ÜBER EINE EXTREMALEIGENSCHAFT DER AFFIN-REGULÄREN POLYGONE

von
G. HAJÓS

1. A. RÉNYI und R. SULANKE sind in ihren wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen (Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* **2** (1963) 75—84) auf ein geometrisches Problem gestoßen, das sie durch folgenden Satz erledigten:

Unter allen konvexen Polygonen gleicher Seitenzahl und gleichen Inhalts ist das Produkt der Inhalte aller durch zwei Nachbarseiten (als ihre konvexe Hülle) bestimmten Dreiecke dann und nur dann maximal, wenn das Polygon affin-regulär ist.

A. RÉNYI hat das Problem gestellt, diesen Satz möglichst elementar zu beweisen, da ihr ursprünglicher, infinitesimaler Beweis rechnerische Hilfsmittel in starkem Maße benutzt. Diese Arbeit enthält einen elementaren Beweis, verwendet jedoch die aus dem Weierstrass'schen Satz folgende Tatsache, daß es Polygone gibt, die ein maximales Produkt aufweisen. Im Folgenden wird mit elementargeometrischen Hilfsmitteln bewiesen, daß das fragliche Produkt nur bei affin-regulären Polygonen maximal sein kann.

Der Gedankengang des Beweises ist derselbe, wie ich ihn im Dezember 1962 in unserem Forschungsinstitut vorgetragen hatte; ich habe aber Einzelheiten umgestaltet, um Fallunterscheidungen möglichst zu vermeiden.

2. Wir zeigen zuerts, daß bei einem Extremalpolygon alle Winkelpaare affin-symmetrisch sind, d. h. es gibt zu je zwei Winkeln eine affine Symmetrie, die diese Winkelbereiche einander zuordnet. Für Nachbarwinkel trifft dies natürlich immer zu.

Es seien $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ keine Nachbarwinkel (Fig. 1). Da ihre Schenkel nicht an beiden Seiten der Geraden AB zu einander parallel laufen können, schneiden zwei Schenkel einander im Punkte C. Wir halten eine der durch AB begrenzten Halbebenen fest, und unterwerfen die andere, den Punkt C enthaltende Halbene einer inhaltstreuen axialen Affinität mit der Achse AB. Die Punkte dieser Halbebene werden dabei parallel zu AB verschoben. Der Punkt C selbst kann — wenn unser konvexes Polygon nach dieser Transformation noch immer konvex bleibt — durch die Strecke A_1B_1 laufen, wobei A_1 und B_1 die Schnittpunkte der durch C gelegten, zu AB parallelen Geraden mit den Geraden der von A und B auslaufenden festgehaltenen Seiten sind.

Unsere Transformation ändert weder den Inhalt des Polygons, noch die Inhalte der betrachteten Dreiecke, außer den beiden bei A und B liegenden.

Bei einnm extremalen Polygon muß also das Produkt der Inhalte dieser beiden Dreiecke maximal sein. Diese Inhalte stehen aber in festem Verhältnis zu den zu ihren festen Seiten gehörenden Höhen, also auch zu den Abständen des Punktes C von den Geraden AA_1 und BB_1, folglich auch zu den Strecken CA_1 und CB_1. Bei einem extremalen Polygon muß also das Produkt $CA_1 \cdot CB_1$ maximal sein, was dann zutrifft, wenn C die Strecke A_1B_1 halbiert, d. h. die Winkel $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ affin-symmetrisch sind.

3. Die gefundene notwendige Bedingung genügt schon, um zeigen zu können, daß das extremale Polygon affin-regulär ist. Wir behaupten also:

Sind in einem konvexen Polygon alle Winkelpaare affin-symmetrisch, so ist das Polygon affin-regulär.

Es ist mir nicht gelungen, diesen Satz irgendwie direkt zu beweisen. Der Beweis gelingt jedoch, indem wir einen Umweg benutzen mit der Grund-

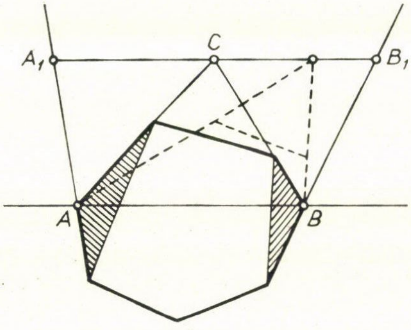

Fig. 1.

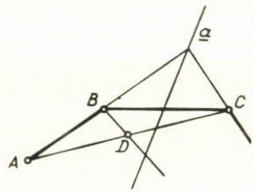

Fig. 2.

idee, daß die geforderte Eigenschaft die Fortsetzung eines Streckenzuges eindeutig bestimmt.

4. Wir beweisen zuerst, daß ein konvexes Polygon derart affin transformiert werden kann, daß für drei aufeinanderfolgende Ecken A', B', C' die Bedingungen $A'B' = B'C'$ und $\sphericalangle B' = \sphericalangle C'$ erfüllt sind.

Es genügt zu zeigen, daß es aufeinanderfolgende Eckpunkte A, B, C gibt, für welche die affine Symmetrieachse a der Winkel $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle C$ die Halbgerade BD (die affine Symmetriachse der Strecken BA und BC) schneidet, wobei D der Mittelpunkt der Strecke AC ist (Fig. 2). Es ist dann unmittelbar ersichtlich, daß die Richtungen (die unendlich fernen Punkte) der Geraden a und BC die Richtungen der Geraden BD und AC voneinander trennen. Da diese Richtungen einander trennen, können diese Geradenpaare durch eine Affinität gleichzeitig in orthogonale Lage gebracht werden. Diese Affinität überführt also die Winkel $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle C$, ferner die Strecken BA und BC in orthogonal symmetrische, also gleiche Winkel und Strecken.

Um nun Eckpunkte A, B, C der gewünschten Eigenschaft zu finden, können wir von der längsten Seite (bzw. einer der längsten Seiten) BC des Polygons ausgehen, und dürfen voraussetzen, daß die nach dem Inneren des Polygons gerichtete Achse a mit der Richtung CB keinen stumpfen Winkel einschließt. Wegen $AB \leqq BC$ ist aber $\sphericalangle DBC$ spitz, woraus folgt, daß a und die Halbgerade BD einander schneiden.

Wir hätten Eckpunkte A, B, C auch anderswie finden können. Betrachtet man alle das Polygon zerschneidenden Strecken der affinen Symmetrieachsen von zwei Nachbarseiten und von zwei Nachbarwinkeln, so folgt, daß es von einem Endpunkt und von dem Mittelpunkt einer Seite auslaufende Achsenstrecken geben muß, die einander im Inneren des Polygons schneiden, da man sonst von einer Achse ausgehend und auf einer Seite fortschreitend auf immer neue Achsen stoßen müßte.

5. Wir erbringen nun den Beweis, indem wir zeigen: kennt man die Seiten $AB = BC$ und die Winkel $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \alpha$ eines Polygons mit lauter affin-symmetrischen Winkeln, so ist die Fortsetzung des Polygonrandes über C hinaus eindeutig bestimmt. Wir beweisen also, daß diese Daten die

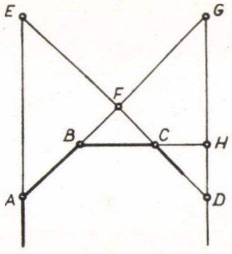

Fig. 3.

Lage des nächsten Eckpunktes D und die Gerade d der von D auslaufenden weiteren Seite eindeutig festlegen. Es folgt dann tatsächlich, daß der reguläre Teil, zu dem wir in 4 angelangt sind, nur regulär fortgesetzt werden kann, daß also die dort gefundene Affinität das ursprüngliche Extremalpolygon in ein reguläres Polygon transformiert.

Wir bemerken zuerst, daß die affine Symmetrieachse der Winkel $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle C$ durch die Strecken AB, BC schon bestimmt ist, daß also auch $\sphericalangle A = \alpha$ sein muß. Die Geraden der von A auslaufenden Seiten schneiden die Gerade CD in E und F (Fig. 3), und die Geraden der von B auslaufenden Seiten die gesuchte Gerade d in G und H. Wir rechnen natürlich damit, daß diese Punkte im Unendlichen liegen können. Die affine Symmetrie der Winkel $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle D$ überführt die Dreiecke $\triangle AFE$ und $\triangle DFG$ ineinander, und ebenso ordnet die affine Symmetrie der Winkel $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle D$ die Dreiecke $\triangle BCF$ und $\triangle DCH$ einander zu. Diese Dreieckspaare haben also gleichen Inhalt, wobei wir auch daran denken, daß die Inhalte ausgearteter Dreiecke (mit zwei parallelen Seiten) unendlich sind. Wir wissen also, daß die gesuchte Gerade d aus den bekannten Winkelbereichen $\sphericalangle DFG$ und $\sphericalangle DCH$ Dreiecke bekannten Inhaltes abschneidet, und müßen zeigen, daß diese Aufgabe nicht durch zwei verschiedene Geraden gelöst werden kann.

Um die störende Wirkung der Ausartungen auszuschalten bemerken wir, daß nur einer der Punkte E, F im Unendlichen liegen kann, wenn nämlich $\alpha = 120°$ bzw. $\alpha = 90°$ ist. Liegt E im Unendlichen, so muß d parallel zu AB laufen, und aus dem Winkelbereich $\sphericalangle DCH$ ein Dreieck bekannten Inhaltes abschneiden, was seine Lage eindeutig bestimmt. Liegt F im Unendlichen, so sind beide Dreieckspaare ausgeartet, und man kann nur folgern, daß d parallel zu BC läuft; in diesen Fall ist aber $\alpha = 90°$, also BC parallel zu der in A einlaufenden Seite, woraus für unser konvexes Polygon folgt, daß

d mit dieser letzterwähnten Seite zusammenfallen muß, daß also das Polygon ein Quadrat ist.

Wäre $\alpha < 90°$, so würde $\triangle\, BCF$ das Polygon enthalten (Fig. 4), dasselbe müßte dann wegen der affinen Symmetrie der Winkel $\sphericalangle\, B$ und $\sphericalangle\, D$ auch für das $\triangle\, DCH$ zutreffen, was aber unmöglich ist, weil entweder A außerhalb der Seitengeraden d liegen würde, oder D außerhalb der Geraden, die die in A einlaufende Seite enthält. Folglich ist $\alpha > 90°$, und das $\triangle\, BCF$ liegt außerhalb des Polygons. Hieraus folgt, daß das $\triangle\, DCH$ ebenfalls außerhalb des Polygons liegt und B nicht zum Schenkel CH gehört, daß also die beiden Schenkel CH und FG einander nicht schneiden. Die Winkelbereiche $\sphericalangle\, DCH$ und $\sphericalangle\, DFG$ können also entweder an beiden Seiten der Geraden

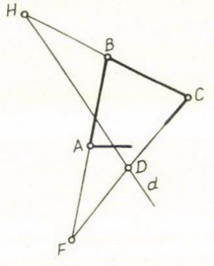

Fig. 4.

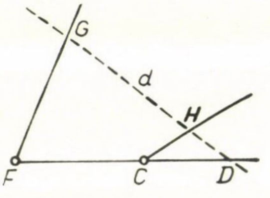

Fig. 5.

CD liegen, oder auf derselben, aber mit einander nicht schneidenden zweiten Schenkeln.

Schneiden zwei Geraden inhaltsgleiche Dreiecke aus einem Winkelbereich ab, so müßen sie einander innerhalb des Winkelbereiches schneiden. Liegen also $\sphericalangle\, DCH$ und $\sphericalangle\, DFG$ an verschiedenen Seiten der Geraden CD, so können zwei Geraden nicht gleiche Dreiecke aus ihnen abschneiden, da sie einander nicht an beiden Seiten von CD schneiden können.

Dasselbe trifft aber auch dann zu, wenn CD die Winkel $\sphericalangle\, DCH$ und $\sphericalangle\, DFG$ nicht trennt (Fig. 5). Dann müßten nämlich die beiden Geraden auch aus dem abgestumpften Winkelbereich $GFCH$ inhaltsgleiche Teile abschneiden, was wieder nur dann möglich ist, wenn die Geraden einander innerhalb dieses Bereiches schneiden. Es ist aber unmöglich, daß sie einander zugleich auch innerhalb des Winkelbereiches $\sphericalangle\, DCH$ schneiden. Die behauptete Eindeutigkeit ist also auch in diesem Fall bewiesen.

5. Wir fragen noch, welche konvexe Polyeder lauter affin-symmetrische Paare von Eckbereichen besitzen, und zeigen, daß nur das Tetraeder und das affin-reguläre Oktaeder von dieser Beschaffenheit sind. Als Eckbereich bezeichneten wir dabei jene Pyramide, die man durch Projektion des Polyeders von einem Eckpunkt aus erhält.

Die gesuchten Polyeder besitzen offenbar folgende Eigenschaft (E): sind A und B zwei Eckpunkte, so enthält jede durch die Gerade AB begrenzte offene Halbebene entweder je eine von beiden diesen Eckpunkten auslaufende Kante oder keine.

Wir beweisen, daß nur das Tetraeder und das projektiv-reguläre Oktaeder die Eigenschaft (E) besitzen. Dadurch wird offenbar auch unsere obige Behauptung bestätigt.

a) Besitzt ein Polyeder die Eigenschaft (E), so ist jede seiner Seitenflächen ein Dreieck. Sonst gibt es nämlich eine Diagonale AB einer Seitenfläche. Ist aber BC eine diese Seitenfläche nicht berandende Kante, so enthält die durch die Gerade AC berandete und den Punkt B enthaltende offene Halbebene die Kante CB, aber keine von A auslaufende Kante, was der Eigenschaft (E) widerspricht.

b) Besitzt ein Polyeder von der Eigenschaft (E) eine innere Diagonale AB, und legt man durch diese und durch eine Kante AA_1 eine Ebene, so enthält diese je zwei von A und B auslaufende Kanten. Wendet man nämlich die Eigenschaft (E) auf die die Kante AA_1 enthaltende und durch die Gerade AB bzw. A_1B berandete offene Halbebene an, so folgt die Existenz der in der betrachteten Ebene liegenden Kanten BB_1 und BB_2. Diese sichern dann ähnlicher Weise die Existenz einer weiteren Kante AA_2 in dieser Ebene.

Man betrachte nun ein Polyeder von der Eigenschaft (E). Laut dieser Eigenschaft laufen von jedem Eckpunkt gleichviele Kanten aus. Da das Polyeder wegen *a)* zugleich ein Dreieckpolyeder ist, muß es einem regulären Polyeder, und zwar einem regulären Dreieckpolyeder, also einem Tetraeder, Oktaeder oder Ikosaeder topologisch äquivalent sein. Das Ikosaeder fällt aber aus, da es innere Diagonale besitzt, und deshalb die durch sie gelegten Ebenen die von ihren Endpunkten auslaufenden Kanten laut *b)* in Paare ordnen müßten, was wegen der Anzahl 5 unmöglich ist. Das Oktaeder muß wegen *b)* drei ebene Kantenvierecke besitzen, d. h. projektiv-regulär sein. Da die gebliebenen Möglichkeiten, also das Tetraeder und das projektiv-reguläre Oktaeder die Eigenschaft (E) besitzen, ist der Beweis beendet.

(Eingegangen: 11. Juni, 1963.)

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ АФФИННО-ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

G. HAJÓS

Резюме

RÉNYI и SULANKE доказали, что:

Для выпуклых многоугольников с одинаковым числом сторон и одинаковой площади произведение площадей треугольников, построенных на паре соседних сторон, тогда и только тогда максимально, если многоугольник — аффинно-правильный (т. е. полученный из правильного путём аффинного преобразования).

В работе доказательство этого проводится элементарным геометрическим путём без вычислений, существование такого экстремального многоугольника вытекает из теоремы Weierstrass. Доказательство упрощает теорему следующим образом: н

Если у выпуклого многоугольника какие-нибудь два угла аффинно-симметричны, то этот многоугольник — аффинно-правильный.

В работе решаются также соответствующие пространственные проблемы.