Aussage nur dann, wenn man auch die $(k—1)$-Färbbarkeit von G_1 voraussetzt.

Beweis. *a*) Bezeichnen wir mit $[C_i]$ $(i = 1, \ldots, l; l \geqq 2)$ die Komponenten von $G—\{a, b\}$ und es sei $G_i = [C_i \cup \{a, b\}]$ $(i = 1, \ldots, l)$. Da G kritisch ist, sind die Graphen G_i $(i = 1, \ldots, l)$ $(k—1)$-färbbar. Betrachte man eine $(k—1)$-Färbung $(k—1 \geqq 2)$ eines Graphen G_i $(1 \leqq i \leqq l)$. Enthalten in dieser die Punkte a und b verschiedene (gleiche) Farben, so gibt es ein $j \neq i$ $(1 \leqq j \leqq l)$ mit der Eigenschaft, daß in *jeder* $(k — 1)$-Färbung von G_j a und b gleiche (verschiedene) Farben bekommen; sonst wäre nämlich G $(k — 1)$-färbbar. Daraus ausgehend ergeben sich nacheinander die folgenden Behauptungen:

Es existieren unter den Graphen G_i $(i = 1, \ldots, l)$ zwei solche, sagen wir G_1 und G_2, daß in jeder $(k-1)$-Färbung von G_1(bzw. G_2) a und b die gleiche (bzw. verschiedene) Farben erhalten; es gilt $l = 2$ und $ab \notin G$; G_1 und G_2 sind zusammenhängend; $G' = G_1 \cup (ab)$ und derjenige Graph G'', der aus G_2 durch die Vereinigung der Punkte a und b entsteht, sind k-chromatisch. (Die Rollen von G_1 und G_2 können nicht vertauscht werden!)

Da G_1 und G_2 zusammenhängend sind, gilt das gleiche auch für G' und G''. Um zu beweisen, daß G' und G'' kritisch sind, genügt es daher zu zeigen, daß sie kantenkritisch sind.

$G' - ab$ ist $(k-1)$-färbbar. Es sei nun $xy \in G'$, $xy \neq ab$. Dann ist $xy \in G_1 \subset G$. Da G kritisch ist, gibt es eine $(k-1)$-Färbung f von $G - xy$. Dann muß wegen G_2 $f(a) \neq f(b)$ bestehen, und so ergibt f auch eine $(k-1)$-Färbung von $G' - xy$. Es ist also G' tatsächlich kritisch.

Bezeichne c in G'' die Vereinigung von a und b und es sei $xy \in G''$. Wir können $y \neq c$ annehmen. Wir definieren den Punkt $\tilde{x}$ folgendermaßen: Ist $x \neq c$, so sei $\tilde{x} = x$. Ist $x = c$, so ist in G_2 mindestens das eine von a und b, sagen wir a, mit y verbunden. Es sei dann $\tilde{x} = a$. In beiden Fällen gilt $\tilde{x}y \in G_2 \subset$ $\subset G$. Da G kritisch ist, gibt es eine $(k-1)$-Färbung f von $G - \tilde{x}y$. Wegen G_1 muß $f(a) = f(b)$ bestehen. Daher ergibt f auch für $G'' - xy$ eine $(k-1)$-Färbung. Es ist also auch G'' kritisch.

b) Es gibt in G' und G'' keinen trennenden Punkt. Daher sind G_1, G_2 und G zusammenhängend. Da G' k-kritisch ist, ist G_1 $(k-1)$-färbbar, und in jeder $(k-1)$-Färbung von G_1 enthalten a und b die gleiche Farbe. G_2 ist zufolge unseren Voraussätzungen $(k-1)$-färbbar, und da G'' k-chromatisch ist, erhalten a und b in jeder $(k-1)$-Färbung von G_2 verschiedene Farben. Daraus folgt, daß G nicht $(k-1)$-färbbar sein kann. Um zu beweisen, daß G k-kritisch ist, genügt es noch zu zeigen, daß die Weglassung einer jeden Kante von G einen $(k-1)$-färbbaren Graphen ergibt.

Ist $xy \in G$, so gilt entweder $xy \in G_1$ oder $xy \in G_2$. Es sei erst $xy \in G_1$. Da G' kritisch ist, gibt es eine $(k-1)$-Färbung f_1 von $G' - xy$. Es sei ferner f_2 eine $(k-1)$-Färbung von G_2. Dann besteht $f_1(a) \neq f_1(b)$ und $f_2(c_1) \neq f_2(c_2)$. Wir können annehmen, daß in f_1 und f_2 dieselben Farben vorkommen, und daß $f_1(a) = f_2(c_1)$ und $f_1(b) = f_2(c_2)$ besteht. Dann geben jedoch f_1 und f_2 zusammen eine $(k-1)$-Färbung von $G - xy$.

Es sei jetzt $xy \in G_2$. Man kann annehmen, daß $y \neq c_1$, $y \neq c_2$ gilt. Wir definieren den Punkt $\tilde{x}$ folgendermaßen: Ist x von c_1 und c_2 verschieden, so sei $\tilde{x} = x$. Fällt x mit einem der Punkte c_1 und c_2 zusammen, so sei $\tilde{x} = c$. In beiden Fällen gilt $\tilde{x}c \in G''$. Da G'' kritisch ist, gibt es eine $(k-1)$-Färbung f'' von $G'' - \tilde{x}y$. Diese ergibt eine solche $(k-1)$-Färbung von $G_2 - xy$, in der $f_2(c_1) = f_2(c_2)$ gilt. Betrachte man noch eine $(k-1)$-Färbung f_1 von G_1. Es besteht $f_1(a) = f_1(b)$. Wir dürfen annehmen, daß in f_1 und f_2 die gleichen Farben vorkommen, und daß $f_1(a) = f_2(c_1)$ ist. Dann ergeben jedoch f_1 und f_2 zusammen eine $(k-1)$-Färbung von $G - xy$. Damit haben wir den Beweis des Satzes (2.7) beendet.

(2.8) Der Teil *b)* von (2.7) gibt die Möglichkeit, aus k-kritischen Graphen k-kritische Graphen zu konstruieren. Das Verfahren kann man auch in der folgenden Weise formulieren:

Es seien G' und G'' fremde k-kritische $(k \geqq 3)$ Graphen. Wähle man in G' eine Kante ab, in G'' einen Punkt c, und zerlege man die Menge der Nachbarpunkte von c (es ist $\varrho_{G''}(c) \geqq 2$) in zwei nichtleere Mengen A und B. Lasse man ferner aus G' die Kante ab, aus G'' sämtliche cB-Kanten weg, identifiziere man die Punkte a und c und verbinde b mit sämtlichen B-Punkten. Der so entstehende Graph G ist k-kritisch, vorausgesetzt, daß derjenige Teilgraph G_2 von G, der durch die Punkte von $G'' - c$ und a und b gespannt ist, $(k-1)$-färbbar ist.

Besondere Bedeutung hat der Fall, in dem $\mathcal{N}(B) \leq k-2$ besteht. Dann ist nämlich G_2 ohne jeder Voraussetzung stets $(k-1)$-färbbar.

(Da $G_2 - b \subset G''$ ist, existiert eine $(k-1)$-Färbung f von $G_2 - b$. Falls $\mathcal{N}(B) \leq k-2$ besteht, enthält $f(B)$ höchstens $k-2$ Farben, und so kann man f stets zu einer $(k-1)$-Färbung von G_2 erweitern.)

Im Falle $\mathcal{N}(B) = 1$ (wegen $k \geq 3$ ist dann immer $\mathcal{N}(B) \leq k-2$) wird die Konstruktion bezüglich G' und G'' symmetrisch. Wegen ihrer Wichtigkeit wollen wir in diesem Falle die Konstruktion mit geänderten, der Symmetrie entsprechenden Bezeichungen nocheinmal darstellen:

(2.9) *Es seien G' und G'' fremde k-kritische* ($k \geq 3$) *Graphen. Läßt man aus G' die (beliebige) Kante $a'b'$, aus G'' die (beliebige) Kante $a''b''$ weg, identizifiert man a' und a'' und verbindet b' mit b'', so entsteht ein k-kritischer Graph G.*

Die in (2.9) beschriebene Konstruktion wurde erst von HAJÓS zur Herstellung sämtlicher nicht $(k-1)$-färbbaren Graphen verwendet (s. [9], [14]).[10] Wegen späterer Anwendungen soll hier noch die folgende Eigenschaft der Konstruktion hervorgehoben werden:

Der Grad eines jeden Punktes, mit Ausnahme desjenigen, der durch die Identifizierung von a' und a'' entsteht, (dieser Punkt soll mit a bezeichnet werden) *bleibt unverändert. Ist $k \geq 4$, so ist $\varrho(a) \geq 2(k-2) \geq k$.*

HAJÓS hat auch ein allgemeineres Verfahren zur Konstruktion nicht $(k-1)$-färbbarer Graphen ersonnen. (Mündliche Mitteilung.) Dies enthält als Spezielfall auch das aus Satz (2.7) sich ergebende Verfahren. Es lautet folgendermaßen:

(2.10) *Es seien G_1 und G_2 fremde, nicht $(k-1)$-färbbare* ($k \geq 3$) *Graphen. Man wähle in $G_i (i = 1, 2)$ einen Punkt a_i, zerlege die Menge der Nachbarpunkte von a_i in G_i in zwei nichtleere Mengen B_i und B'_i, und lasse sämtliche a_iB_i-Kanten von G_i weg. Ferner identifiziere man die Punkte a_1 und a_2 und verbinde sämtliche B_1-Punkte mit sämtlichen B_2-Punkten. Dann ist der zustande gekommene Graph nicht $(k-1)$-färbbar.*

Man kann dieses Verfahren auch zur Herstellung kritischer Graphen benützen. Es gilt nämlich die folgende Behauptung:

(2.11) *Sind G_1 und G_2 k-kritische Graphen* ($k \geq 3$), *dann ist auch der nach dem obenstehenden Verfahren konstruierte Graph k-kritisch, vorausgesetzt, daß $\mathcal{N}(B_1) + \mathcal{N}(B_2) \leq k-1$ besteht.*

Statt (2.11) beweisen wir folgenden allgemeineren Satz:

---

[10] Das HAJÓS'sche Verfahren war zur Konstruktion spezielle kritische Graphen schon von DIRAC benutzt worden (s. [5], [8]).

(2.12) **Satz.** *Es sei* $k \geqq 3$, $p \geqq 1$, $p' \geqq 0$ *und es seien* G_i $(i = 1, \ldots, p+1)$ *paarweise fremde k-kritische Graphen. Man zerlege die Menge der Punkte von* G_i $(i = 1, \ldots, p+1)$ *so in die (paarweisen fremden) Mengen* $\tilde{A}_i = \{a_{i1}, \ldots, a_{i,p+p'}\}$, B_i, C_i, *daß* $\mathscr{N}(B_i) > 0$ *und*

$$\text{(1)} \qquad \sum_{i=1}^{p+1} \mathscr{N}(B_i) \leqq k - (p+p')$$

bestehen, $[\tilde{A}_i]_{G_i}$ *vollständig ist und* $\tilde{A}_i$ *mit* B_i *in* G_i *vollständig verbunden ist. Setze man* $A_i = \{a_{i1}, \ldots, a_{ip}\}$, $A_i' = \tilde{A}_i - A_i$, *lasse sämtliche* A_iB_i*-Kanten aus* G_i *weg* $(i = 1, \ldots, p+1)$ *und nachher identifiziere die Punkte* $a_{1j}, \ldots, a_{p+1,j}$ *miteinander* $(j = 1, \ldots, p+p')$. *Ferner verbinde man jeden* B_i*-Punkt mit jedem* B_j*-Punkt* $(i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, p+1)$. *Dann ist der entstehende Graph* G *k-kritisch.*

Bemerkungen. 1) Aus den Voraussetzungen folgt, daß für jedes $i\,(i = 1, \ldots, p+1)$ $\mathscr{N}(B_i \cup \tilde{A}_i) \leqq k-1$ besteht. Es kann daher C_i nicht leer sein $(i = 1, \ldots, p+1)$.

2) Die Behauptung von (2.12) bleibt auch dann richtig, wenn man zuläßt, daß gewisse $A_i'B_i$-Kanten in G_i nicht vorhanden sind $(i = 1, \ldots, p+1)$. Wir wollen jedoch die diesbezügliche Verschärfung von (2.12) hier nicht genau formulieren.

Beweis. Bezeichne a_j $(j = 1, \ldots, p+p')$ jenen Punkt, der durch die Identifizierung der Punkte $a_{1j}, \ldots, a_{p+1,j}$ entsteht und es sei.

$$\tilde{A} = \{a_1, \ldots, a_{p+p'}\}, \quad A = \{a_1, \ldots, a_p\}, \quad A' = \tilde{A} - A.$$

I) Zuerst beweisen wir, daß G nicht $(k-1)$-färbbar ist. Nehmen wir den Gegenteil an, und bezeichne f eine $(k-1)$-Färbung von G. Da $f(B_i) \cap f(B_j) = \varnothing$ $(i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, p+1)$ besteht, gibt es ein h $(1 \leqq h \leqq p+1)$ mit $f(B_h) \cap f(A) = \varnothing$. Dann bilden jedoch jene Farben, die durch f zu den Punkten von G_h zugeordnet sind, eine $(k-1)$-Färbung von G_h. Dies widerspricht der Annahme, daß G_h k-kritisch ist.

II) Wir zeigen, daß für jedes $xy \in G$ der Graph $G - xy$ $(k-1)$-färbbar ist.

a) Es sei zuerst xy eine solche Kante von G, die zu einem G_i, z. B. zu G_{p+1} gehört, jedoch nicht in $[\tilde{A}]$ enthalten ist. Es bezeichne b_i einen beliebigen Punkt von B_i $(i = 1, \ldots, p)$. Den Punkt b_{p+1} definieren wir nur in jenem Falle, wenn xy eine $A'_{p+1}B_{p+1}$-Kante ist. b_{p+1} sei dann der zu B_{p+1} gehörige Endpunkt von xy. Wir dürfen in diesem Falle annehmen, daß $a_{p+1,p+1}$ der zu A'_{p+1} gehörige Endpunkt von xy ist. Nun bezeichne f_i eine $(k-1)$-Färbung von $G - a_{ii}b_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ und f_{p+1} eine $(k-1)$-Färbung von $G_{p+1} - xy$. Wir nehmen an, daß in den $f_i (i = 1, \ldots, p+1)$ dieselben $k-1$ Farben vorkommen. Es gelten dann folgende Behauptungen:

1) Sämtliche Punkte von $\tilde{A}_i$ enthalten in f_i verschiedene Farben $(i = 1, \ldots, p+p')$.

2) Es gilt $f_i(b_i) = f_i(a_{ii})$ und $f_i(B_i - \{b_i\}) \cap f_i(\tilde{A}_i) = \varnothing$ $(i = 1, \ldots, p)$.

3) Es ist $f_{p+1}(b_{p+1}) = f_{p+1}(a_{p+1,\,p+1})$ und $f_{p+1}(B_{p+1} - \{b_{p+1}\}) \cap f_{p+1}(\tilde{A}_{p+1}) = \varnothing$, falls xy eine $A'_{p+1}B_{p+1}$-Kante ist, und $f_{p+1}(B_{p+1}) \cap f_{p+1}(\tilde{A}_{p+1}) = \varnothing$, falls xy keine $A'_{p+1}B_{p+1}$-Kante ist.

Da man die Farben eine jeder Färbung f_i beliebig permutieren kann, dürfen wir

$$f_i(a_{ij}) = f_{p+1}(a_{p+1,j}) \qquad (i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, p + p') \tag{2}$$

annehmen. Nach (1) ist

$$\sum_{i=1}^{p} \mathcal{N}(B_i - \{b_i\}) + \mathcal{N}(B_{p+1}) \leq k - 1 - (p + p'),$$

und so kann man ebenfalls wegen der Permutierbarkeit der Farben annehmen, daß je zwei der Farbenmengen $f_i(B_i - \{b_i\})$ $(i = 1, \ldots, p)$ und $f_{p+1}(B_{p+1} - \{b_{p+1}\})$ bzw. $f_{p+1}(B_{p+1})$ einen leeren Durchschnitt besitzen. Wegen (2) ergeben die Färbungen f_i $(i = 1, \ldots, p + 1)$ zusammen eine Färbung f von $G - xy$, und nach unseren Annahmen und Behauptungen ist f eine $(k - 1)$-Färbung von G.

b) Es sei $xy \in [\tilde{A}]$. Dann besteht auch $xy \in [A_i]_{G_i}$ $(i = 1, \ldots, p + 1)$. Bezeichne f_i eine $(k - 1)$-Färbung von $G_i - xy$ $(i = 1, \ldots, p + 1)$. Es gilt $f_i(x) = f_i(y)$ $(i = 1, \ldots, p + 1)$. Wir dürfen annehmen, daß die Färbungen f_i $(i = 1, \ldots, p + 1)$ dieselben $k - 1$ Farben enthalten und daß $f_i(a_{ij}) = f_{p+1}(a_{p+1,j})$ $(i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, p + p')$ besteht. $f_{p+1}(\tilde{A}_{p+1})$ enthält genau $p + p' - 1$ Farben und es ist $f_i(B_i) \cap f_i(\tilde{A}_i) = \emptyset$ $(i = 1, \ldots, p + 1)$. In Bezug auf (1) kann man daher $f_i(B_i) \cap f_j(B_j) = \emptyset$ $(i \neq j;\ i, j = 1, \ldots, p + 1)$ annehmen. Dann ergeben die Färbungen f_i $(i = 1, \ldots, p + 1)$ zusammen eine $(k - 1)$-Färbung von G.

c) Endlich sei xy eine B_iB_j-Kante $(i \neq j)$. Wir dürfen $x \in B_1$, $y \in B_{p+1}$ annehmen. Es sei $b_1 = x$, $b_{p+1} = y$ und im Falle $p \geqq 2$ b_i ein beliebiger Punkt von B_i $(i = 2, \ldots, p)$. Bezeichne f_i eine $(k - 1)$-Färbung von $G_i - a_{ii}b_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ und f_{p+1} eine $(k - 1)$-Färbung von $G_{p+1} - a_{p+1,1}b_{p+1}$. Wir dürfen annehmen, daß die Färbungen f_i $(i = 1, \ldots, p + 1)$ dieselben $k - 1$ Farben enthalten und daß $f_i(a_{ij}) = f_{p+1}(a_{p+1\,j})$ $(i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, p + p')$ besteht. Es gelten dann folgende Behauptungen:

1) $f_{p+1}(\tilde{A}_{p+1})$ enthält $p + p'$ Farben.

2) $f_i(b_i) = f_i(a_{ii}) \qquad (i = 1, \ldots, p)$ und

$$f_{p+1}(b_{p+1}) = f_{p+1}(a_{p+1\,1}) = f_1(a_{11}) = f_1(b_1).$$

3) $f_i(B_i - \{b_i\}) \cap f_i(\tilde{A}_i) = \emptyset \qquad (i = 1, \ldots, p + 1)$.

Nach (1) besteht

$$\sum_{i=1}^{p+1} \mathcal{N}(B_i - \{b_i\}) < k - 1 - (p + p'),$$

und daher kann man annehmen, daß außer $i = 1$, $j = p + 1$ für jedes i, j $(i < j;\ i, j = 1, \ldots, p + 1)$ $f_i(B_i) \cap f_j(B_j) = \emptyset$ besteht und $f_1(B_1) \cap f_{p+1}(B_{p+1}) = \{f_1(b_1)\}$ gilt. Dann ergeben die Färbungen f_i $(i = 1, \ldots,$

$p+1$) zusammen eine $(k-1)$-Färbung von $G-xy$. Der Beweis von (2.12) ist damit beendet.

(2.13) Wir wollen jetzt für das Verfahren (2.10), (2.11) jenes Beispiel betrachten, wo G_1 und G_2 vollständige k-Graphen ($k \geqq 3$) sind. Es ist dann $\mathscr{P}(G_i) = \{a_i\} \cup B_i \cup B_i'$ ($i = 1, 2$; keine der Mengen B_i und B_i' ist leer). Die Menge der Punkte des entstehenden Graphen G^*

$$\text{(1)} \qquad \mathscr{P}(G^*) = B_1 \cup B_1' \cup \{a\} \cup B_2' \cup B_2 .$$

Hier bezeichnet a jenen Punkt, der durch die Identifizierung von a_1 und a_2 entsteht. Sämtliche Mengen B_1, B_1', B_2, B_2' spannen in G^* vollständige Graphen, und die auf der rechten Seite von (1) nebeneinander stehenden Mengen sowie B_1 und B_2 sind in G^* vollständig verbunden. G^* enthält keine weiteren Kanten. Der Graph G^* ist jetzt dann und *nur dann* kritisch, wenn

$$\text{(2)} \qquad \mathscr{N}(B_1) + \mathscr{N}(B_2) \leqq k-1$$

besteht. Es gilt ferner $\mathscr{N}(B_i) + \mathscr{N}(B_i') = k-1$ ($i = 1, 2$). Daraus folgt

$$\text{(3)} \qquad \mathscr{N}(B_i) \leqq k-2 \qquad (i = 1,2).$$

(2.14) Besteht die eine der Mengen B_1 und B_2 des vorangehenden Beispieles aus einem einzigen Punkt, so folgt (2) aus (3). Der Graph G^* besitzt dann interessante Eigenschaften, welche von DIRAC entdeckt wurden (s. [8] S. 174, und 187). Wir wollen diesen Graphen aus Symmetriegründen auch mit anderen Bezeichnungen nocheinmal darstellen. Es seien A, $\{c_1\}$, $\{c_2\}$, C_1, C_2 nichtleere fremde Punktmengen (mit der früheren Bezeichnung ist z. B. $A = B_1'$ $\{c_1\} = B_1$, $c_2 = a$, $C_1 = B_2$, $C_2 = B_2'$) und es bestehe

$$\mathscr{N}(A) = k-2, \quad \mathscr{N}(C_1) + \mathscr{N}(C_2) = k-1 \qquad (k \geqq 3).$$

Dann ist G^* folgendermaßen definiert:

$$\text{(1)} \qquad \mathscr{P}(G^*) = C_1 \cup \{c_1\} \cup A \cup \{c_2\} \cup C_2 .$$

Je zwei Punkte von A, C_1 bzw. C_2 sind in G^* verbunden ($[A]_{G^*}$, $[C_1]_{G^*}$, $[C_2]_{G^*}$ sind also vollständige Graphen). Die auf der rechten Seite von (1) nebeneinander stehenden Mengen, sowie C_1 und C_2 sind in G^* vollständig verbunden, und G^* hat keine weiteren Kanten.

Wir bemerken: Sämtliche Punkte von A, C_1 und C_2 sind Nebenpunkte von G^*.

Setzt man $\mathscr{N}(C_i) = j_i$ ($i = 1, 2$), so wollen wir wegen späteren Anwendungen die mit diesem G^* isomorphen Graphen $\Gamma^k_{j_1 j_2}$*-Graphen* nennen. Bei der Benützung des Zeichens $\Gamma^k_{j_1 j_2}$ wird stets $k \geqq 3$, $j_1 + j_2 = k-1$, $j_1 > 0$, $j_2 > 0$ vorausgesetzt.

Zum Beweis des Satzes (E.2) benötigen wir noch ein Verfahren, mit dem man die Nebenpunkte eines kritischen Graphen in geeigneter Weise vermehren kann. Der folgende Konstruktionsverfahren geht von einem vollständigen Teilgraphen des umzuformenden Graphen aus.

(2.15) *Es sei G ein k-kritischer Graph ($k \geqq 4$) und die Punktmenge $B \subseteq \mathscr{P}(G)$ spanne einen vollständigen q-Graphen ($1 \leqq q \leqq k-2$) in G. Ferner sei $a \in G$, $a \notin B$ und es sei a in G mit B vollständig verbunden.*

Lasse man nun sämtliche aB-Kanten von G weg, und nehme die paarweise fremden Graphen G_i ($i = 0, 1, \ldots, m$) folgendermaßen auf: Für $1 \leqq i \leqq m$ sei $G_i = \langle k - q - 1\rangle$, und es gelte $G \cap G_i = \emptyset$. Ist $q = 2$, so sei $m = 2s$ ($s \geqq 1$) und $G_0 = (ax_1x_2 \ldots x_m a)$. Ist $q = 1$ oder $q > 2$, so sei $m = q$,

$$\mathscr{P}(G_0) = \{a, x_1, \ldots, x_m\} \text{ und } G_0 = \langle q + 1\rangle.$$

In beiden Fällen sollen die Punkte $x_1, \ldots, x_m$ verschieden sein und nicht zu G gehören. Nachher verbinde man x_i mit jedem Punkt von G_i, und jedem Punkt von G_i mit jedem B-Punkt ($i = 1, \ldots, m$). Dann entsteht ein solcher k-kritischer Graph, in dem die Punkte $x_1, \ldots, x_m$ sowie sämtliche Punkte von G_i ($i = 1, \ldots, m$) Nebenpunkte sind.

Der Nachweis der Behauptung (2.15) bietet keine Schwierigkeiten. Wir wollen ihn übergehen.

(2.16) Nun wenden wir uns zum Beweis von (E.2). Ist G ein k-kritischer Graph, so soll im folgenden G_N stets jenen Teilgraphen von G bezeichnen, der durch die Nebenpunkte von G gespannt ist. Es sei $k \geqq 4$ ein festgehaltener Wert und bezeichne G' stets einen solchen Graphen, dessen sämtliche Glieder vollständige j-Graphen ($0 \leqq j \leqq k-1$) und ungerade Kreise sind und in dem jeder Punkt einen Grad $\leqq k-1$ besitzt. Unser Ziel ist zu zeigen, daß zu jedem solchen G' ein k-kritischer Graph G mit $G_N = G'$ konstruiert werden kann.

Einer der wichtigsten Schritte unseres Konstruktionsverfahrens ist die ,,Verwandlung eines Nebenpunktes in einem Hauptpunkt''. Dies bedeutet folgendes: Es sei x ein Nebenpunkt des k-kritischen Graphen G_1 (G_1 soll bei diesem Verfahren als ,,Grundgraph'' bezeichnet werden). Nehmen wir ein von G_1 fremden $\Gamma_{(k)}$-Graphen G_2 (s. (2.5); G_2 enthält nur Hauptpunkte) und wendet das unter (2.9) beschriebene Hajós'sche Verfahren für G_1 und G_2 in solcher Weise an, daß x mit einem beliebigen Punkt von G_2 identifiziert wird. Es wird dadurch der Grad von x erhöht, die Grade der übrigen Punkte von G_1 bleiben jedoch unverändert.

I) Wir beweisen zuerst den Satz für zusammenhängende G'. Ist G' leer, so ist ein $\Gamma_{(k)}$-Graph ein gewünschtes G. Besteht G' aus einem einzigen Punkte x, so bekommt man folgendermaßen ein gewünschtes G: Nehme man einen vollständigen k-Graphen G_1, der den Punkt x enthält und verwandle außer x sämtliche Punkte von G_1 in Hauptpunkte. Im Falle mehrpunktige G' wendet man vollständige Induktion bezüglich der Anzahl der Glieder von G' an. Man muß jedoch, um den Induktionsschluß durchführen zu können, etwas mehr beweisen: Man zeigt, daß zu G' (falls $\pi(G') > 1$ ist) auch ein solcher k-kritischer G existiert, der den folgenden Bedingungen genügt

1) es ist $G_N = G'$

2) für jedes $x \in G_N$ spannen die mit x verbundenen Hauptpunkte von G einen vollständigen Graphen.

a) Bestehe zuerst G' aus einem einzigen Glied. Ist G' ein ungerader Kreis, der mehr als drei Punkte enthält, so besitzt jener Graph G, der aus G' und aus einem $\langle k-3\rangle$ durch die Konstruktion (2.1) zustande kommt die Eigenschaften 1) und 2).

Es sei nun $G' = \langle j \rangle$ mit $2 \leqq j \leqq k - 1$. In diesem Falle nehme man einen solchen unter (2.13) konstruierten Graphen G^*, für dem (mit den dortigen Bezeichnungen)

$$\mathcal{N}(B_1') = j - 1, \quad \mathcal{N}(B_1) = k - j, \quad \mathcal{N}(B_2') = k - j, \quad \mathcal{N}(B_2) = j - 1$$

und

$$[\{a\} \cup B_1']_{G^*} = G'$$

besteht. G^* ist dann k-kritisch, und die Menge der Nebenpunkte von G^* ist

$$\begin{aligned} &\{a\} \cup B_1' \cup B_2' &&, \text{ falls } 2 < j < k-1 \\ &\{a\} \cup B_1' \cup B_2' \cup B_1, && \text{ falls } j = 2, \\ &\{a\} \cup B_1' \cup B_2' \cup B_2, && \text{ falls } j = k-1. \end{aligned}$$

Man verwandle nachher sämtliche nicht zu $\{a\} \cup B_1'$ gehörige Nebenpunkte in Hauptpunkte, undzwar in solcher Weise, daß man bei dem Hajós'schen Schritt von dem Grundgraphen folgende Kanten wegläßt: Bei der Umwandlung der B_2'-Punkte stets $B_2'B_2$-Kanten, bei der Umwandlung der B_1- bzw. B_2-Punkte (im Falle $j = 2$ bzw. $j = k - 1$) stets B_1B_2-Kanten. Der so entstehende Graph G genügt den Forderungen 1) und 2).

b) Es sei nun $l > 1$ und nehmen wir an, daß für jeden solchen mehrpunktigen G', der aus $l - 1$ Glieder besteht, ein k-kritischer G mit der Eigenschaften 1) und 2) existiert. Es bestehe ferner im folgenden G' aus l Glieder. Es sei G'' ein beliebiger Endglied von G' und man setze $\mathcal{P}(G'') = B' \cup \{a\}$, $a \notin B'$, wobei a den zu G'' gehörigen trennenden Punkt von G' bezeichnet. Betrachte man den Graphen $\tilde{G}' = G' - B'$. $\tilde{G}'$ ist zusammenhängend und mehrpunktig, ferner besteht er aus $l - 1$ Glieder und jedes Glied ist ein vollständiger j-Graph $(2 \leqq j \leqq k - 1)$ oder ein ungerader Kreis. Jeder Punkt von $\tilde{G}'$ hat einen Grad $\leqq k - 1$. Nach der Induktionsannahme gibt es ein k-kritischer Graph $\tilde{G}$, dessen Nebenpunkte den Graphen $\tilde{G}'$ spannen und in dem für jedes $x \in \tilde{G}'$, die mit x verbundenen Hauptpunkte einen vollständigen Graphen spannen. Setzt man $\varrho_{G''}(a) = q$, so ist $1 \leqq q \leqq k - 2$ und

$$\varrho_{\tilde{G}'}(a) = \varrho_{G'}(a) - \varrho_{G''}(a) \leqq k - 1 - q .$$

Andererseits ist $\varrho_{\tilde{G}}(a) = k - 1$, und daher gilt für die Menge $\tilde{B}$, der mit a verbundenen Hauptpunkte von $\tilde{G}$

$$\mathcal{N}(\tilde{B}) = \varrho_{\tilde{G}}(a) - \varrho_{\tilde{G}'}(a) \geqq q .$$

Bezeichne B eine beliebige Teilmenge von $\tilde{B}$ mit $\mathcal{N}(B) = q$. Man kann jetzt die Konstruktion von (2.15) mit den dortigen Bezeichnungen auf den Graphen $\tilde{G}$ anwenden, undzwar man darf $G_0 = G''$ annehmen. Bezeichnet G^* den entstehenden Graphen, so ist $\mathcal{P}(G_N^*) = \mathcal{P}(G' \cup (\bigcup_{i=1}^{m} G_i))$. Man verwandle dann sämtliche Punkte von G_i $(i = 1, \ldots, m)$ in Hauptpunkte, undzwar in solcher Weise, daß man bei dem Hajós'schen Schritt von dem Grundgraphen stets eine solche Kante wegläßt, die ein Punkt von G_i $(1 \leqq i \leqq m)$ mit einem B-Punkt verbindet. Der so entstehende Graph G genügt dann den Bedingungen 1) und 2), und unser Beweis ist damit für zusammenhängende G' beendet.

Wendet man das Hajós'sche Verfahren genügend vielmal mit je einem $\Gamma_{(k)}$-Graphen in geeigneter Weise an, so kann man aus einem G mit $G_N = G'$ zu solche k-kritischen $\tilde{G}$ gelangen, die ebenfalls die Eigenschaft $\tilde{G}_N = G'$ besitzen und beliebig viele Hauptpunkte enthalten.

II) Ist G' nicht zusammenhängend, so bekommt man ein gewünschtes G dadurch, daß man zu jeder komponente von G' einen solchen entsprechenden kritischen Graphen konstruiert, in dem auch solche Kanten existieren, die Hauptpunkte verbinden, und nachher aus diesen mit Hilfe des Hajós'schen Verfahrens in geeigneter Weise einen k-kritischen Graphen zustande bringt. Damit ist der Beweis von (E.2) beendet.

3. Kritische Graphen, die höchstens einen Hauptpunkt besitzen

Wir haben uns in der Einleitung auf die folgende Tatsache berufen

(3.1) *Außer den vollständigen Graphen und ungeraden Kreisen, enthäl jeder kritische Graph Hauptpunkte.*

Wir wollen jetzt zeigen, daß diese Behauptung eine einfache Folge des Satzes (E. 1) ist. Nehmen wir an, daß ein solcher k-kritischer Graph G existiert, der keine Hauptpunkte besitzt, und der weder ein vollständiger Graph, noch ein ungerader Kreis ist. Dann muß erstens $k \geqq 4$ bestehen. Ferner spannen jetzt die Nebenpunkte den Graphen selbst. Nach (E.1) haben dann die inneren Punkte der Endglieder von G einen Grad $< k - 1$. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung (3.1).

Der bekannte Brooks'sche Färbungssatz folgt nun unmittelbar aus (3.1). Der Satz lautet folgendermaßen: (s. [1]):

(3.2) (Brooks) *Ist der Grad jedes Punktes eines Graphen $\tilde{G}$ kleiner als k ($k \geqq 4$) und ist keine Komponente von $\tilde{G}$ ein vollständiger k-Graph, so ist $\tilde{G}$ ($k - 1$)-färbbar.*

Beweis. Nehmen wir an, daß $\tilde{G}$ die erwähnten Eigenschaften besitzt und nicht $(k-1)$-färbbar ist. $\tilde{G}$ enthält einen k-kritischen Teilgraphen G (s. [2]). G kann kein vollständiger k-Graph sein, sonst müßte G einen Punkt enthalten, dessen Grad größer als $k - 1$ wäre. Es ist ferner der Grad jedes Punktes in $G \leqq k - 1$. Diese Behauptungen stehen jedoch mit (3.1) in Widerspruch.

Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, hat Dirac ein rekurrentes Verfahren zur Herstellung sämtlicher solche kritischer Graphen angegeben, die höchstens einen Hauptpunkt enthalten (s. [8]). Wir werden jetzt mit Hilfe der Sätze (E.1) und (2.7) diese Graphen in direkter Form herstellen. Unsere Darstellung könnte man auch aus dem Dirac'schen Verfahren herleiten, doch scheint uns die Anwendung von (E.1) und (2.7) der naturgemäße Weg zu sein.

(3.3) **Satz.** 1) *Es sei G ein k-kritischer ($k \geqq 4$) Graph, der höchstens einen Hauptpunkt enthält, und es bezeichne z den Hauptpunkt von G, bzw. wenn kein solcher existiert (dann ist $G = \langle k \rangle$), so sei z ein beliebiger Punkt von G. Dann besitzt der Graph $G - z$ die folgenden Eigenschaften:*

a) Der Graph ist nichtleer und zusammenhängend.

b) Jedes mehrkantige Glied des Graphen ist ein vollständiger $(k-1)$-Graph $(k \geqq 4)$ bzw. im Falle $k = 4$ ein ungerader Kreis.

c) Jedes Endglied des Graphen ist mehrkantig .

d) Mit jedem trennenden Punkt des Graphen sind genau zwei Glieder, undzwar ein mehrkantiges und ein einkantiges inzident.

e) Die trennenden Punkte von $G - z$ haben in $G - z$ alle den Grad $k - 1$, die übrigen Punkte den Grad $k - 2$.

(Die Eigenschaft *e*) ist eine einfache Folge von *b*), *c*) und *d*).)

α) Im ursprünglichen Graphen G ist z mit denjenigen Punkten von $G - z$, und nur mit jenen verbunden, die keine trennenden Punkte von $G - z$ sind.

2) *Es besitze der Graph G' die Eigenschaften a), b), c), d) und z sei ein nicht zu G' gehöriger Punkt. Verbindet man dann z mit sämtlichen nichttrennenden Punkten von G', so ensteht ein solcher k-kritischer Graph G, in dem nur z Hauptpunkt sein kann.*

Beweis. I) Der kürze halber nennen wir jene Graphen, welche die Eigenschaften *a*), *b*), *c*) und *d*) besitzen, ε_k-*Graphen*. Besteht ein ε_k-Graph aus einem einzigen Glied, so ist nach *c*) und *b*) der Graph ein $\langle k - 1\rangle$ bzw. im Falle $k = 4$ ein ungerader Kreis. Betrachte man nun einen mehrgliedrigen ε_k-Graphen und in diesem ein Endglied. Dies enthält einen einzigen trennenden Punkt x, mit welchem nach *d*) genau ein weiteres, undzwar ein einkantiges Glied (xy) inzidiert. Läßt man das Endglied zusammen mit der Kante xy weg, so enthält man nach *d*) wieder einen ε_k-Graphen, und in diesem ist y kein trennender Punkt. Umgekehrt: verbindet man einen beliebigen nichttrennenden Punkt eines ε_k-Graphen mit einem Punkt eines dem Graphen fremden vollständigen $(k-1)$-Graphen, bzw. im Falle $k = 4$ mit einem Punkt eines dem Graphen fremden ungeraden Kreises, so entsteht wieder ein ε_k-Graph.

II) Es besitze G und z die in 1) vorausgesetzten Eigenschaften. Dann ist $G - z$ nicht leer. Da G keinen trennenden Punkt enthält (s. (2.6)), ist $G - z$ zusammenhängend. Ist $G = \langle k\rangle$, so ist $G - z = \langle k - 1\rangle$. Ist $G \neq \langle k\rangle$, dann ist nach (E.1) jedes Glied von $G - z$ ein $\langle j\rangle$ $(2 \leqq j \leqq k - 1)$, oder ein ungerader Kreis. Ist also x ein innerer Punkt eines Endgliedes von $G - z$, so ist der Grad von x in $G - z$ gleich $j - 1$ oder 2. Der Grad eines Punktes kann jedoch in G nur mit 1 größer sein, als in $G - z$. Daraus folgt, da $\varrho_G(x) = k - 1$ ist, daß jedes Endglied von $G - z$ ein $\langle k - 1\rangle$ bzw. im Falle $k = 4$ ein ungerader Kreis ist sowie daß sämtliche inneren Punkte jedes Endgliedes mit z verbunden sind. Demzufolge ist mit dem in einem Endglied enthaltenen trennenden Punkt a genau ein weiteres, undzwar ein einkantiges Glied (ab) inzident, und es besteht $\varrho_{G-z}(a) = k - 1$ und $za \notin G$. Wir haben so, unter anderen, das Bestehen der Behauptungen *a*) und *c*) für $G - z$ nachgewiesen.

III) Die Gültigkeit von *b*), *d*) und *α*) wird durch Induktion über die Anzahl der Glieder von $G - z$ bewiesen. Besteht $G - z$ aus einem einzigen Glied, so gelten die Behauptungen nach II). Nehmen wir an, daß sie in jedem solchen Falle bestehen, wo $G - z$ weniger als l $(l > 1)$ Glieder enthält und bestehe jetzt $G - z$ aus l Gliedern. Es sei $[A]_{G-z} = [A]$ $(A \subset \mathscr{P}(G - z))$ ein Endglied von $G - z$. Nach II) ist $[A]$ ein $\langle k - 1\rangle$, bzw. im Falle $k = 4$ ein ungerader Kreis, und es ist genau ein weiteres Glied von $G - z$, das Glied (ab) $(a \in A)$, mit $[A]$ inzident. Es sind ferner sämtliche Punkte von $A - \{a\}$ mit z verbunden, der Punkt a jedoch nicht. Es folgt nach *c*), daß b ein trennender Punkt von $G - z$ sein muß, und demzufolge ist $\{b, z\}$ ein trennendes Punktpaar von G.

Nach (2.7) gilt dann $bz \notin G$. Man bekommt nun aus dem Graphen $[A \cup \{b, z\}]$ durch Vereinigung von b und z einen vollständigen k-Graphen, bzw. im Falle $k = 4$ ein ungerades Rad (s. unter (2.1)), also in beiden Fällen einen k-kritischen Graphen. Daraus ergibt sich wieder nach (2.7), daß auch der Graph $G_1 = (G - A) \cup (bz)$ k-kritisch ist. Für jeden Punkt x von G_1, mit Ausnahme von z, gilt $\varrho_{G_1}(x) = \varrho_G(x)$, also kann auch in G_1 nur der Punkt z ein Hauptpunkt sein. In $G_1 - z$ ist jedoch die Anzahl der Glieder mit 2 kleiner, als in $G - z$, und so ist nach der Induktionsannahme $G_1 - z$ ein ε_k-graph, ferner sind sämtliche nichttrennenden Punkte von $G_1 - z$, und nur diese, in G_1 mit z verbunden. b ist also kein trennender Punkt von $G_1 - z$, und so ist nach I) auch $G - z$ ein ε_k-Graph. Ferner ist nach II) und den obigen jeder nichttrennende Punkt von $G - z$ in G mit z verbunden. Damit haben wir den Teil 1) unseres Satzes bewiesen.

IV) Der Teil 2) des Satzes wird durch Induktion über die Anzahl der Glieder von G' bewiesen. Ist G' ein aus einem einzigen Gliede bestehender ε_k-Graph, so ist G ein vollständiger k-Graph, bzw. im Falle $k = 4$ ein ungerades Rad. Die Behauptungen sind also richtig. Nehmen wir an, daß sie für jeden solchen ε_k-Graphen richtig sind, der weniger als $l (l > 1)$ Glieder enthält, und es bestehe jetzt G' aus l Gliedern. Es sei $[A]_{G'}$ ein Endglied von G', und mit diesem soll das Glied (ab) im Punkt a inzidieren. Dann ist nach I) auch $G' - A$ ein ε_k-Graph und b ist kein trennender Punkt dieses Graphen. Verbindet man jeden nichttrennenden Punkt $G' - A$ mit einem nicht zu G' gehörigen Punkt z_1, so bekommt man nach der Induktionsannahme einen solchen k-kritischen Graphen G_1, in dem nur z_1 ein Hauptpunkt sein kann. Jener Graph G_2, der aus $[A]_{G'}$ und aus einem nicht zu G' gehörigen und von z_1 verschiedenen Punkt z_2 in solcher Weise zustande kommt, daß man z_2 mit sämtlichen A-Punkten verbindet, ist gleichfalls ein solcher k-kritischer Graph, indem nur der Punkt z_2 ein Hauptpunkt sein kann. Wendet man nun das Verfahren von Hajós (s. (2.9)) auf die Graphen G_1 und G_2 in solcher Weise an, daß man von G_1 die Kante z_1b von G_2 die Kante z_2a wegläßt, die Punkte z_1 und z_2 mit dem Punkt z identifiziert und a mit b verbindet, so bekommt man gerade den Graphen G, und dieser besitzt nach (2.9) und nach den obigen eben die gewünschten Eigenschaften. Damit haben wir den Beweis von (3.3) beendet.

4. Untere Schranken für die Kantenanzahl kritischer Graphen

(4.1) Aus der Tatsache, daß in einem k-kritischen Graphen G der Grad jedes Punktes $\geqq k - 1$ ist, bekommt man für die Kantenanzahl $\nu(G)$ die folgende „triviale" untere Schranke:

$$\nu(G) \geqq \frac{n(k-1)}{2}, \tag{1}$$

wobei n die Anzahl der Punkte von G bezeichnet. Nach (3.1) gilt hier das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn G ein vollständiger Graph oder ein ungerader Kreis ist.

Das folgende tiefliegende Ergebnis von Dirac (s. [8] Theorem 15) gibt eine Verbesserung von (1):

(4.2) (Dirac) *Ist G k-kritisch* ($k \geqq 4$) *und* $\pi(G) = n > k$, *dann ist*

(2) $$\nu(G) \geqq \frac{n(k-1)}{2} + \frac{k-3}{2}\,.$$

Das Gleichheitszeichen gilt im Falle $n = 2k - 1$ *für die unter* (2.14) *definierten Dirac'schen Graphen.*

In den erwähnten Dirac'schen Graphen können nur die Punkte c_1 und c_2 Hauptpunkte sein. Besteht $\mathscr{A}(C_1) = k - 2$, so ist c_1 der einzige Hauptpunkt.

Dies und andere Zeichen lassen es vermuten, daß jene kritischen Graphen, die genau einen Hauptpunkt besitzen, bei der Bestimmung der minimalen Kantenanzahl eine wichtige Rolle spielen.

(4.3) Wir wollen jetzt die Punkt- und Kantenanzahlen der höchstens einen Hauptpunkt besitzenden kritischen Graphen berechnen. Diese Werte sind zuerst von Dirac bestimmt worden (s. [8]).

Aus dem Teil I) des Beweises von (3.3) folgt leicht durch Induktion, daß ein solcher ε_k-Graph G', der genau g ($g \geqq 1$) mehrkantige Glieder enthält, $g - 1$ einkantige Glieder und $2(g-1)$ trennende Punkte besitzt. Im Falle $k > 4$ gilt daher

$$\pi(G') = g(k-1) \quad \text{und} \quad \nu(G') = \binom{k-1}{2} g + g - 1\,.$$

Diese Formeln sind auch im Falle $k = 4$ richtig, vorausgesetzt, daß jedes mehrkantige Glied von G' ein Dreieck ist. Für jenen k-kritischen Graphen G, der nach dem Teil 2) von (3.3) aus G' zustande kommt, gilt daher

(1) $$\pi(G) = g(k-1) + 1$$

und

$$\nu(G) = \nu(G') + \pi(G') - 2(g-1) = \binom{k-1}{2} g + (k-2)\,g + 1\,.$$

Mit der Bezeichnung $\pi(G) = n$ bekommt man so

(2) $$\nu(G) = \frac{n(k-1)}{2} + \frac{(k-3)\,(n-k)}{2(k-1)} \qquad (k \geqq 4)\,.$$

Nach Satz (3.3) besteht (2) für jeden solchen k-kritischen ($k \geqq 4$) Graphen, der höchstens einen Hauptpunkt besitzt, vorausgesetzt, daß im Falle $4 = k < n$ die mehrkantigen Glieder der durch die Punkte 3-ten Grades von G gespannten Teilgraphen alle Dreiecke sind. Möglicherweise gibt der Wert von (2) die minimale Kantenanzahl k-kritischer Graphen bei festgehaltenen und der Bedingung $n = g(k-1) + 1$ genügenden Werten von n an. Der Dirac'sche Satz (4.2) und die Untersuchung der höchstens zwei Hauptpunkte besitzenden kritischen Graphen unterstützen diese Vermutung. Der Beweis scheint eine schwierige Aufgabe zu sein. Wir können mit Hilfe der Sätze (E.1) und (3.3) nur die folgende, von der vermuteten recht weit liegende Schranke angeben:

(4.4) **Satz.** *Ist G ein k-kritischer* ($k \geqq 4$) *Graph mit* $\pi(G) = n > k$, *so gilt*

$$\nu(G) > \frac{n(k-1)}{2} + \frac{n}{2(k+9)}\,.$$

Der Beweis von (4.4) ruht auf dem folgenden Lemma:

(4.5) **Lemma.** *Es sei jedes Glied des nichtleeren Graphen G' ein vollständiger j-Graph ($1 \leqq j \leqq k-1$, $k \geqq 4$) oder ein ungerader Kreis. Es soll ferner der Grad jedes Punktes von G' nicht größer als $k-1$ sein. Dann gilt*

$$\nu(G') \leqq \pi(G')\left(\frac{k-2}{2}+\frac{1}{k-1}\right)-1\,, \tag{1}$$

und das Gleichheitszeichen besteht hier dann und nur dann wenn G' ein ε_k-Graph ist, undzwar im Falle $k=4$ ein solcher ε_k-Graph, dessen sämtliche mehrkantigen Glieder Dreiecke sind.

Beweis. Wir wenden bei festgehaltenem k Induktion bezüglich $\pi(G')$ an. Wir setzen

$$\psi(n,k)=n\left(\frac{k-2}{2}+\frac{1}{k-1}\right)-1\,.$$

Für $\pi(G')=1$ gilt $\nu(G')=0<\psi(1,k)$. Da die Funktion $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{1}{x}$ für $x \geqq 2$ monoton wachsend ist, besteht für $\pi(G')=n'$, $2 \leqq n' \leqq k-1$ die Ungleichung $\nu(G') \leqq \binom{n'}{2} \leqq \psi(n',k)$, und das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn G' ein vollständiger $(k-1)$-Graph ist (dieser ist ein ε_k-Graph).

Es sei nun $n>k-1$, und nehme man an, daß unseres Lemma für sämtliche G' mit $\pi(G')<n$ richtig ist. Es sei $\pi(G')=n$. Besteht G' aus lauter isolierten Punkten, so ist $\nu(G')<\psi(n,k)$. Wir dürfen daher annehmen, daß G' Kanten enthält. Es bezeichne dann G_1 ein beliebiges mehrpunktiges Endglied von G'. Den Punkt a definieren wir folgendermaßen: Enthält G_1 einen trennenden Punkt von G', so sei a dieser Punkt. Enthält G_1 keinen trennenden Punkt von G' so sei a ein beliebiger Punkt von G_1. Es bezeichne ferner A die Menge der von a verschiedenen Punkte von G_1 und man setze $\mathcal{N}(A)=j$. Es ist $j \geqq 1$.

1) Es sei zuerst G_1 ein vollständiger $(j+1)$-Graph mit $1 \leqq j \leqq k-3$. Betrachte man den Graphen $G''=G'-A$. G'' genügt sämtlichen Bedingungen von (4.5) und es ist

$$\pi(G'')=n-j<n \quad \text{und} \quad \nu(G')=\binom{j+1}{2}+\nu(G'')\,.$$

Nach der Induktionsannahme ist

$$\nu(G'') \leqq \psi(n-j,k)=\psi(n,k)-j\left(\frac{k-2}{2}+\frac{1}{k-1}\right).$$

Es ist jedoch $\binom{j+1}{2}<j\left(\dfrac{k-2}{2}+\dfrac{1}{k-1}\right)$, und daher gilt

$$\nu(G')<\psi(n,k)\,.$$

2) Es sei jetzt G_1 ein vollständiger $(k-1)$-Graph. Man betrachte dann den Graphen $G^*=G'-(A \cup \{a\})$.

G^* genügt sämtlichen Bedingungen von (4.5) und es gilt $\pi(G^*)= = n-(k-1)<n$. Da $\varrho_{G'}(a) \leqq k-1$ ist, kann mit a höchstens eine nicht

zu G_1 gehörige Kante von G' inzidieren. Daher gilt

$$\nu(G') \leqq \binom{k-1}{2} + 1 + \nu(G^*) .$$

Nach der Induktionsannahme ist

$$\nu(G^*) \leqq \psi(n-(k-1), k) = \psi(n,k) - (k-1)\left(\frac{k-2}{2} + \frac{1}{k-1}\right) =$$

$$= \psi(n,k) - \binom{k-1}{2} - 1 .$$

Es gilt daher $\nu(G') \leqq \psi(n, k)$, und das Gleichheitszeichen kann nach dem Teil I) des Beweises von (3.3) dann und nur dann bestehen, wenn G' ein solcher ε_k-Graph ist, dessen sämtliche mehrkantige Glieder im Falle $k = 4$ Dreiecke sind.

3) Endlich sei G_1 ein $(2l+1)$ - *Eck* $(l \geqq 2)$. Man betrachte dann wieder den Graphen $G'' = G' - A$. Dieser genügt auch in diesem Falle sämtlichen Bedingungen von (4.5). Es ist

$$\pi(G'') = n - 2l < n \quad \text{und} \quad \nu(G') = 2l + 1 + \nu(G'') .$$

Nach der Induktionsannahme ist

$$\nu(G'') \leqq \psi(n-2l, k) = \psi(n,k) - 2l\left(\frac{k-2}{2} + \frac{1}{k-1}\right),$$

und so gilt $\nu(G') < \psi(n, k)$. Damit ist der Beweis von (4.5) beendet.

Mit Hilfe von (4.5) bekommt man nun den Satz (4.4) wie folgt:

Es bezeichne K die Menge der Nebenpunkte und L die der Hauptpunkte des k-kritischen $(k \geqq 4)$ Graphen G. Wir setzen $\pi(G) = n$ $(n > k)$, $\mathcal{N}(K) = n_K$, $\mathcal{N}(L) = n_L$ $(n_K + n_L = n)$. Dann gilt

$$\nu(G) \geqq \sum_{x \in K} \varrho(x) - \nu([K]) .$$

Nach (E.1) und (4.5) ist $\nu([K]) < n_K\left(\frac{k-2}{2} + \frac{1}{k-1}\right)$. Daher besteht

$$\nu(G) > n_K(k-1) - n_K\left(\frac{k-2}{2} + \frac{1}{k-1}\right) = n_K\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{k-1}\right). \tag{3}$$

Anderseits gilt (für jedes $x \in L$ ist $\varrho(x) \geqq k$)

$$\nu(G) \geqq \frac{n_K(k-1) + n_L k}{2} = \frac{n(k-1)}{2} + \frac{n_L}{2} . \tag{4}$$

Multipliziert man (4) mit $2\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{k-1}\right)$ und addiert die entstehende Ungleichung zu (3), so ergibt eine einfache Rechnung

$$\nu(G) > \frac{n(k-1)}{2} + \frac{n(k-3)}{2(k^2-3)} \geqq \frac{n(k-1)}{2} + \frac{n}{2(k+9)} .$$

5. Größte Kreise kritischer Graphen

(5.1) Wie zuerst J. B. Kelly und L. M. Kelly gezeigt haben, wächst die Länge der größten Kreise der k-kritischen ($k \geqq 4$) Graphen, bei festgehaltenem k, zusammen mit der Punktanzahl n ins Unendliche ([10] Theorem 3.3). Im Verhältnis zu n kann jedoch diese Länge „klein" sein. Betrachte man die größten Kreise der n-punktigen k-kritischen Graphen und bezeichne man mit $L_k(n)$ die Länge des kleinsten von diesen. Es haben sich mehrere Verfasser mit der Bestimmung von $L_k(n)$ beschäftigt. Zuerst zeigten J. B. Kelly und L. M. Kelly ([10] Theorem 4.1), daß

$$\underline{\lim} \frac{L_4(n)}{\log^2 n} \leqq c$$

ist, wobei c eine Konstante bezeichnet. Dann bewies Dirac ([5] Theorem 3), daß

$$\underline{\lim} \frac{L_k(n)}{\log^2 n} \leqq c_k$$

(c_k hängt nur von k ab) für jedes $k \geqq 4$ gilt. Dieses Resultat wurde von R. C. Read verschärft [13]. Er zeigte, daß für jedes $k > 4$ unendlich viele n mit

$$L_k(n) < \left(\frac{2}{\log 4}\right)^{k-2} \log n \cdot \log\log n \ldots \quad . \log_{(k-4)} n \cdot (\log_{(k-3)} n)^2$$

existieren. Wir wollen nun mit Hilfe von (3.3) die folgende Verbesserung dieser Ergebnisse beweisen:

(5.2) **Satz.** *Zu jedes $k \geqq 4$ existieren unendlich viele Werte von n mit*

$$L_k(n) < \frac{2(k-1)}{\log (k-2)} \cdot \log n \, .$$

Beweis. Es sei $k \geqq 4$ ein festgehaltener Wert. Zu jedes $j = 1, 2, \ldots$ werden wir einen k-kritischen Graphen G_j so konstruieren, daß für $j \to \infty$ $n_j = \pi(G_j) \to \infty$ bestehe und die Länge eines größten Kreises von G_j kleiner als $c_k \log n_j$ sei, wobei $c_k = 2(k-1)/\log (k-2)$ ist.

I) Wir wollen G_j ($j > 1$) so definieren, daß er genau einen Hauptpunkt besitze. Bezeichnet z_j diesen Hauptpunkt, so wird in der Tat erst der Graph $G'_j = G_j - z_j$ erklärt werden. G_j bekommt man dann aus G'_j nach der Vorschrift von (3.3). Die G'_j definieren wir durch Induktion. Es sei $G'_1 = \langle k-1 \rangle$ und nehmen wir an, daß G'_{j-1} ($j > 1$) in solcher Weise definiert wird, daß er die folgenden Eigenschaften besitzt: G'_{j-1} ist ein ε_k-Graph (s. I) von Beweis von (3.3)), undzwar im Falle $k = 4$ einer, dessen sämtlichen mehrkantigen Glieder Dreiecke sind. Außer den inneren Punkten der Endglieder hat jeder Punkt von G'_{j-1} den Grad $k-1$. (Diese Punkte sind also alle trennende Punkte von G'_{j-1}. Die inneren Punkte der Endglieder haben den Grad $k-2$.) Wir bemerken, daß G'_1 die angeführten Eigenschaften besitzt. Nun soll G'_j durch das folgende Verfahren aus G'_{j-1} hergestellt werden:

Man füge zu jedem inneren Punkt der Endglieder von G'_{j-1} je eine neue Kante zu, undzwar in solcher Weise, daß die neuen Kanten miteinander keinen, mit G'_{j-1} jedoch nur einen gemeinsamen Punkt haben. Nachher fügt man zu jenen Endpunkten der neuen Kanten, die nicht zu G'_{j-1} gehören, je einen $\langle k-1\rangle$ zu, undzwar in solcher Weise, daß diese weder paarweise noch mit G'_{j-1} gemeinsame Punkte enthalten.

Man sieht dann, daß G'_j alle jene Eigenschaften besitzt, die für G'_{j-1} angenommen wurden. Unsere Erklärung definiert also tatsächlich für jedes $j = 1, 2, \ldots$ einen Graphen G'_j, und alle diese Graphen besitzen die angeführten Eigenschaften.

Bezeichnet man die Anzahl der Punkte $(k-2)$-ten Grades von G'_j mit $\alpha(G'_j)$, so gilt

$$\alpha(G'_1) = k-1 \quad \text{und} \quad \alpha(G'_j) = (k-2)\,\alpha(G'_{j-1})\,.$$

Es ist also

$$\alpha(G'_j) = (k-1)\,(k-2)^{j-1}. \tag{1}$$

Es besteht ferner

$$\pi(G'_1) = k-1 \quad \text{und} \quad \pi(G'_j) = \pi(G'_{j-1}) + (k-1)\,\alpha(G'_{j-1}) \qquad (j > 1)\,. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt für $j > 1$

$$\begin{aligned} \pi(G'_j) &= k-1+(k-1)^2+(k-1)^2(k-2)+\ldots+(k-1)^2(k-2)^{j-2} = \\ &= k-1+(k-1)^2\frac{(k-2)^{j-1}-1}{k-3} > (k-1)\,(k-2)^{j-1}-2\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Den Graphen G_j bekommt man jetzt nach dem Teil 2) von (3.3) aus G'_j dadurch, daß man einen nicht zu G'_j gehörigen Punkt z_j mit sämtlichen inneren Punkten der Endglieder von G'_j verbindet. G_j ist dann k-kritisch und es gilt nach (3)

$$n_j > (k-1)\,(k-2)^{j-1}-1 \geqq (k-2)^j \qquad (j > 1)\,.$$

Daraus folgt, daß $n_j \to \infty$, wenn $j \to \infty$ und

$$j < \frac{\log n_j}{\log(k-2)} \tag{4}$$

besteht.

II) Jeder Kreis von G_j, der nicht durch z_j geht, liegt in einem Glied von G'_j. Seine Länge ist daher $\leqq k-1$. Ein größter Kreis von G_j muß also den Punkt z_j enthalten. Nun sei V_j ein größter Kreis von G_j. Dann ist $V_j - z_j$ ein in G'_j liegender Weg. Wir zeigen, daß die Länge eines jeden Weges von G'_j nicht größer sein kann, als $(k-1)\,(2j-1)-1$. In der Tat, ein Weg von G'_j $(j > 1)$ kann nach I) höchstens mit $2(k-1)$ Kanten mehr enthalten, als ein Weg von G'_{j-1}. Da ein größter Weg von G'_1 genau $k-2$ Kanten besitzt, kann ein Weg von G'_j höchstens $k-2+2(k-1)\,(j-1)$ Kanten enthalten. Dies bestätigt unsere Behauptung. Wir können jetzt, in Bezug auf (4) für die Länge von V_j die folgende Abschätzung geben:

$$\nu(V_j) \leqq (k-1)\,(2j-1)+1 < 2(k-1)\,j < \frac{2(k-1)}{\log(k-2)}\log n_j\,.$$

Damit ist der Beweis von (5.2) beendet.

(Eingegangen: 14. Mai, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Brooks, R. L.: „On colouring the nodes of a network". *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **37** (1941) S. 194—197.
[2] Dirac, G. A.: „Some theorems on abstract graphs. *Proc. London Math. Soc.* (3) **2** (1952) S. 69—81.
[3] Dirac, G. A.: „A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs". *J. London Mat. Soc.* **27** (1952) S. 85—92.
[4] Dirac, G. A.: „The structur of k-chromatic graphs". *Fund. Math.* **40** (1953) S. 42—55.
[5] Dirac, G. A.: „Circuits in critical graphs". *Monatshefte für Math.* **59** (1955) S. 178—187.
[6] Dirac, G. A.: „Map colour theorems related to the Heawood colour formula". *J. London Math. Soc.*, **31** (1956) S. 460—471.
[7] Dirac, G. A.: „Map colour theorems related to the Heawood colour formula (II)". *J. London Math. Soc.* **32** (1957) S. 436—455.
[8] Dirac, G. A.: „A theorem of R. L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger". *Proc. London Math. Soc.* (3) **7** (1957) S. 161—195.
[9] Hajós, G.: „Über eine Konstruktion nicht n-färbbarer Graphen". *Wiss. Zeitschrift der Martin-Luther Univ. Halle—Wittenberg. Math. Nat.* **X**/1 (1961) S. 116—117.
[10] Kelly, J. B.—Kelly, L. M.: „Paths and circuits in critical Graphs". *Amer. J. Math.*, **76** (1954) S. 786—792.
[11] König, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Leipzig, 1936.
[12] Ore, O.: *Theory of graphs.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 38, 1962.
[13] Read, R. C.: „Maximal circuits in critical graphs". *J. London Math. Soc.*, **32** (1957) S. 456—462.
[14] Ringel, G.: *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen.* Berlin, 1959.

КРИТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ I

T. GALLAI

Резюме

Мы назовем граф k-критическим, если его кроматическое число равно k и кроматическое число любого его собственного подграфа $< k$. В любом k-критическом графе степень каждой вершины $\geqq k-1$. Главным результатом статьи является следующая.

Теорема. *В k-критическом графе члены подграфа натянутого на вершинах степы $k-1$ являются полными графами и окружностями с нечетным числом рёбер.*

Следующее обращение зтой теоремы является также верным: Если члены графа G являются окружностями с нечетным числом рёбер и полными графами, содержащими менее чем k вершин ($k \geqq 4$) и если степень каждой вершины от $G_1 \leqq (k-1)$, тогда существует такой k-критический граф, в котором подграф, натянутый на вершинах степени $\leqq k-1$, является изоморфным G. Статья содержит также несколько применений главной теоремы.