ÜBER EINE EXTREMALEIGENSCHAFT DER AFFIN-REGULÄREN VIELECKE

von

László FEJES TÓTH

Im vorliegenden Aufsatz geben wir einen einfachen Beweis für den von Rényi und Sulanke herrührenden

Satz. *Unter den flächengleichen konvexen n-Ecken haben die affin-regulären n-Ecke das grösstmögliche Inhaltsprodukt der Randdreiecke.*

Unter einem *Randdreieck* wird dabei das durch drei aufeinander folgende Ecken des Vielecks bestimmte Dreieck verstanden. Im folgenden bezeichnen wir ein Vieleck und sein Flächeninhalt mit demselben Symbol.

Es sei T ein konvexes n-Eck ($n > 3$); die Randdreiecke seien in zyklischer Reihenfolge $t_1, \ldots, t_n$. Gesucht wird das Maximum des Quotientes $Q = t_1 \ldots t_n/T^n$. Die Existenz eines besten n-Ecks folgt leicht aus dem Weierstrass'schen Satz. Dieses n-Eck muss bei jeder infinitesimalen Veränderung der Bedingung

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dt_1}{t_1} + \ldots + \frac{dt_n}{t_n} - n\frac{dT}{T} = 0$$

genügen. Variieren wir nur eine Ecke, so verändern sich nur drei Randdreiecke, etwa t_1, t_2, t_3, und wir haben wegen $dT = dt_2$

$$\frac{dt_1}{t_1} + \frac{dt_2}{t_2} + \frac{dt_3}{t_3} = \frac{n}{T}dt_2 . \tag{1}$$

Wir formen diese Bedingung um. Es sei $t = ABC$ ein Dreieck mit der Basis $BC = a$ und der Höhe h. Verschieben wir A um den Vektor $\boldsymbol{dr}$, so gilt $dh = -\boldsymbol{e}\boldsymbol{dr}$, wobei $\boldsymbol{e}$ den von A ausgehenden, auf die Gerade BC senkrechten Einheitsvektor bedeutet. Mithin gilt

$$\frac{dt}{t} = \frac{dh}{h} = -\frac{\boldsymbol{e}}{h}\boldsymbol{dr} .$$

Bezeichnen wir die entsprechenden Höhen und Einheitsvektoren in den Dreiecken t_1, t_2, t_3 mit entsprechenden Indizes, so haben wir

$$\left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{h_2} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}\right)\boldsymbol{dr} = \frac{na}{2T}\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{dr} ,$$

wo a die entsprechende Basis in t_2 ist. Dies kann aber für jeden Vektor $\boldsymbol{dr}$ nur so bestehen, wenn

$$\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3} = \left(\frac{na}{2T} - \frac{1}{h_2}\right) \boldsymbol{e}_2 . \tag{2}$$

Die Bedingungen (1) und (2) sind gleichwertig. Da aber die Bedingung (1) affin-invariant ist, gilt dasselbe auch für die Bedingung (2). Sind also A, B, C, D, E aufeinander folgende Ecken eines konvexen Vielecks und ist (2) in C erfüllt, so gilt (2) auch für die Ecke C' des Streckenzuges $A'B'C'D'E'$, der aus $ABCDE$ durch eine flächentreue Affinität entsteht.

Wir zerlegen die Bedingung (2) in zwei Teile:

a) Für eine geeignete Zahl λ gilt

$$\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3} = \lambda \boldsymbol{e}_2 . \tag{3}$$

b) Es gilt

$$\lambda = \frac{na}{2T} - \frac{1}{h_2} .$$

Aus a) folgt, dass C auf der »affinen Symmetrieachse« der Halbgeraden BA und DE liegt (wie dies in einer euklidisch symmetrischen Lage einleuchtet). Die Bedingung b) bestimmt die Lage von C auf dieser Symmetrieachse.

Für ein Viereck folgt aus der Bedingung a), dass die Diagonalen den Flächeninhalt des Vierecks halbieren. Mithin ist das Viereck ein Parallelogramm. Wir setzen deshalb voraus, dass $n > 4$ ist. A, B, C, D, E seien fünf aufeinander folgende Ecken des extremalen n-Ecks. Die Seitengeraden AB, BC, CD und DE seien bekannt, aber die Punkte A und E nicht. Wir zeigen, dass die Bedingungen a) und b) bezüglich D die nächste Seitengerade EF (und damit zugleich die Ecke E) eindeutig bestimmen.

Ist BC parallel zu DE, so muss wegen der Bedingung a) bezüglich C auch CD parallel zu AB sein. Wegen der Bedingung a) bezüglich D ist aber dann auch EF parallel zu CD. Folglich fallen die Seiten AB und EF zusammen. Das n-Eck wäre also im Gegensatz zu unserer Voraussetzung ein Parallelogramm. In ähnlicher Weise sieht man ein, dass der Schnittpunkt O der Geraden BC und DE nicht auf der Verlängerung der Strecke CB nach B liegen kann. Wir können deshalb annehmen, dass O auf der Verlängerung der Strecke BC nach C liegt.

Wir führen die Punkte O, C, D durch eine flächentreue Affinität in die Punkte $(0, 0)$, $(0, -b)$, $(b, 0)$ eines rechtwinkligen Koordinatensystems xy über, wo $b > 0$ ist. Wir betrachten den Punkt $E = (\xi, 0)$ $(\xi > b)$, sowie den (eventuell im Unendlichen liegenden) Schnittpunkt $S = (0, \eta)$ der Geraden BC und EF. Ist S vorgegeben, so bestimmt die Bedingung a) eindeutig die Gerade EF. Ist η endlich, so besagt diese Bedingung, dass die Dreiecke CDS und EDS flächengleich sind. Deshalb gilt $b(b + \eta) = \eta(\xi - b)$, d. h.

$$\xi = b\left(2 + \frac{b}{\eta}\right).$$

Diese Gleichung gilt auch im Grenzfall $\eta \to \infty$.

Lassen wir S den ausserhalb der Strecke CO liegenden Teil der y-Achse von O ausgehend in positiver Richtung durchlaufen, so nähert sich E monoton gegen den Punkt D. Deshalb nimmt bei dieser Operation sowohl $a = CE$, wie h_2 ab. Folglich verändert sich auch $\frac{na}{2T} - \frac{1}{h_2}$ monoton von $+\infty$ bis $-\infty$.

Wir zeigen jetzt, dass der durch (3) definierte Wert λ bei der betrachteten Bewegung von S von $-\infty$ bis $+\infty$ monoton zunimmt. Aus der Normalgleichung

$$\frac{\eta x + \xi y - \xi\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = 0$$

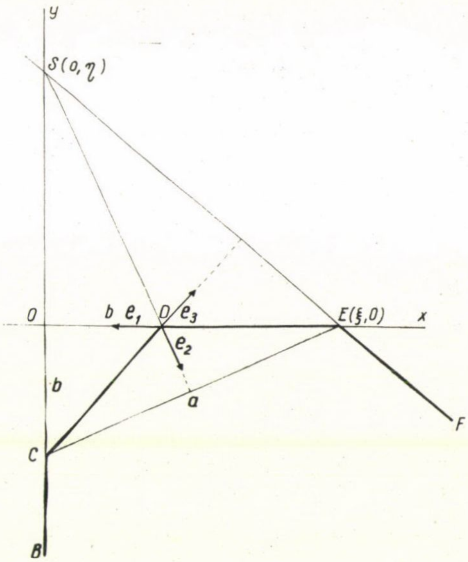

Fig. 1.

der Geraden SE ergeben sich für die Koordinaten von $\boldsymbol{e}_3$ die Werte

$$\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

und für den Abstand der Geraden von D

$$h_3 = \frac{\eta(\xi - b)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Somit sind die Koordinaten von $\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}$

$$\frac{1}{\xi - b}, \quad \frac{\xi}{\eta(\xi - b)}.$$

Da ferner die Koordinaten von $\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}$ die Werte $-\frac{1}{b}$, 0 haben, sind die Koordinaten von $\frac{\boldsymbol{e}_1}{h_1}+\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_3}$

$$\frac{2b-\xi}{b(\xi-b)}, \quad \frac{\xi}{\eta(\xi-b)}.$$

Folglich haben wir

$$\lambda^2=\frac{(2b-\xi)^2}{b^2(\xi-b)^2}+\frac{\xi^2}{\eta^2(\xi-b)^2}=\frac{1+b^2\left(2+\frac{b}{\eta}\right)^2}{b^2(b+\eta)^2}.$$

Hieraus geht klar hervor, dass λ^2 für $\eta>0$ eine abnehmende Funktion von η ist. Wir behaupten, dass λ^2 für $\eta<-b$ eine zunehmende Funktion von η ist. Setzen wir nämlich $-\frac{\eta}{b}=z$, so haben wir

$$b^4\lambda^2=\frac{1}{(z-1)^2}+\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z}\right)^2$$

was für $z>1$ mit zunehmendem z tatsächlich abnimmt. Damit ist die Monotonie von λ bewiesen. Aus der Monotonie von $\frac{na}{2T}-\frac{1}{h_2}$ und λ folgt aber, dass der Punkt S, und damit auch die Gerade EF durch die Bedingung b) eindeutig bestimmt ist.

Wir betrachten jetzt einen Kegelschnitt K, der die Polygonseiten BC und CD in ihren Mittelpunkten und die Gerade AB irgendwo berührt. Dann berührt K auch die Gerade DE. Wählen wir die Gerade EF so, dass sie K berührt, so sind die Streckenzüge $ABCDE$ und $BCDEF$ affin-äquivalent. Mithin sind die Bedingungen a) und b) in D erfüllt und die nächste Seitengerade des besten Vielecks ist zwangsläufig EF. Unser Vieleck ist also so dem Kegelschnitt K umbeschrieben, dass jede Seite K in ihrem Mittelpunkt berührt. Folglich ist K eine Ellipse und das Vieleck affin-regulär.

(Eingegangen: 28. Januar, 1963.)

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ АФФИННО-ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

L. FEJES TÓTH

Резюме

Работа содержит простое доказательство следующей теоремы Rényi и Sulanke:

Среди выпуклых n-угольников одинаковой площади в случае аффинно-правильного n-угольника произведение площадей треугольников, построенных на двух соседних сторонах n-угольника будет наибольшим.